BULLETIN

DES

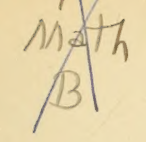
SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Ernest Lebon*, Secrétaire de la Rédaction, rue des Écoles, 4 *bis*, Paris, 5e.

56325 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.



BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. P. APPELL, E. CARTAN, J. DRACH, P. DUHEM, C. GUICHARD, J. HADAMARD, G. KŒNIGS, ER. LEBON, G. LORIA, S. RINDI, H. G. ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY;
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY
ET DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

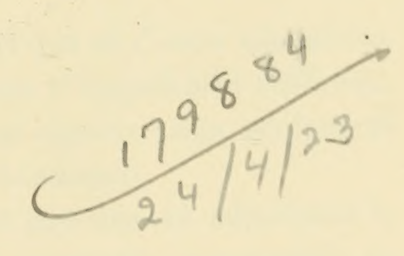
DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XL. — ANNÉE 1916.

(LI[e] VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.





PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET C[ie], ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1916

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BAGNERA (G.). — CORSO DI ANALISI INFINITESIMALE.
1 vol. gr. in-8°, XII-375 pages. Palermo, Tipografia matematica, 1915.

Voici les sujets dont traite ce *Cours :* continuité, dérivées, séries entières, différentielles, intégrales, fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, longueurs, aires, volumes, courbure, torsion, enveloppes, lignes de courbure, lignes géodésiques, coordonnées curvilignes, équations différentielles et aux dérivées partielles, calcul des variations.

C'est le programme de notre Certificat de Calcul différentiel et intégral, moins la théorie des fonctions; d'ailleurs, traité dans le même esprit, non pas d'une façon tout à fait élémentaire, mais sans grands détails (45 pages pour les équations différentielles, 15 pour celles aux dérivées partielles, 24 pour le calcul des variations).

Mais ce n'est pas en sacrifiant la rigueur que ce *Cours* atteint des dimensions aussi réduites, c'est en partant d'hypothèses suffisamment restreintes. Dans ces conditions, la rigueur, non seulement ne complique pas, mais même simplifie beaucoup.

L'Auteur avoue cependant avoir péché une fois en admettant la proposition suivante : *Étant donné un ensemble numérable de classes de nombres* C_1, C_2, ..., *il existe un ensemble numérable de nombres* x_1, x_2, ..., *tel que* x_n *appartienne à* C_n. Cette

proposition est un cas particulier de l'axiome de Zermelo, et par conséquent son admission ne paraîtra pas légitime à tout le monde. Mais l'Auteur remarque qu'elle n'est pas indispensable, il aurait pu l'éviter moyennant quelques longueurs de discours. Il n'a pas voulu sacrifier à cette pointillerie (*puntiglio*) la brièveté et l'élégance qui sont les deux qualités fondamentales de l'Ouvrage.

E. Cahen.

COUTURAT (Louis). — L'Algèbre de la Logique. 2e édition (collection *Scientia*, série *physico-mathématique*, n° 24). 1 vol. in-8°, 100 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, juin 1914.

La première édition de cet Ouvrage a été analysée dans le *Bulletin* par Jules Tannery ([1]). La deuxième édition est, à quelques corrections de détail près, la reproduction de la première. En lisant ce Livre, si clair et si complet dans sa concision, on ne peut que déplorer plus vivement la mort prématurée de l'Auteur, qui a péri le 3 août 1914, victime d'un accident d'automobile causé par une voiture qui portait, à toute allure, des ordres de mobilisation. Rendons ici un dernier hommage à la mémoire de Couturat en rappelant qu'il est auteur de beaux travaux de Philosophie mathématique dont les plus importants sont sa thèse *De l'Infini mathématique* (Analyse dans le *Bulletin*, 1897, p. 197) et son Livre plus récent *Les Principes des Mathématiques* (Analyse dans le *Bulletin*, 1906, p. 302).

S. Lattès.

([1]) Tome XXIX, 1905, 1re Partie, p. 194.

MÉLANGES.

ÉTUDE SUR LE MOUVEMENT D'UNE DROITE MOBILE DONT TROIS POINTS DÉCRIVENT LES TROIS FACES D'UN ANGLE TRIÈDRE ;

Par M. Gaston DARBOUX.

On sait depuis longtemps que l'ellipse peut, d'une infinité de manières différentes, être décrite par un point d'une droite dont deux autres points, liés invariablement au premier, décrivent des droites concourantes; que tout ellipsoïde peut aussi, d'une infinité de manières différentes, être décrit par un point d'une droite invariable dont trois autres points, invariablement liés au premier, décrivent respectivement les trois faces d'un trièdre. Mais si la première proposition, à raison de sa simplicité, a pu être l'objet d'une étude approfondie, celle qui concerne l'ellipsoïde appelle, il me semble, de nouvelles recherches. Dans une Note insérée, en 1881, aux *Comptes rendus* (t. 92, p. 447) et dans mes *Leçons sur la théorie des surfaces* (Ire Partie, 2e édition, p. 287), j'ai déjà établi une élégante propriété du mode de génération de l'ellipsoïde, dans le cas particulier où les trois plans décrits par les points de la droite invariable forment un trièdre trirectangle, et j'ai montré que, dans ce cas, les différentes positions de la droite mobile sont normales à une famille de surfaces parallèles, qui sont toutes de quatrième classe. Mais il y a, il me semble, bien des points à étudier encore dans le mode de génération de l'ellipsoïde, auquel Dupin a consacré, comme on sait, tout un Mémoire, inséré au 14e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* sous le titre : *Essai sur la description des lignes et des surfaces du second degré*.

Comme le dit son illustre auteur, ce Mémoire a été composé alors que Dupin se trouvait chargé, en qualité d'officier du Génie maritime, d'un service militaire très pénible; et sa rédaction laisse

peut-être quelque peu à désirer. Dupin était, comme on sait, le plus brillant élève de Monge; il a fait appel, le plus souvent, aux méthodes de la Géométrie descriptive; nous employerons, de préférence, celles de la Géométrie analytique.

I.

Le théorème fondamental est très aisé à établir. Prenons comme plans coordonnés les trois plans décrits par les trois points de la droite mobile. Soient α, β, γ les paramètres directeurs de cette droite, c'est-à-dire les projections sur les trois axes coordonnés, faites parallèlement aux plans coordonnés, d'un segment unitaire pris sur la droite mobile. Si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées du point décrivant de cette droite, celles d'un autre point situé sur la droite à la distance ρ du premier seront

$$(1)\qquad \begin{cases} X = x_1 + \rho\alpha, \\ Y = y_1 + \rho\beta, \\ Z = z_1 + \rho\gamma. \end{cases}$$

On sait que les paramètres α, β, γ sont liés par la relation

$$(2)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos\widehat{zy} + 2\gamma\alpha\cos\widehat{xz} + 2\alpha\beta\cos\widehat{xy} = 1.$$

Cela posé, si A, B, C désignent les distances du point décrivant aux trois points de la droite situés dans les plans coordonnés des yz, des xz et des xy, on devra avoir

$$(3)\qquad x_1 + A\alpha = 0, \qquad y_1 + B\beta = 0, \qquad z_1 + C\gamma = 0.$$

Ces relations permettent d'éliminer α, β, γ et nous donnent l'équation

$$(4)\qquad \frac{x_1^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} + \frac{z_1^2}{C^2} + 2\frac{y_1 z_1}{BC}\cos\widehat{yz} + 2\frac{z_1 x_1}{AC}\cos\widehat{xz} + 2\frac{x_1 y_1}{AB}\cos\widehat{xy} = 1.$$

Ainsi, le point (x_1, y_1, z_1) décrit bien un ellipsoïde. Mais les calculs si simples qui nous conduisent à cette conclusion doivent être interprétés comme il suit.

Au lieu de considérer seulement le point (x_1, y_1, z_1), envisageons d'une manière générale un point quelconque de la droite,

par exemple celui qui est à la distance ρ du précédent; ses coordonnées, fournies par les formules (1), pourront être écrites comme il suit :

$$(5)\qquad \begin{cases} X = \alpha(\rho - A), \\ Y = \beta(\rho - B), \\ Z = \gamma(\rho - C); \end{cases}$$

et de là se déduit la conséquence suivante, qui aura une grande importance pour la suite :

Chacun des ellipsoïdes décrits par les divers points de la droite se déduit de la sphère de rayon 1 *qui a son centre à l'origine par une transformation homographique qui conserve à la fois l'origine et le plan de l'infini.*

L'équation générale des ellipsoïdes décrits par les différents points de la droite sera

$$(6)\qquad \frac{X^2}{(\rho - A)^2} + \frac{Y^2}{(\rho - B)^2} + \frac{Z^2}{(\rho - C)^2} + \frac{2YZ}{(\rho - B)(\rho - C)}\cos\widehat{yz} + 2\frac{XZ}{(\rho - A)(\rho - C)}\cos\widehat{xz} + 2\frac{XY}{(\rho - A)(\rho - B)}\cos\widehat{xy} = 1.$$

Elle est, comme on voit, du *sixième* degré en ρ.

Mais si l'on prend l'équation tangentielle des mêmes ellipsoïdes, en supposant l'équation d'un plan écrite sous la forme

$$ux + vy + wz + p = 0,$$

on trouvera

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\widehat{xy} & \cos\widehat{xz} & u(\rho - A) \\ \cos\widehat{xy} & 1 & \cos\widehat{yz} & v(\rho - B) \\ \cos\widehat{xz} & \cos\widehat{yz} & 1 & w(\rho - C) \\ u(\rho - A) & v(\rho - B) & w(\rho - C) & p^2 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit donc que l'équation tangentielle sera seulement du second degré en ρ. Nous pourrons énoncer la proposition suivante :

Tous les ellipsoïdes décrits par les différents points de la droite font partie d'un réseau tangentiel; le cercle de l'infini, qui correspond à l'hypothèse $\rho = \infty$, *fait partie de ce réseau.*

La méthode précédente se prête aussi très bien à l'examen du cas particulier où deux des quantités A, B, C sont égales, par exemple A et B. Alors le mouvement de la droite mobile est défini par la condition qu'un de ses points décrive une droite fixe (D_1) (ici l'axe des z) pendant qu'un autre point décrira un plan (P) (ici le plan des xy). *Les ellipsoïdes décrits par les différents points de la droite mobile auront évidemment tous le plan* (P) *pour plan cyclique.*

Nous retrouverons toutes ces propositions, et nous les compléterons par une analyse qui n'employera que des coordonnées rectangulaires.

II.

Soit

$$(8) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'équation d'un ellipsoïde (E), rapporté à ses axes principaux.

On peut le déduire de la sphère

$$(9) \qquad x_1^2+y_1^2+z_1^2=1,$$

en lui appliquant la transformation homographique définie par les formules suivantes :

$$(10) \qquad x=ax_1, \qquad y=by_1, \qquad z=cz_1,$$

où a, b, c peuvent recevoir tel signe que l'on voudra et qu'on peut interpréter géométriquement de la manière suivante :

Soit M_1 le point de coordonnées x_1, y_1, z_1; portons sur la droite OM_1, et dans le sens indiqué par leur signe, les segments

$$ON=a, \qquad ON'=b, \qquad ON''=c.$$

Si, par les points N, N', N'', on mène des plans respectivement parallèles aux plans des yz, des xz et des xy, leur intersection M décrira le point de l'ellipsoïde défini par les formules (10) et, si l'on mène par ce point M une droite parallèle à OM_1, et qui coupe respectivement les plans coordonnés aux points P, P_1, P_2, il est clair qu'on aura, en grandeur et en signe,

$$MP=-a, \qquad MP_1=-b, \qquad MP_2=-c.$$

Ainsi, la droite PP_1P_2 sera bien une droite invariable dont les trois points précédents décriront les plans principaux de (E), pendant que le point M décrira cet ellipsoïde. Si l'on a pris, dans les formules (10), a, b, c avec le même signe, on aura un mode de description dans lequel les trois segments MP, MP_1, MP_2 auront le même sens sur la droite mobile. Si, au contraire, on a pris a, b, c avec des signes différents, on sera conduit à trois autres modes de génération définis, par exemple, par les formules

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{lll} x = -ax_1, & y = by_1, & z = cz_1, \\ x = ax_1, & y = -by_1, & z = cz_1, \\ x = ax_1, & y = by_1, & z = -cz_1. \end{array}\right.$$

Il serait inutile de changer le signe de plus d'un axe; car on serait ramené aux cas précédents par le changement simultané des signes de x_1, y_1, z_1. Dans ces trois nouveaux modes de génération, deux des segments MP, MP_1, MP_2 seront de même sens et de sens contraire au troisième. *Les trois droites qui leur correspondent formeront avec la première un angle tétraèdre* (U) *ayant pour axes de symétrie les parallèles menées par le point* M *aux axes coordonnés.*

Dans la suite, nous nous bornerons aux formules (10), où nous supposerons a, b, c pris avec des signes arbitraires, et nous verrons que notre méthode donne les trois autres générations.

III.

Pour obtenir tous les modes de description de l'ellipsoïde donné (E), il faut mener, par le point $M(x, y, z)$, une droite quelconque et exprimer que trois points de cette droite, à des distances invariables de M, décrivent trois plans passant par le centre.

Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ les cosinus directeurs de la droite cherchée. Le point de cette droite qui est à une distance ρ de M sera donné par les formules

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} x = ax_1 + \rho\mathcal{A}, \\ y = by_1 + \rho\mathcal{B}, \\ z = cz_1 + \rho\mathcal{C}, \end{array}\right.$$

où x, y, z n'ont plus la même signification que dans les formules (10). Si nous écrivons que les trois points de la droite d'abscisses ρ, ρ', ρ'' décrivent des plans passant par l'origine, nous serons conduits à trois équations telles que la suivante :

$$mx + ny + pz = 0 = max_1 + nby_1 + pcz_1 + \rho(m\mathcal{A} + n\mathcal{B} + p\mathcal{C}).$$

Ces équations nous donnent évidemment, pour $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, des valeurs de la forme

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} = \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1, \\ \mathcal{B} = \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1, \\ \mathcal{C} = \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1. \end{cases}$$

Comme on doit avoir

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 = 1,$$

on voit que les *neuf coefficients* α, α', α'', β, ... *seront ceux d'une substitution orthogonale*, et les formules (12) prendront la forme définitive

$$(14)\qquad \begin{cases} x = ax_1 + \rho(\alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1), \\ y = by_1 + \rho(\beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1), \\ z = cz_1 + \rho(\gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1), \end{cases}$$

où les x_1, y_1, z_1 seront liées par la relation (9) et définiront un point M_1 de la sphère de rayon 1, et où les neuf coefficients α, ... seront liés par des relations bien connues au nombre desquelles il faut compter celle-ci, que leur déterminant sera égal à ± 1. *Nous supposerons dans la suite que ce déterminant est égal à* $+1$. S'il en était autrement, il suffirait de changer le signe de tous les coefficients et celui de ρ, ce qui ne changerait pas les formules (14).

Il est facile de voir que ces formules donnent la solution complète de la question et qu'il est inutile de leur imposer une nouvelle limitation. Car si l'on donne à ρ l'une quelconque des trois valeurs qui annulent le déterminant

$$(15)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a + \rho\alpha & \rho\alpha' & \rho\alpha'' \\ \rho\beta & b + \rho\beta' & \rho\beta'' \\ \rho\gamma & \rho\gamma' & c + \rho\gamma'' \end{vmatrix} = 0,$$

les fonctions x, y, z cesseront d'être linéairement indépendantes et le point (x, y, z) décrira, en général, un plan passant par

l'origine. Ainsi, trois points déterminés de la droite mobile décriront des plans, tandis que celui d'abscisse $\rho = 0$ décrira l'ellipsoïde proposé.

Si l'on tient compte des relations telles que

$$\alpha = \begin{vmatrix} \beta' & \beta'' \\ \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}, \qquad \alpha' = -\begin{vmatrix} \beta & \beta'' \\ \gamma & \gamma'' \end{vmatrix} \qquad \cdots,$$

entre les neuf cosinus, l'équation (15) prend la forme simple

$$(16)\quad \Delta = \rho^3 + (a\alpha + b\beta' + c\gamma'')\rho^2 + (bc\alpha + ac\beta' + ab\gamma'')\rho + abc = 0,$$

qui ne dépend, comme on le voit, que des trois cosinus situés sur la diagonale principale du déterminant

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

L'interprétation des formules (14) nous permet de retrouver, en les précisant, quelques-uns des résultats énoncés au n° I.

D'abord, chacun des ellipsoïdes décrits par un point de la droite mobile correspond à la sphère décrite par le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et s'en déduit par une substitution homographique qui conserve à la fois l'origine et le plan de l'infini.

C'est ce que nous savions. Mais, ici, nous sommes en mesure de définir cette homographie de la manière la plus précise. Les formules (13) qui donnent les cosinus directeurs de la droite mobile s'interprètent immédiatement de la manière suivante :

Appelons *droite principale* celle qui est parallèle au rayon OM_1 et qui passe par le point M de l'ellipsoïde (E). C'est celle qui nous donne la génération dans laquelle les points dont les distances à M sont $-a$, $-b$, $-c$ décrivent respectivement les trois plans principaux. D'après les formules (13), qui définissent une rotation du rayon OM_1, il suffira d'imprimer à cette droite principale une rotation de grandeur et de sens déterminés, autour d'une parallèle menée par M à une direction fixe, pour obtenir les différentes positions de la droite mobile dans la génération définie par les formules (14). Ainsi nous obtenons le théorème suivant :

Considérons l'ellipsoïde (E), *appliqué homographiquement*

sur la sphère de rayon 1 *par les formules*

$$x = ax_1, \qquad y = by_1, \qquad z = cz_1,$$

qui font correspondre au point $M(x, y, z)$ *de l'ellipsoïde le point* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *de la sphère. Pour obtenir le mode de description le plus général de l'ellipsoïde par un point d'une droite invariable dont trois points décrivent des plans, il suffira, soit d'imprimer à* OM_1 *une rotation de grandeur déterminée autour d'une droite fixe passant par* O *et de mener par* M *une parallèle à la nouvelle position de* OM_1 ; *soit, ce qui revient au même, d'imprimer à la droite principale* (D) *de l'ellipsoïde, c'est-à-dire à la parallèle à* OM_1, *passant par* M, *une rotation de grandeur déterminée autour d'une droite menée par* M *parallèlement à une direction fixe.*

C'est ainsi que, si nous imprimons à la droite principale (D) des rotations de 180° autour des parallèles menées par M aux axes principaux de (E), nous obtenons les trois droites (D′), (D″), (D‴) qui forment avec (D) l'angle tétraèdre (U) déjà défini au n° II.

Au reste, le théorème précédent s'applique aux relations de la droite mobile (d) avec chacune de ces arêtes de l'angle tétraèdre (U), et non plus seulement avec la droite (D). Car soit, par exemple, (D′) celle des arêtes de l'angle tétraèdre qui se déduit de (D) par une rotation de 180° autour d'une parallèle à Ox. La droite mobile (d), dans un mode de description quelconque, peut se déduire de (D′) : 1° par une rotation de 180° autour d'une parallèle menée par M à Ox, rotation qui amènera (D′) sur (D); 2° par la rotation qui amènera (D) sur (d) et qui est, d'après le théorème fondamental, de grandeur et de sens déterminés. Or, ces deux opérations successives se composent évidemment en une seule rotation, elle aussi de grandeur et de sens déterminés, qui amènera (D′) sur (d). Il est donc indifférent de prendre telle ou telle des arêtes de l'angle tétraèdre (U).

IV.

Une fois obtenue la solution générale du problème, il nous reste à entrer dans les détails et à discuter les différents cas qui peuvent se présenter. Examinons d'abord la distribution des trois plans

qui, dans un même mode de génération, sont décrits par trois points de la droite mobile.

Désignons par ρ, ρ', ρ'' les abscisses, comptées à partir du point M décrivant l'ellipsoïde (E), des trois points de la droite mobile (d) qui décrivent des plans.

L'équation du troisième degré (16) qui définit ces trois abscisses nous montre d'abord qu'elles ne sauraient être choisies arbitrairement, mais que leur produit doit être égal à $-abc$; ainsi on doit avoir

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho\rho'\rho'' &= -abc,\\ \rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho'' &= bc\alpha + ac\beta' + ab\gamma'',\\ \rho + \rho' + \rho'' &= -a\alpha - b\beta' - c\gamma''. \end{aligned}\right.$$

De là il suit que, si ρ, ρ', ρ'' vérifient la première relation, il restera seulement deux équations que devront vérifier les coefficients de la substitution orthogonale; et comme ces coefficients dépendent de trois arbitraires, *il y aura une infinité simple de générations* correspondantes à des valeurs données de ρ, ρ', ρ'', pourvu, nous le répétons, que soit vérifiée la première des équations (18).

C'est ici le lieu de reproduire les formules qui permettent d'exprimer les neuf cosinus en fonction de trois paramètres. Ce sont les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha = \dfrac{1}{D}(g^2+h^2-k^2-l^2), & \alpha' = \dfrac{2}{D}(hk-gl), & \alpha'' = \dfrac{2}{D}(hl+gk),\\ \beta = \dfrac{2}{D}(hk+gl), & \beta' = \dfrac{1}{D}(g^2+k^2-h^2-l^2), & \beta'' = \dfrac{2}{D}(kl-gh),\\ \gamma = \dfrac{2}{D}(hl-gk), & \gamma' = \dfrac{2}{D}(kl+gh), & \gamma'' = \dfrac{1}{D}(g^2+l^2-h^2-k^2), \end{array}\right.$$

$$D = h^2+k^2+l^2+g^2.$$

Dans ces conditions, les formules

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1,\\ y' &= \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1,\\ z' &= \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1, \end{aligned}\right.$$

définissent une rotation dont l'axe et la grandeur sont donnés par

les formules

$$(21)\qquad \frac{\mathcal{A}'}{h} = \frac{\mathcal{B}'}{k} = \frac{\mathcal{C}'}{l} = \frac{\cot\frac{\theta}{2}}{g},$$

$\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$ étant les cosinus directeurs de l'axe de rotation et θ la grandeur de cette rotation, qui est déterminée en valeur absolue par la formule

$$(22)\qquad \tang^2\frac{\theta}{2} = \frac{h^2+k^2+l^2}{g^2},$$

et devient égale à 180° pour $g = 0$.

Remarquons que les formules (20) peuvent être écrites sous la forme

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha\, x' + \beta\, y' + \gamma\, z', \\ y_1 &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z_1 &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z', \end{aligned}\right.$$

et elles définissent alors ce qu'on appelle la *substitution inverse*. Comme elles se déduisent des formules (20) par le simple changement de g en $-g$, on voit, comme cela était évident *a priori*, qu'elles définissent une rotation égale et de sens contraire à celle qui est déterminée par les formules (20) et ayant lieu autour du même axe. On pourra consulter à ce sujet la Note que j'ai insérée dans les *Leçons de Cinématique* de M. G. Koenigs, p. 344.

D'après les expressions (19) des neuf cosinus, on reconnaît que les deux dernières formules (18), qui établissent les relations entre ρ, ρ', ρ'' et les coefficients de la substitution orthogonale, contiendront linéairement et d'une manière homogène les carrés h^2, k^2, l^2, g^2 des arbitraires qui entrent dans les formules (19). Si donc on a obtenu une solution définie par les valeurs h_0, k_0, l_0, g_0 de h, k, l, g, toutes celles qui correspondent aux valeurs

$$h = \pm h_0, \qquad k = \pm k_0, \qquad l = \pm l_0, \qquad g = \pm g_0$$

donneront les mêmes valeurs des abscisses ρ, ρ', ρ''. Cela fait huit systèmes de solutions. Les rotations correspondantes se font autour de droites dont les directions sont symétriques les unes des autres par rapport aux axes et aux plans principaux de l'ellipsoïde (E). Il y a deux rotations autour de chacune de ces droites,

égales et de sens contraires. C'est une conséquence des propriétés de symétrie de l'ellipsoïde.

V.

Désignons sous le nom de *plans directeurs* les trois plans (P), (P′), (P″) qui sont décrits par les trois points de la droite mobile (d) dont les abscisses sont ρ, ρ', ρ''. Si les équations de ces trois plans sont écrites sous la forme

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} m\,X + n\,Y + p\,Z &= 0,\\ m'X + n'Y + p'Z &= 0,\\ m''X + n''Y + p''Z &= 0,\end{aligned}\right.$$

le fait que, pour chacune des abscisses ρ, ρ', ρ'', les trois fonctions linéaires de x_1, y_1, z_1, définies par les formules (14), doivent être liées par une des relations précédentes nous conduira aux formules

$$(25)\qquad \left\{\begin{aligned} m\,\alpha + n\,\beta + p\,\gamma &= -m\,\frac{a}{\rho},\\ m\,\alpha' + n\,\beta' + p\,\gamma' &= -n\,\frac{b}{\rho},\\ m\,\alpha'' + n\,\beta'' + p\,\gamma'' &= -p\,\frac{c}{\rho};\end{aligned}\right.$$

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} m'\alpha + n'\beta + p'\gamma &= -m'\frac{a}{\rho'},\\ m'\alpha' + n'\beta' + p'\gamma' &= -n'\frac{b}{\rho'},\\ m'\alpha'' + n'\beta'' + p'\gamma'' &= -p'\frac{c}{\rho'};\end{aligned}\right.$$

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} m''\alpha + n''\beta + p''\gamma &= -m''\frac{a}{\rho''},\\ m''\alpha' + n''\beta' + p''\gamma' &= -n''\frac{b}{\rho''},\\ m''\alpha'' + n''\beta'' + p''\gamma'' &= -p''\frac{c}{\rho''},\end{aligned}\right.$$

qui contiennent évidemment toutes les relations entre le trièdre des plans directeurs et les abscisses ρ, ρ', ρ'' portées sur la droite mobile. On peut leur ajouter celles qui sont relatives aux arêtes de ce même trièdre.

Ces arêtes sont définies respectivement par les équations

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} m'x + n'y + p'z &= 0,\\ m''x + n''y + p''z &= 0,\end{aligned}\right.$$

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} m''x' + n''y' + p''z' &= 0,\\ m\,x' + n\,y' + p\,z' &= 0.\end{aligned}\right.$$

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} m\,x'' + n\,y'' + p\,z'' &= 0,\\ m'x'' + n'y'' + p'z'' &= 0,\end{aligned}\right.$$

où x, y, z, par exemple, désignent les coordonnées d'un point quelconque de l'intersection des plans (P′), (P″), et ainsi du reste.

Les rapports mutuels de ces quantités $x, y, z, \ldots$ sont définis par des équations telles que les suivantes :

$$\begin{vmatrix} x & y & z\\ \alpha + \dfrac{a}{\rho'} & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' + \dfrac{b}{\rho'} & \gamma' \end{vmatrix} = 0,\qquad \begin{vmatrix} x & y & z\\ \alpha + \dfrac{a}{\rho''} & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' + \dfrac{b}{\rho''} & \gamma' \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on déduit aisément les trois systèmes

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha\frac{x}{a} + \alpha'\frac{y}{b} + \alpha''\frac{z}{c} &= -\frac{x}{\rho},\\ \beta\frac{x}{a} + \beta'\frac{y}{b} + \beta''\frac{z}{c} &= -\frac{y}{\rho},\\ \gamma\frac{x}{a} + \gamma'\frac{y}{b} + \gamma''\frac{z}{c} &= -\frac{z}{\rho};\end{aligned}\right.$$

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha\frac{x'}{a} + \alpha'\frac{y'}{b} + \alpha''\frac{z'}{c} &= -\frac{x'}{\rho'},\\ \beta\frac{x'}{a} + \beta'\frac{y'}{b} + \beta''\frac{z'}{c} &= -\frac{y'}{\rho'},\\ \gamma\frac{x'}{a} + \gamma'\frac{y'}{b} + \gamma''\frac{z'}{c} &= -\frac{z'}{\rho'};\end{aligned}\right.$$

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha\frac{x''}{a} + \alpha'\frac{y''}{b} + \alpha''\frac{z''}{c} &= -\frac{x''}{\rho''},\\ \beta\frac{x''}{a} + \beta'\frac{y''}{b} + \beta''\frac{z''}{c} &= -\frac{y''}{\rho''},\\ \gamma\frac{x''}{a} + \gamma'\frac{y''}{b} + \gamma''\frac{z''}{c} &= -\frac{z''}{\rho''},\end{aligned}\right.$$

tout à fait analogues aux systèmes (25), (26), (27).

Remarquons que les équations (31), (32), (33) *deviennent identiques aux équations* (25), (26), (27) *si l'on y remplace* $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$ *par* m, n, p; $\frac{x'}{a}$, $\frac{y'}{b}$, $\frac{z'}{c}$ *par* m', n', p'; $\frac{x''}{a}$, $\frac{y''}{b}$, $\frac{z''}{c}$ *par* m'', n'', p'' *et si l'on substitue aux neuf cosinus ceux de la substitution inverse.*

Si l'on remarque encore que l'équation

$$\frac{x}{a}X + \frac{y}{b}Y + \frac{z}{c}Z = 0$$

est celle du plan diamétral conjugué à la droite d'intersection des plans (P'), (P'') par rapport à la quadrique $(\mathcal{E}_0)$ définie par l'équation

$$(34) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1,$$

on sera conduit au théorème suivant :

Si l'on a obtenu un mode de génération de l'ellipsoïde dans lequel ρ, ρ', ρ'' *sont les abscisses et* (P), (P'), (P'') *les plans directeurs, on en obtiendra un second, dans lequel les abscisses relatives aux plans directeurs seront les mêmes, en substituant au trièdre des plans directeurs celui qui est formé par les diamètres conjugués de ces plans relativement à la quadrique* $(\mathcal{E}_0)$.

La rotation par laquelle on passera de la droite (D) *à la droite mobile dans le second mode de génération s'effectuera autour du même axe que dans la première génération; mais elle sera égale et de sens contraire.*

Cette quadrique $(\mathcal{E}_0)$ *est une des huit surfaces par rapport auxquelles la sphère de rayon* 1 *et l'ellipsoïde* (E) *sont polaires réciproques l'une de l'autre.*

Cette proposition générale donne lieu à un corollaire très élégant.

Si la rotation primitive est de 180°, auquel cas la substitution directe (20) et la substitution inverse (23) se confondent, le trièdre des plans directeurs coïncidera avec celui qui est formé par les diamètres conjugués de ses faces. Ainsi,

Lorsqu'on a obtenu un mode de génération en prenant les symétriques de la droite principale relativement à une droite de direction fixe passant par M, *le trièdre des plans directeurs est formé de trois plans diamétraux conjugués relativement à la quadrique* $(\mathcal{C}_0)$.

En considérant, au lieu de la droite principale (D), une autre des arêtes de l'angle tétraèdre (U), on verra aisément que le théorème subsiste lorsque, au lieu d'imprimer une rotation de 180° à la droite principale, on lui imprime une rotation quelconque autour d'une droite parallèle à l'un des plans coordonnés; mais alors il faut substituer à la quadrique $(\mathcal{C}_0)$ une autre de celles par rapport auxquelles l'ellipsoïde proposé et la sphère de rayon 1 sont polaires réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire une des surfaces représentées par l'équation

$$(35) \qquad \pm\frac{x^2}{a}\pm\frac{y^2}{b}\pm\frac{z^2}{c}=1.$$

Nous aurons l'occasion de revenir sur le cas spécial que nous venons d'envisager, pour en signaler d'intéressantes propriétés.

VI.

On peut faire disparaître des formules (25), (26), (27) toutes traces de la substitution orthogonale en opérant comme il suit.

Élevons les équations (25) au carré et ajoutons-les; nous aurons

$$(a^2-\rho^2)m^2+(b^2-\rho^2)n^2+(c^2-\rho^2)p^2=0.$$

Multiplions de même, membre à membre, les équations correspondantes des systèmes (25), (26) et ajoutons. Nous aurons

$$(a^2-\rho\rho')mm'+(b^2-\rho\rho')nn'+(c^2-\rho\rho')pp'=0.$$

En opérant de même sur les autres équations, nous obtiendrons

les deux systèmes

$$(36)\quad \begin{cases} (a^2-\rho^2)m^2 + (b^2-\rho^2)n^2 + (c^2-\rho^2)p^2 = 0, \\ (a^2-\rho'^2)m'^2 + (b^2-\rho'^2)n'^2 + (c^2-\rho'^2)p'^2 = 0, \\ (a^2-\rho''^2)m''^2 + (b^2-\rho''^2)n''^2 + (c^2-\rho''^2)p''^2 = 0; \end{cases}$$

$$(37)\quad \begin{cases} (a^2-\rho'\rho'')m'm'' + (b^2-\rho'\rho'')n'n'' + (c^2-\rho'\rho'')p'p'' = 0, \\ (a^2-\rho\rho'')mm'' + (b^2-\rho\rho'')nn'' + (c^2-\rho\rho'')pp'' = 0, \\ (a^2-\rho\rho')mm' + (b^2-\rho\rho')nn' + (c^2-\rho\rho')pp' = 0. \end{cases}$$

Le premier aurait pu être écrit *a priori*. En effet, prenons la droite mobile (d) dans la position où elle est perpendiculaire au plan (P). Son pied dans ce plan décrivant une surface normale à la droite, tous les autres points de la droite décriront également des éléments de surfaces normaux à la droite. Il en sera ainsi, en particulier, du point décrivant M de l'ellipsoïde, qui devra être, par conséquent, dans une des deux positions où le plan tangent à l'ellipsoïde (E) est parallèle au plan (P). Il faudra donc que la distance du plan (P) au plan tangent parallèle de (E) soit égale en valeur absolue à ρ. C'est précisément ce qu'exprime la première des relations (36).

Dans la recherche des relations entre les plans du trièdre directeur, on peut essayer d'abord d'éliminer ρ, ρ', ρ''. On est ainsi conduit à des formules très compliquées telles que la suivante :

$$(38)\quad \frac{(a^2mm' + b^2nn' + c^2pp')^2}{(a^2m^2 + b^2n^2 + c^2p^2)(a^2m'^2 + b^2n'^2 + c^2p'^2)} = \frac{(mn' + nn' + pp')^2}{(m^2+n^2+p^2)(m'^2+n'^2+p'^2)},$$

dont il ne semble pas commode de tirer parti. Bornons-nous à remarquer que les trois relations de ce genre expriment le fait suivant : *Le trièdre des plans directeurs a les mêmes angles (et par conséquent les mêmes faces) lorsqu'on les mesure en prenant pour absolu soit le cercle de l'infini, soit la conique à l'infini de l'ellipsoïde* (E).

Revenons aux systèmes (36) et (37). Ils se composent de six équations à six inconnues; mais nous savons, d'après la théorie générale, que les six inconnues ne sauraient être déterminées; et il est aisé de vérifier que, par exemple, la troisième des équa-

tions (36) est une conséquence des cinq autres, pourvu que l'on ait

$$\rho^2\rho'^2\rho''^2 = a^2b^2c^2.$$

D'après cela, pour déterminer tous les modes de génération, on peut raisonner comme il suit.

Donnons-nous arbitrairement le plan (P)

$$mX + nY + pZ = 0,$$

ρ sera déterminé au signe près par la première des équations (36). Alors le plan (P') sera défini par les deux équations

$$(a^2 - \rho'^2)\,m'^2 + (b^2 - \rho'^2)\,n'^2 + (c^2 - \rho'^2)\,p'^2 = 0,$$
$$(a^2 - \rho\rho')\,mm' + (b^2 - \rho\rho')\,nn' + (c^2 - \rho\rho')\,pp' = 0,$$

qui détermineront deux systèmes de valeurs de m', n', p' lorsque $\rho\rho'$ sera donné en grandeur et en signe. Il est facile de voir que ces deux systèmes seront réels lorsqu'on aura

$$(39)\qquad \frac{m^2}{\frac{1}{\rho'^2} - \frac{1}{a^2}} + \frac{n^2}{\frac{1}{\rho'^2} - \frac{1}{b^2}} + \frac{p^2}{\frac{1}{\rho'^2} - \frac{1}{c^2}} < 0,$$

c'est-à-dire lorsque ρ' sera, en valeur absolue, comprise entre les deux axes de la section de l'ellipsoïde par le plan (P).

Le plan (P') une fois connu, les deux premières équations (37) détermineront sans ambiguïté le plan (P''), puisque la valeur de ρ'' résulte de celles de ρ et de ρ'.

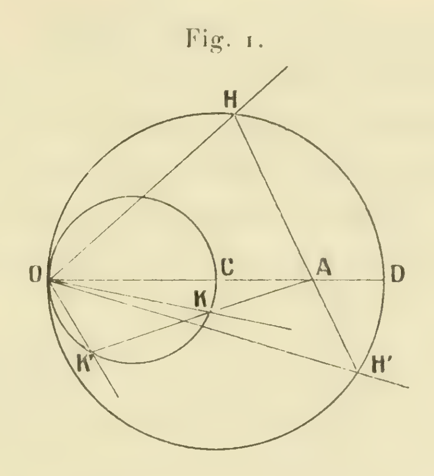
VII.

On peut substituer aux calculs précédents la démonstration géométrique suivante.

S'il existe une génération de l'ellipsoïde où le plan (P) soit un des plans directeurs, les abscisses ρ, ρ', ρ'' étant connues, il est clair que, lorsque la droite mobile sera dans le plan (P), le point décrivant parcourra l'ellipse (e) qui est section de l'ellipsoïde (E) par ce plan (P); et les deux points de la droite dont les abscisses sont ρ', ρ'' décriront deux droites passant par le centre commun de (E) et de (e). Or, on sait trouver très simplement tous ces modes de génération.

Si l'on porte sur le grand axe de l'ellipse (e), à partir du centre, les longueurs $a - b = OC$ (*fig.* 1) et $a + b = OD$ et que, par le

Fig. 1.



sommet A, qui est à égale distance des points C, D, on mène une droite quelconque HH' coupant le cercle de diamètre OD aux points H, H', on aura ainsi un premier mode de génération de l'ellipse dans lequel la droite mobile sera HH'; les points H, H' demeureront respectivement sur les droites OH, OH', et le point décrivant A, dans ce mode de génération, sera toujours entre H et H'.

Si, au contraire, on coupe le cercle de diamètre OC par la droite AKK', on obtiendra un second mode de génération déterminé par les deux droites OK, OK' et les deux abscisses de même signe AK, AK'.

Ces résultats sont bien connus.

Si l'on désigne les abscisses par ρ', ρ'', on aura dans le premier mode

$$\rho' \rho'' = - a_1 b_1,$$

et dans le second

$$\rho' \rho'' = a_1 b_1,$$

a_1 et b_1 désignant les axes de l'ellipse (e).

Dans l'un et l'autre cas, il y a évidemment deux modes de génération de l'ellipse (e) symétriques par rapport à CD et correspondants à un même système de valeurs de ρ' et de ρ''.

Cela posé, menons à l'ellipsoïde (E) un plan tangent parallèle au plan (P) et soit ϖ le point de contact de ce plan. Désignons par ρ la distance de ce point ϖ au plan (P). D'après les propriétés des

diamètres conjugués, on aura

$$\rho\, a_1 b_1 = abc.$$

D'autre part, la perpendiculaire abaissée de ϖ sur (P) est une des positions de la droite décrivante cherchée. Si l'on porte sur cette perpendiculaire, à partir de ϖ, les longueurs ρ', ρ'' dans le sens indiqué par leur signe, on aura évidemment deux points des plans (P'), (P''). Comme on connaît les droites suivant lesquelles ces plans coupent (P), ils sont entièrement déterminés, et tout est connu dans le mode de génération cherché.

La construction précédente, qui se rapproche beaucoup de celle indiquée par Dupin, donne évidemment la solution du problème, puisqu'elle fournit un ellipsoïde ayant même centre que (E), contenant l'ellipse (e) et tangent à (E) au point ϖ, ce qui montre que cet ellipsoïde se confond avec (E).

VIII.

Les méthodes par lesquelles nous avons obtenu au n° VI les relations entre les faces du trièdre directeur peuvent s'appliquer aux arêtes.

Par des procédés analogues à ceux qui ont été employés, on obtiendra les relations suivantes :

$$(40)\quad\left\{\begin{aligned}
&x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)=0,\\
&x'^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho'^2}\right)+y'^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho'^2}\right)+z'^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho'^2}\right)=0,\\
&x''^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho''^2}\right)+y''^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho''^2}\right)+z''^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho''^2}\right)=0;
\end{aligned}\right.$$

$$(41)\quad\left\{\begin{aligned}
&x'x''\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho'\rho''}\right)+y'y''\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho'\rho''}\right)+z'z''\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho'\rho''}\right)=0,\\
&x''x\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho\rho''}\right)+y''y\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho\rho''}\right)+z''z\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho\rho''}\right)=0,\\
&xx'\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho\rho'}\right)+yy'\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho\rho'}\right)+zz'\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho\rho'}\right)=0.
\end{aligned}\right.$$

Ici encore, le premier système pouvait être établi *a priori*. Car lorsque la droite mobile vient coïncider, par exemple, avec l'inter-

section des plans P′, P″, l'abscisse ρ devient le diamètre de l'ellipsoïde (E) dirigé suivant cette droite. C'est précisément ce qu'exprime la première équation (40).

Avec les relations précédentes, on pourrait refaire la théorie du nº VI. Les six équations (40), (41) se réduisent à cinq. De sorte que, lorsqu'on se donne ρ, ρ', ρ'', le trièdre des trois plans directeurs peut occuper une infinité simple de positions.

D'après les formules (36), ses faces varient en demeurant tangentes à trois cônes homofocaux dont les équations sont

$$(42)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{X^2}{a^2-\rho^2}+\frac{Y^2}{b^2-\rho^2}+\frac{Z^2}{c^2-\rho^2}=0,\\ &\frac{X^2}{a^2-\rho'^2}+\frac{Y^2}{b^2-\rho'^2}+\frac{Z^2}{c^2-\rho'^2}=0,\\ &\frac{X^2}{a^2-\rho''^2}+\frac{Y^2}{b^2-\rho''^2}+\frac{Z^2}{c^2-\rho''^2}=0;\end{aligned}\right.$$

et ses arêtes décrivent trois cônes homocycliques, représentés respectivement par les équations

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} &X^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)+Y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)+Z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho^2}\right)=0,\\ &X^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho'^2}\right)+Y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho'^2}\right)+Z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho'^2}\right)=0,\\ &X^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho''^2}\right)+Y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho''^2}\right)+Z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho''^2}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Le résultat ainsi obtenu mérite qu'on s'y arrête un instant. Pour plus de netteté, coupons le trièdre des plans directeurs par un plan, par exemple par le plan de l'infini. Nous aurons un triangle qui pourra se déplacer de telle manière que ses côtés demeurent tangents à trois coniques homofocales *différentes*, tandis que ses sommets décriront trois coniques homocycliques *également distinctes*. Les théorèmes de Poncelet nous fournissent des propositions analogues; mais les polygones mobiles considérés par Poncelet, ou bien ont tous leurs sommets sur une même conique, ou bien ont tous leurs côtés tangents à une même conique. Dans la proposition que nous signalons, il y a donc quelque chose d'essentiellement nouveau, puisque *notre triangle mobile ne demeure, dans ce mouvement, ni inscrit, ni circonscrit à une même conique.*

Il y a là un fait qui pourrait donner matière à des recherches intéressantes. Considérons un polygone (Π) de n côtés, dont les n sommets soient assujettis à décrire respectivement n courbes (C_1), (C_2), ..., (C_n), tandis que le premier, le second, ..., et le $(n-1)^{\text{ième}}$ côté seront assujettis à toucher respectivement $n-1$ courbes (E_1), ..., (E_{n-1}). Il est clair que ce polygone sera mobile puisqu'on pourra prendre arbitrairement son premier sommet sur la courbe (C_1). Alors son $n^{\text{ième}}$ côté enveloppera une courbe (E_n), qui se déduira des précédentes. Le problème auquel nous sommes conduits sera le suivant : « Étant admis que les $2n-1$ courbes (C_1), ..., (C_n), (E_1), ..., (E_{n-1}) sont toutes des coniques, dans quel cas la courbe (E_n) sera-t-elle une conique ou se décomposera en plusieurs coniques ? »

Nous en trouvons ici une solution, fournie par le triangle dont nous venons de définir le mouvement; il y en a d'autres, en dehors de celle qui est donnée par les théorèmes de Poncelet.

IX.

Nous venons de rattacher à l'ellipsoïde (E) toutes les droites dont un point décrit cet ellipsoïde (E), pendant que trois autres de leurs points décrivent des plans. Nous avons, dans ce qui précède, étudié ces trois plans directeurs. Voyons maintenant ce qui concerne les ellipsoïdes décrits par les différents points de la droite.

Ces ellipsoïdes sont définis par les formules (14), où x_1, y_1, z_1 désignent les coordonnées d'un point de la sphère de rayon égal à l'unité et où ρ varie quand on se déplace sur la droite.

Si l'on élimine x_1, y_1, z_1, un calcul facile conduit à l'équation en coordonnées ponctuelles des ellipsoïdes, équation qu'on peut mettre sous la forme d'un déterminant

$$(16)\quad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ x & a^2+\rho^2+2a\alpha\rho & \rho(a\beta+b\alpha') & \rho(a\gamma+c\alpha'') \\ y & \rho(a\beta+b\alpha') & b^2+\rho^2+2b\beta'\rho & \rho(b\gamma+c\beta'') \\ z & \rho(a\gamma+c\alpha'') & \rho(b\gamma+c\beta'') & c^2+\rho^2+2c\gamma''\rho \end{vmatrix} = 0.$$

Elle est du sixième degré en ρ; il est à remarquer que le terme tout connu y est le carré du déterminant Δ défini par la formule (15) et qui s'annule quand l'ellipsoïde se réduit à un plan.

Au reste, il est préférable de chercher l'équation tangentielle des ellipsoïdes décrits par les différents points de la droite, équation qui, nous l'avons vu au n° I, sera du second degré seulement en ρ. Si l'on écrit l'équation d'un plan sous la forme

$$uX + vY + wZ - 1 = 0, \tag{45}$$

les formules (14), où l'on remplacera les lettres x, y, z, x_1, y_1, z_1 par des capitales, nous donnent

$$\begin{aligned} uX + vY + wZ - 1 = {} & [(a + \rho\alpha)u + \rho\beta v + \rho\gamma w]X_1 \\ & + [\rho\alpha' u + (b + \rho\beta')v + \rho\gamma' w]Y_1 \\ & + [\rho\alpha'' u + \rho\beta'' v + (c + \rho\gamma'')w]Z_1 - 1. \end{aligned}$$

Pour obtenir l'équation tangentielle de l'ellipsoïde (E_ρ) décrit par le point d'abscisse ρ de la droite mobile, il faut écrire que le plan obtenu en égalant le second membre de l'identité précédente à zéro est tangent à la sphère de rayon 1 au point x_1, y_1, z_1, ce qui donne les formules

$$\left\{ \begin{aligned} & au + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w) = x_1, \\ & bv + \rho(\alpha' u + \beta' v + \gamma' w) = y_1, \\ & cw + \rho(\alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w) = z_1, \end{aligned} \right. \tag{46}$$

qui font correspondre les coordonnées du plan tangent à l'ellipsoïde (E_ρ) à celles du point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ de la sphère unité. En faisant la somme des carrés, on obtient l'équation tangentielle de l'ellipsoïde (E_ρ)

$$\begin{aligned} & a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 \\ & \quad + 2\rho[a\alpha u^2 + b\beta' v^2 + c\gamma'' w^2 + (b\gamma' + c\beta'')vw \\ & \qquad + (a\gamma + c\alpha'')uw + (a\beta + b\alpha')uv] + \rho^2(u^2 + v^2 + w^2) = 1. \end{aligned} \tag{47}$$

On voit bien que cette équation est du second degré en ρ et que l'ellipsoïde (E_ρ) fait partie d'un réseau tangentiel qui comprend à la fois l'ellipsoïde proposé (E) et le cercle de l'infini. Nous aurons à faire usage de cette remarque.

Si l'on considérait, dans l'équation (47), u, v, w comme des coordonnées ponctuelles, elle représenterait la polaire réciproque de l'ellipsoïde (E_ρ) par rapport à la sphère de rayon 1.

De là résulte que, pour obtenir l'équation au carré des axes de

l'ellipsoïde (E_ρ), il faudra écrire que le discriminant de la fonction homogène obtenue en retranchant

$$s(u^2+v^2+w^2)$$

du premier membre de l'équation (47) est nul. On trouve ainsi le résultat suivant :

$$(48)\quad \begin{vmatrix} a^2+\rho^2+2a\alpha\rho-s & a\beta+b\alpha' & a\gamma+c\alpha'' \\ a\beta+b\alpha' & b^2+\rho^2+2b\beta'\rho-s & b\gamma'+c\beta'' \\ a\gamma+c\alpha'' & b\gamma'+c\beta'' & c^2+\rho^2+2c\gamma''\rho-s \end{vmatrix} = 0$$

ou, en développant,

$$(49)\quad \begin{aligned} & s^3-s^2[a^2+b^2+c^2+3\rho^2+2\rho(a\alpha+b\beta'+c\gamma'')] \\ & \quad + s\,\big\{ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2\rho[a(b^2+c^2)\alpha+b(c^2+a^2)\beta'+c(a^2+b^2)\gamma''] \\ & \qquad + \rho^2(a^2+b^2+c^2)+\rho^2(a\alpha+b\beta'+c\gamma'')^2 \\ & \qquad + 2\rho^2(bc\alpha+ac\beta'+ab\gamma'')+4\rho^3(a\alpha+b\beta'+c\gamma'')+3\rho^4\big\} - \Delta^2 = 0. \end{aligned}$$

Il y a une remarque essentielle à faire sur cette équation, c'est qu'elle contient seulement les trois cosinus qu'on peut appeler *principaux*, α, β', γ''. Mais elle les contient cette fois dans trois combinaisons indépendantes

$$a\alpha+b\beta'+c\gamma'',$$
$$bc\alpha+ac\beta'+ab\gamma'',$$
$$a(b^2+c^2)\alpha+b(c^2+a^2)\beta'+c(a^2+b^2)\gamma'',$$

les deux premières figurant aussi dans Δ et la troisième dans le coefficient de s seulement. Si donc on demande que l'ellipsoïde (E_ρ) ait trois axes donnés, A, B, C, correspondants même à une valeur donnée de ρ, et, si l'on donne un signe au produit des axes ABC de manière à prendre

$$ABC = \Delta,$$

α, β', γ'' seront pleinement déterminés, et par conséquent aussi les rapports mutuels des arbitraires g^2, h^2, k^2, l^2 qui figurent dans les formules (19). En extrayant les racines carrées, on aura huit solutions différentes. Comme, d'après les formules (21), en donnant à g deux valeurs égales et de signes contraires, on obtient deux rotations de sens contraires autour de la même droite, ce qui

revient à effectuer deux substitutions inverses l'une de l'autre, on a le théorème suivant :

Si, dans les formules (14), *on remplace* α' *par* β, α'' *par* γ, β'' *par* γ' *et* vice versa, *c'est-à-dire si l'on soumet la droite principale à deux rotations égales et de sens contraires, on obtient deux positions de la droite mobile* (d) *pour lesquelles les ellipsoïdes* (E_ρ) *correspondants à la même abscisse* ρ *sont égaux.*

Si l'on changeait les signes de h, k, l, on n'obtiendrait que des résultats évidents à raison de la symétrie de l'ellipsoïde.

Occupons-nous maintenant des directions des plans principaux. Si l'on prend les demi-dérivées du premier membre de l'équation (47) duquel on aura retranché $s(u^2+v^2+w^2)$, on obtient trois équations qui définissent le plan principal correspondant à la racine s, ou, ce qui revient au même, l'axe principal, en regardant u, v, w comme les coordonnées d'un point.

Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned}(50)\qquad \varphi(u, v, w) = a\alpha u^2 + b\beta' v^2 + c\gamma'' w^2 + (b\gamma' + c\beta'')vw \\ + (a\gamma + c\alpha'')uw + (a\beta + b\alpha')uv;\end{aligned}$$

les équations qui déterminent le plan principal seront

$$(51)\qquad \begin{cases}(a^2+\rho^2-s)u + \rho\varphi'_u = 0,\\ (b^2+\rho^2-s)v + \rho\varphi'_v = 0,\\ (c^2+\rho^2-s)w + \rho\varphi'_w = 0.\end{cases}$$

Si l'on élimine s et ρ, on obtiendra l'équation

$$(52)\qquad \begin{vmatrix} a^2u & u & \varphi'_u \\ b^2v & v & \varphi'_v \\ c^2w & w & \varphi'_w \end{vmatrix} = 0,$$

qui est du troisième ordre en u, v, w. Ainsi,

Les plans principaux de tous les ellipsoïdes (E_ρ) *enveloppent un cône de troisième classe ou, ce qui est la même chose, leurs axes principaux décrivent un cône du troisième ordre.*

Le fait que ce cône du troisième ordre est circonscrit à une infi-

nité simple de trièdres trirectangles est en relation avec un théorème connu de géométrie plane.

Si l'on considère u, v, w comme des coordonnées ponctuelles homogènes dans un plan, l'équation (52) représente la jacobienne du réseau formé par les trois coniques

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 &= 0,\\ a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 &= 0,\\ \varphi(u, v, w) &= 0, \end{aligned}\right.$$

et l'on sait que la jacobienne d'un réseau est circonscrite à une infinité de triangles qui sont conjugués par rapport à une conique quelconque du réseau. Il suffit de choisir, parmi ces coniques, la première de celles qui sont définies par les équations (53), pour retrouver le théorème signalé plus haut.

Les résultats obtenus dans cet Article nous permettent d'indiquer quelques propriétés de la congruence engendrée par les diverses portions de la droite mobile.

D'abord, puisque l'équation (44) des ellipsoïdes décrits par les différents points de la droite mobile est du sixième degré en ρ, cela veut dire que la congruence est du sixième ordre, qu'il passe six positions de la droite mobile par un point quelconque de l'espace.

Pour trouver la classe de la congruence, nous chercherons le nombre des positions de la droite mobile qui sont dans un plan quelconque.

Soit

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

l'équation de ce plan. En exprimant qu'il contient la droite mobile, on aura les deux équations

$$Aax_1 + Bby_1 + Ccz_1 + D = 0,$$

$$A(\alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1) + B(\beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1) + C(\gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1) = 0,$$

qui, jointes à la relation

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1,$$

déterminent deux systèmes de solutions. Ainsi, la congruence est de seconde classe; elle est donc corrélative d'une de celles que

Kummer a étudiées dans ses Mémoires sur les systèmes de rayons rectilignes.

Pour obtenir la surface focale de cette congruence, il faut exprimer que l'équation (44) en ρ a une racine double, c'est-à-dire *prendre l'enveloppe des ellipsoïdes décrits par les différents points de la droite mobile*. On sera conduit ainsi à une surface du douzième ordre.

On peut d'ailleurs obtenir très aisément l'équation de cette surface en coordonnées tangentielles. Il suffit de prendre l'enveloppe des ellipsoïdes en partant de leur équation tangentielle (47), ce qui conduit à l'équation

$$\varphi^2(u, v, w) - (u^2 + v^2 + w^2)(a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1) = 0.$$

Ainsi, la surface focale de la congruence est de quatrième classe seulement.

On verra aisément qu'elle a douze plans tangents singuliers, à savoir les huit plans qui définissent le réseau tangentiel déterminé par les équations (53), les trois plans directeurs et le plan de l'infini.

X.

Nous allons rattacher à la recherche précédente la détermination des cas dans lesquels un ou plusieurs des ellipsoïdes (E_ρ) sont de révolution. Il suffira pour cela d'exprimer que l'ellipsoïde représenté par l'équation (47) est de révolution.

Commençons par considérer le cas où aucun des coefficients des rectangles, tels que $b\gamma' + c\beta''$, n'est nul. Alors les conditions qui expriment que la surface est de révolution seront les suivantes :

(54)
$$\begin{aligned} & a^2 + 2\rho a\alpha + \rho^2 - \rho\frac{(a\gamma + c\alpha'')(a\beta + b\alpha')}{b\gamma' + c\beta''} \\ & = b^2 + 2\rho b\beta' + \rho^2 - \rho\frac{(b\gamma' + c\beta'')(a\beta + b\alpha')}{a\gamma + c\alpha''} \\ & = c^2 + 2\rho c\gamma'' + \rho^2 - \rho\frac{(b\gamma' + c\beta'')(a\gamma + c\alpha'')}{a\beta + b\alpha'}. \end{aligned}$$

On peut supprimer ρ^2 et, en éliminant ρ entre ces deux équations,

on aura la condition

$$(55)\quad \begin{aligned} & 2a\alpha(b^2-c^2)+2b\beta'(c^2-a^2)+2c\gamma''(a^2-b^2) \\ & = (b^2-c^2)\frac{(a\gamma+c\alpha'')(a\beta+b\alpha')}{b\gamma'+c\beta''}+(c^2-a^2)\frac{(b\gamma'+c\beta'')(a\beta+b\alpha')}{a\gamma+c\alpha''} \\ & \qquad +(a^2-b^2)\frac{(b\gamma'+c\beta'')(a\gamma+c\alpha'')}{a\beta+b\alpha'}, \end{aligned}$$

qui paraît, au premier abord, assez compliquée. Mais servons-nous des formules (19) et posons, pour abréger,

$$(56)\quad \left\{ \begin{aligned} & h = \mathrm{H}\sqrt{\frac{c+b}{c-b}}, \qquad k = \mathrm{K}\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}, \qquad l = \mathrm{L}\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}, \\ & \qquad g = -\mathrm{G}\sqrt{\frac{c+b}{c-b}}\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}; \end{aligned} \right.$$

nous trouverons, par exemple,

$$a\beta+b\alpha' = 2\frac{(a+b)}{\mathrm{D}}\sqrt{\frac{c+b}{c-b}}\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}(\mathrm{HK}+\mathrm{GL}).$$

Si l'on fait usage des relations analogues, l'équation (55) prendra la forme

$$\begin{aligned} & -\mathrm{G}^2-\mathrm{H}^2-\mathrm{K}^2-\mathrm{L}^2+\frac{(\mathrm{GK}+\mathrm{HL})(\mathrm{GH}+\mathrm{KL})}{\mathrm{GL}+\mathrm{HK}} \\ & \qquad +\frac{(\mathrm{GL}+\mathrm{HK})(\mathrm{GK}+\mathrm{HL})}{\mathrm{GH}+\mathrm{KL}}+\frac{(\mathrm{GH}+\mathrm{KL})(\mathrm{GL}+\mathrm{HK})}{\mathrm{GK}+\mathrm{HL}} = 0, \end{aligned}$$

qui est entièrement débarrassée de a, b, c. En développant, on trouve

$$\mathrm{GHKL}(\mathrm{H}+\mathrm{K}+\mathrm{L}-\mathrm{G})(\mathrm{H}+\mathrm{K}-\mathrm{L}+\mathrm{G})(\mathrm{H}-\mathrm{K}+\mathrm{L}+\mathrm{G})(-\mathrm{H}+\mathrm{K}+\mathrm{L}+\mathrm{G}) = 0$$

Les solutions qu'on obtient en égalant à zéro les quatre derniers facteurs sont impropres, et, d'ailleurs, imaginaires. Il reste donc seulement les solutions pour lesquelles une des quantités G, H, K, L ou g, h, k, l est nulle.

Supposons d'abord $g = 0$. Nous savons que, dans ce cas, la rotation définie par les formules (13) se réduit à une symétrie par rapport à une droite, d'ailleurs quelconque. Nous avons déjà rencontré au n° V ce cas particulier dans lequel interviennent des propriétés remarquables du trièdre des plans directeurs. Nous

trouvons ici que l'abscisse ρ du point de la droite qui décrit l'ellipsoïde de révolution est donnée par la formule très symétrique

$$(57)\qquad \frac{h^2+k^2+l^2}{2\rho} = \frac{h^2}{b+c} + \frac{k^2}{c+a} + \frac{l^2}{a+b}.$$

Quant au plan principal correspondant, il est représenté par l'équation

$$(58)\qquad \frac{hx}{b+c} + \frac{ky}{c+a} + \frac{lz}{a+b} = 0.$$

L'interprétation de ces résultats serait facile si l'on introduisait la quadrique définie par l'équation

$$\frac{x^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b} = 1.$$

Nous ne nous y arrêterons pas et nous nous contenterons de remarquer que, dans ce cas, le cône lieu des axes principaux se décompose en le plan défini par l'équation (58) et en un cône du second degré.

Nous aurions maintenant à examiner encore les hypothèses

$$h = 0,\qquad k = 0,\qquad l = 0,$$

mais la remarque suivante rend cette discussion inutile.

L'hypothèse $h = 0$, par exemple, correspond à une rotation *quelconque* autour d'une droite *parallèle au plan des* yz. Or, une telle rotation équivaut à deux symétries successives, la première autour d'une parallèle à l'axe des x, qui remplacera la droite principale (D) par une autre arête (D′) de l'angle tétraèdre (U), la seconde qui aura lieu autour d'une droite *de direction quelconque*. On voit donc qu'il suffira de changer de *droite principale* pour être ramené au cas précédent $g = 0$.

Nous avons laissé de côté, dans la discussion, le cas où l'un des coefficients de uv, uw, vw serait nul.

On sait qu'alors deux au moins de ces trois coefficients doivent être nuls. La seule hypothèse qui ne conduise pas à des solutions impropres consiste à annuler deux au moins des quantités g, h, k, l. En choisissant convenablement la droite principale, on pourra toujours faire en sorte que g soit nulle. Supposons donc qu'on ait

à la fois

$$g = 0, \qquad h = 0,$$

c'est-à-dire

$$\beta = \alpha' = \alpha'' = \gamma = 0, \qquad \alpha = -1, \qquad \beta' = -\gamma'', \qquad \beta'' = \gamma',$$

alors l'équation (47) devient

$$(\rho - a)^2 u^2 + (b^2 + \rho^2 + 2b\rho\beta')v^2 + (c^2 + \rho^2 - 2c\rho\beta')w^2 + 2\rho(b+c)\gamma' vw = 1.$$

La condition pour que la surface soit de révolution est, comme on sait,

$$[b^2 - a^2 + 2b\rho\beta' + 2a\rho][c^2 - a^2 - 2c\rho\beta' + 2a\rho]^2 = \rho^2(b+c)^2\gamma'^2.$$

On obtient ainsi pour ρ les deux valeurs définies par les formules

$$(59) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{k^2 + l^2}{2\rho'} &= \frac{k^2}{a-b} + \frac{l^2}{a-c}, \\ \frac{k^2 + l^2}{2\rho''} &= \frac{k^2}{a+c} + \frac{l^2}{a+b}. \end{aligned} \right.$$

Enfin, une dernière hypothèse consiste à supposer que, dans l'équation (47), tous les rectangles sont nuls et que trois des quantités h, k, l, g sont nulles. La substitution se réduira alors à une symétrie par rapport à une droite parallèle aux axes et elle substituera à la droite principale une autre arête de l'angle tétraèdre (U). Dans ce cas, la droite mobile portera trois ellipsoïdes de révolution. Par exemple, les ellipsoïdes décrits par les points de la droite principale qui a été choisie auront pour équation

$$\frac{x^2}{(a+\rho)^2} + \frac{y^2}{(b+\rho)^2} + \frac{z^2}{(c+\rho)^2} = 1$$

et ils seront de révolution pour les trois valeurs suivantes de ρ :

$$\rho = -\frac{a+b}{2}, \qquad \rho = -\frac{b+c}{2}, \qquad \rho = -\frac{a+c}{2}.$$

En résumé, si l'on prend la symétrique de la droite principale par rapport à une parallèle à une direction fixe, un, et un seul, des ellipsoïdes décrits par un point de la droite mobile sera de révolution si la direction choisie n'est parallèle à aucun des plans

principaux; deux de ces ellipsoïdes seront de révolution si la direction fixe est parallèle à un des plans principaux sans l'être à un axe. Enfin, trois seront de révolution si la direction fixe est celle de l'un des axes, c'est-à-dire si la droite mobile est une des quatre droites principales.

XI.

Nous avons étudié au n° VI les relations entre les plans directeurs; mais nous avons négligé quelques remarques, que nous allons présenter maintenant, relatives aux divers cas particuliers qui peuvent se présenter. La détermination de ces plans dépend de l'équation du troisième degré (16) qui fait connaître les abscisses correspondantes. On voit ainsi que l'un d'eux sera nécessairement réel; mais les deux autres pourront être imaginaires, comme le montre, du reste, la construction donnée au n° VII. Il suffira, par exemple, pour qu'il en soit ainsi, que la droite menée du point A sur la figure 1 ne rencontre pas le cercle décrit sur OC comme diamètre. Enfin, il y a lieu d'examiner aussi le cas où les plans directeurs viendraient à se confondre, l'équation (16) en ρ ayant une racine double ou triple. Pour élucider toutes ces hypothèses, j'emploierai la transformation suivante des formules (14) qui ont servi de base à notre analyse.

Substituons aux coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point de la sphère unité les cosinus directeurs des angles que fait la droite mobile (d) avec les axes. Si nous les désignons par x', y', z', on aura

$$(60)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1,\\ y' &= \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1,\\ z' &= \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1;\end{aligned}\right.$$

et de là on déduira

$$(60')\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \alpha\, x' + \beta\, y' + \gamma\, z',\\ y_1 &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z',\\ z_1 &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z';\end{aligned}\right.$$

par suite, nos formules fondamentales pourront s'écrire

$$(61)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a(\alpha\, x' + \beta\, y' + \gamma\, z') + \rho x',\\ y &= b(\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z') + \rho y',\\ z &= c(\alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z') + \rho z';\end{aligned}\right.$$

et l'on pourra alors reconnaître facilement ce qu'elles deviennent quand on choisit des axes quelconques. Elles se présenteront évidemment sous la forme

$$(62)\quad \begin{cases} x = A\,x' + B\,y' + C\,z' + \rho x', \\ y = A_1 x' + B_1 y' + C_1 z' + \rho y', \\ z = A_2 x' + B_2 y' + C_2 z' + \rho z', \end{cases}$$

les constantes A, B, C, ... étant assujetties à cette seule condition que leur déterminant ne soit pas nul.

En effet, les formules (62), pour $\rho = 0$, représentent évidemment un ellipsoïde (E_0) rapporté homographiquement à la sphère unité et, si l'on choisit comme axes coordonnés les axes de cet ellipsoïde, on retombe sur les formules (61).

On peut même, en ajoutant une constante à ρ, supprimer la restriction que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Si nous prenons comme point de départ les formules (62), nous voyons que les fonctions x, y, z de x', y', z' sont généralement indépendantes. Mais il en est autrement si le déterminant

$$(63)\qquad \nabla = \begin{vmatrix} A+\rho & B & C \\ A_1 & B_1+\rho & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2+\rho \end{vmatrix}$$

est égal à zéro. Alors, si les mineurs de ce déterminant ne sont pas tous nuls, les fonctions x, y, z de x', y', z' sont liées par une seule relation, et le point *correspondant* de la droite mobile, déterminé par la valeur de ρ qui annule ∇, décrit tout un plan ou, au moins, toute une région de ce plan. Si, au contraire, les mineurs du premier ordre de ∇ sont tous nuls, les fonctions x, y, z sont proportionnelles, et le point correspondant de la droite mobile décrit lui-même une droite fixe ou, tout au moins, une portion de cette droite. Dans ce dernier cas, la dérivée de ∇ par rapport à ρ est évidemment nulle et ρ est une racine double ou triple de l'équation

$$(64)\qquad \nabla = 0.$$

Mais la réciproque n'est pas vraie, et cette équation peut avoir une racine double ou triple, sans que tous les mineurs de ∇ soient nuls. Remarquons que, si les mineurs de ∇ sont tous nuls avec un système d'axes, ils le seront encore lorsqu'on changera de coordonnées.

L'équation (64), étant du troisième degré, aura toujours une racine réelle ρ_0; en remplaçant ρ par $\rho_0 + \rho$, on peut faire en sorte que cette racine devienne nulle; et en changeant de coordonnées on peut donner aux formules (62) la forme

$$(65)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= A\,x' + B\,y' + C\,z' + \rho x', \\ y &= A_1 x' + B_1 y' + C_1 z' + \rho y', \\ z &= \rho z', \end{aligned}\right.$$

qui montre bien que, pour $\rho = 0$, le point (x, y, z) décrit un plan, le plan des xy, ou une droite située dans ce plan.

Avec ces formules, l'équation (64) devient

$$(66)\qquad \nabla = \begin{vmatrix} A - \rho & B \\ A_1 & B_1 + \rho \end{vmatrix} \rho = 0$$

et l'on voit ainsi que les deux racines associées à ρ peuvent être imaginaires. Ainsi, dans le mouvement de la droite mobile, deux des plans directeurs peuvent être imaginaires. Mais nous nous attacherons surtout aux racines multiples, et nous chercherons la condition pour que la racine $\rho = 0$ soit double ou triple.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on ait

$$AB_1 - BA_1 = 0,$$

c'est-à-dire que les deux fonctions $Ax' + By'$, $A_1 x' + B_1 y'$ soient proportionnelles. En changeant les axes des x et des y de manière que ces fonctions deviennent proportionnelles à x', on trouve les formules réduites

$$(67)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= A\,x' + C\,z' + \rho x', \\ y &= A_1 x' + C_1 z' + \rho y', \\ z &= \rho z'. \end{aligned}\right.$$

Le déterminant ∇ sera ici

$$\nabla = \begin{vmatrix} A + \rho & 0 & C \\ A_1 & \rho & C_1 \\ 0 & 0 & \rho \end{vmatrix} = \rho^2(A + \rho)$$

et ρ sera une racine double tant que A ne sera pas nul.

Supposons, d'abord, que tous les mineurs de ∇ soient nuls pour $\rho = 0$; il suffira, pour cela, qu'on ait

$$\begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix} = 0;$$

et il faudra joindre, pour $\rho = 0$, l'équation

$$A_1 x - A y = 0$$

à la suivante :

$$z = 0.$$

On voit ainsi que la droite mobile (d) devra toujours rencontrer une droite fixe (D_1) définie par les deux équations

$$z = 0, \quad A_1 x - A y = 0.$$

Et comme, d'autre part, le point de la droite qui a pour abscisse $\rho = -A$ décrit le plan (P) dont l'équation est

$$(67^a) \qquad A x + C z = 0$$

et qui est nécessairement distinct du plan des xy, le mouvement de la droite mobile sera déterminé par cette double condition que l'un de ses points décrive un plan (P), tandis qu'un autre de ses points décrira une droite fixe (D_1), coupant le plan (P) en *un seul* point.

Au n° I, nous avons déjà considéré ce mouvement particulier, et nous avons vu que le plan (P) est cyclique pour *tous* les ellipsoïdes décrits par les différents points de la droite. On retrouve ici ce mouvement sous la forme la plus générale; et un calcul facile montrera au lecteur qu'on obtient ainsi les ellipsoïdes les plus généraux.

Si le déterminant

$$\begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, le mouvement de la droite sera plus difficile à définir. Un de ses points, d'abscisse $-A$, décrira toujours le plan (P) défini par l'équation (67^a); un autre, d'abscisse nulle, décrira le plan des xy; mais cette double condition ne suffit à définir le mouvement de la droite (d) que si elle est dans le plan des xy, ce qui n'a pas lieu en général. Pour interpréter les formules, il

faut dire que la droite mobile menée par un point (x, y) du plan des xy a sa direction *entièrement* définie par les formules

$$x = A\ x' + C\ z',$$
$$y = A_1 x' + C_1 z',$$

qui peuvent être résolues par rapport à x', z' et nous donnent pour x', z' des expressions de la forme

$$(68) \qquad x' = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \qquad z' = \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'},$$

y' étant ensuite déterminée par la relation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Ces formules traduisent ce fait que la portion infiniment petite de la droite mobile comprise entre deux plans fixes infiniment voisins est constante; mais elles ne paraissent pas conduire à des constructions bien simples. Bornons-nous à remarquer qu'ici encore nous obtenons les ellipsoïdes les plus généraux.

Passons maintenant au cas où l'équation en ρ a une racine triple; il faut faire

$$A = 0$$

et les formules (67) deviennent

$$(69) \qquad \begin{cases} x = C\ z' + \rho x', \\ y = A_1 x' + C_1 z' + \rho y', \\ z = \rho z'. \end{cases}$$

Supposons d'abord

$$CA_1 \neq 0.$$

Les formules (68) seules se modifient un peu et prennent la forme

$$(70) \qquad x' = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \qquad z' = \frac{x}{a'}.$$

Un seul point de la droite mobile décrit un plan : c'est celui d'abscisse nulle qui décrit le plan des xy. Ce plan réunit, en quelque sorte, les trois plans directeurs, et les trois arêtes du trièdre formé par ces plans viennent se confondre avec la droite

$$x = 0$$

correspondante à l'hypothèse

$$z' = 0.$$

Ainsi, la droite mobile vient couper son plan directeur en tous les points d'une certaine région de ce plan, définie d'ailleurs par l'inégalité

$$x'^2 + z'^2 = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{x^2}{a'^2} < 1.$$

Les conclusions sont tout autres si tous les mineurs de ∇ sont nuls, c'est-à-dire si l'on a

$$CA_1 = 0.$$

On peut supposer

$$C = 0,$$

l'hypothèse $A_1 = 0$ conduisant au même résultat ; les formules (69) nous donnent alors

(71) $$\begin{cases} x = \rho x', \\ y = A_1 x' + C_1 z' + \rho y', \\ z = \rho z'. \end{cases}$$

Un changement des axes qui conserve l'origine et l'axe des y nous permet de les ramener à la forme

(72) $$\begin{cases} x = \rho x', \\ y = C_1 z' + \rho y', \\ z = \rho z'. \end{cases}$$

Le point d'abscisse nulle de la droite mobile (d) rencontre l'axe des y ; et toutes les droites qui passent par un même point de cet axe sont assujetties à l'unique condition de faire avec l'axe des z un angle défini par l'équation

(73) $$z' = \frac{y}{C_1}.$$

Elles engendrent donc un cône de révolution ayant son axe perpendiculaire au plan des xy, et les points de la droite mobile décrivent des ellipsoïdes ayant tous le plan des xy pour plan cyclique. Mais *ces ellipsoïdes ne sont pas les plus généraux* et il est aisé de reconnaître que leurs axes a, b, c satisfont à la condition

(74) $$b^2 = ac.$$

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HALE (George Ellery). — National Academies and the progress of research. Reprinted from Science. Vol. 38, 39, 40 et 41, 1913-1915, un vol. in-12, 167 p., Washington.

Le développement considérable qu'ont pris dans tous les pays les recherches scientifiques a conduit les hommes de science à se poser divers problèmes dont la solution importe au développement de la civilisation. Aujourd'hui, il y a dans tous les pays des Académies encyclopédiques, des Sociétés savantes ayant pour objet une branche particulière de la Science, puis des établissements d'enseignement de divers ordres, des Universités dont il ne faudrait pas limiter le rôle à la transmission des connaissances acquises; des écoles spéciales où l'on étudie les applications de la science à l'industrie, à l'art militaire, à l'agriculture; des laboratoires spéciaux, des établissements d'instruction pour les ouvriers et le grand public, etc. Il tombe sous le sens qu'il ne saurait convenir de laisser tant d'institutions se développer au hasard. Il importe pour le bien public que leur rôle soit défini et que leurs relations ne soient pas abandonnées à l'arbitraire. Dans le petit Livre dont nous avons à rendre compte et qui a paru par extraits dans le Journal américain *Science*, M. George Hale, le très distingué secrétaire pour l'étranger de l'Académie nationale des Sciences de Washington, examine quelques-uns des problèmes qui sont ainsi posés chez tous les peuples par le développement actuel des recherches scientifiques.

Son premier Chapitre contient un aperçu historique sur les principales Académies d'Europe, l'Académie de Platon, le Musée d'Alexandrie, les Académies italiennes, l'Académie des Sciences de Paris, l'Institut de France, les Académies allemandes, la Société royale de Londres, et se termine par quelques remarques fort intéressantes sur le rôle et le but qui doivent être dévolus aux Académies.

Le second Chapitre est consacré à l'Amérique et au premier

cinquantenaire de la *National Academy of Sciences*. Nul n'était mieux placé que M. G. Hale pour nous faire connaître l'importance qu'a déjà prise cette jeune Académie, les travaux qu'elle a entrepris, ceux qu'elle a suscités, les relations qu'elle entretient avec le gouvernement de son pays, etc.

Dans le Chapitre III, où M. George Hale se préoccupe du rôle de son Académie dans l'avenir, il examine quelle doit être la fonction d'une Académie nationale et insiste sur l'utilité qu'il y a pour son Académie à imiter l'exemple de notre Académie des Sciences et à publier des Comptes rendus périodiques de ses séances. On sait que la *National Academy* est entrée dans cette voie et publie depuis janvier 1915 des *Proceedings* que nous aurons à analyser régulièrement.

Nous recommandons la lecture de l'Ouvrage de M. Hale à tous ceux que préoccupent les problèmes dont nous avons parlé au début.

La R.

PERRY (JOHN). — MÉCANIQUE APPLIQUÉE. Tome I : *L'Energie mécanique*. Traduit sur la 9e édition anglaise par E. DAVAUX, avec des Additions et un Appendice sur la mécanique des corps déformables par MM. E. COSSERAT et F. COSSERAT. 1 vol. gr. in-8, VIII-398 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1913.

1. Pour caractériser l'intérêt spécial qui s'attache au Traité de Mécanique de M. John Perry, nous ne saurions mieux faire que de reproduire tout d'abord les premières lignes de la Préface que MM. François et Eugène Cosserat ont écrite en tête de la traduction française de l'Ouvrage :

« Un intervalle difficile à franchir, qui réclame des efforts incessants, sépare la Mécanique abstraite de ses applications; c'est ce que faisait déjà remarquer Poncelet, dans son Introduction à la Mécanique industrielle, et la difficulté n'a pas diminué depuis son temps. Les résistances de toute espèce que les corps naturels offrent à leur déformation ou à leur mouvement viennent, sinon démentir d'une manière complète, du moins modifier profondément les résultats purement théoriques. D'ailleurs, lorsqu'on

remplace un objet réel par les systèmes plus simples que les fondateurs de la Mécanique abstraite ont envisagés, on voit qu'on pourrait tout aussi bien adopter beaucoup d'autres conceptions; à vrai dire, l'expérience seule détermine dans quel sens doit s'exercer à cet égard notre intuition. Il est donc très justifié, tout au moins dans l'Enseignement technique, de donner le pas aux considérations expérimentales sur les déductions rationnelles. Il convient même de montrer dès le début comment on tire de l'expérience tous les principes et de s'attacher surtout à faire acquérir aux élèves l'habitude du raisonnement rapide, que l'esprit ne formule pas dans tous ses éléments, comme quand on sent déjà l'évidence d'un théorème avant de l'avoir démontré.

» C'est cette méthode, quelque peu hérétique dans notre pays, qui a été développée avec un très grand talent par M. John Perry, dans le Livre remarquable que nous présentons aux lecteurs français..... L'apparition de son Ouvrage en 1897 a été l'origine d'un vif mouvement de réforme dans l'Enseignement technique à tous les degrés des pays de langue anglaise. M. John Perry insiste d'une manière presque passionnée, à toutes les pages de son Livre, sur le caractère que doit prendre nécessairement l'étude de la Mécanique appliquée. Il ne veut pas qu'on donne aux élèves cette préparation exclusivement théorique, dont l'insuffisance leur inspire plus tard une sorte d'éloignement pour les vérités positives de la Science. Il veut que leur instruction soit solide, capable de porter des fruits dès leurs premiers pas professionnels, appuyée sur des données réelles et des chiffres exacts. M. John Perry a été l'un des meilleurs disciples de Lord Kelvin, le grand savant anglais qu'il a pris pour modèle; il n'élude donc pas les questions où la recherche mathématique a pu venir en aide aux praticiens et l'on verra qu'il a su très largement introduire, dans son exposition, tous les résultats utiles auxquels les théoriciens sont parvenus; mais il reste toujours un mécanicien d'intuition, qui substitue l'esprit de finesse à l'esprit de géométrie et n'abandonne jamais la vision réelle des faits. »

2. Ce n'est pas en effet d'aujourd'hui que se pose cette question si essentielle de l'enseignement de la Mécanique. Les lignes qui précèdent la limitent à l'enseignement de la Méca-

nique appliquée, mais elle peut être formulée en des termes beaucoup plus généraux. Elle ne doit pas préoccuper seulement ceux qui ont le souci de former des techniciens capables d'adapter aux nécessités pratiques les principes de la Science; elle doit préoccuper aussi tout ceux qui désirent que la Mécanique vive de sa sève propre, qu'elle se développe dans sa propre sphère et non par ses à côtés, qu'elle reçoive librement la forme qui convient le mieux à sa nature intime. Or il est nécessaire pour cela, qu'elle échappe aux déformations que lui impose l'abus de telles méthodes qui, appelées d'abord au titre d'auxiliaires, prétendent se substituer à elle, et, en tous cas, y exercer un rôle dominateur.

Il ne faut pas craindre de le dire et de le répéter; c'est un danger pour une science qui fait appel aux mathématiques et plus précisément au calcul, que de se voir absorbée par celui-ci; de voir les notions essentielles qui lui appartiennent et reçoivent d'elle leur vitalité, se transformer en de passives entités numériques, de voir qu'aux considérations directes ayant pour objet sa propre substance, se substituent de sèches et uniformes discussions d'équations.

L'abus de l'analyticisme est si bien reconnu qu'il fut cause, il y a quelques années, du remaniement des programmes de nos grandes Écoles; on y réduisit la part de la Géométrie analytique, association de mots fatale à la Géométrie, car on conviendra que l'adjectif y était bien plus coupable que le substantif. Une partie de la Géométrie supprimée fut remplacée par de la Mécanique. Mais le résultat ne pouvait être que de fournir à l'Algèbre un nouvel aliment. A propos de Mécanique, comme à propos de Géométrie, les élèves n'ont pas cessé de manier à tour de bras la routinière manivelle du calcul. Dès lors, dans l'esprit des élèves, les formules prennent la place des principes; c'est ainsi que la formule de Binet a rendu ce modeste géomètre aussi célèbre que Newton, car elle permet de traiter les trajectoires des forces centrales sans s'encombrer du principe des aires et de celui des forces vives. Un moment, c'est le déterminant $xY - yX$, car cette forme linéaire heureuse réduit à rien la démonstration du théorème de Varignon et supprime toutes les difficultés tenant aux signes dans la démonstration directe. Il faut trois axes rec-

tangulaires pour étudier le mouvement sans frottement d'un point pesant sur une hélice, car cette courbe est gauche dans l'espace à trois dimensions. Et, si l'on parvient au résultat, le théorème des forces vives n'y apparaîtra que comme un aboutissant accidentel du calcul, etc.

De toute cette Algèbre, les quelques bribes de vraie Mécanique mises au programme ne peuvent pas ressortir et l'on peut se demander parfois s'il ne vaudra pas mieux la rayer totalement des programmes, comme déjà une partie de la Géométrie.

3. Faut-il répéter que l'Algèbre ne peut engendrer que de l'Algèbre. L'interprétation même des formules ne s'obtient qu'à la condition d'opérer un retour souvent profond au cœur de la science spéciale elle-même, pour y puiser les suggestions indispensables. Or, dans ce retour, qui sera le guide? Ne sera-t-on pas forcé le plus souvent de tout reprendre à nouveau par des moyens intuitifs?

Le mouvement de Poinsot restera à cet égard un exemple éternellement probant, non isolé d'ailleurs. L'illustre géomètre a écrit à cette occasion quelques lignes bien connues, mais qu'on ne saurait trop souvent citer :

« Euler et d'Alembert, à peu près dans le même temps et par des méthodes différentes, ont, les premiers, résolu cette importante et difficile question de la Mécanique et l'on sait que, depuis, l'illustre Lagrange a repris de nouveau ce fameux problème pour l'approfondir et le développer à sa manière, je veux dire, par une suite de formules et de transformations analytiques qui présentent beaucoup d'ordre et de symétrie, mais il faut convenir que, dans toutes ces solutions, on ne voit guère que des calculs, sans aucune image nette de la rotation des corps. »

Ce n'est pas sans quelque ironie que l'on constate que, aussitôt après la publication du Mémoire de Poinsot, les écrits affluèrent où le calcul s'efforçait de reprendre ses droits et de faire voir que lui aussi arrivait avec aisance aux résultats découverts mécaniquement par Poinsot. Pourtant, même aux mains des plus habiles, le calcul n'avait rien deviné. C'est que, pour arriver à la découverte de Poinsot, il fallait par la voie de l'intuition, sous la sug-

gestion directe des données de la question, être amené à y penser. Or, à cet effort de pensée, le calcul ne supplée pas.

On peut même dire plus, c'est parce qu'il élude ce genre d'effort que le calcul est pratiqué, préféré. Le calcul, en effet, fournit automatiquement, obscurément pourrait-on ajouter, la preuve d'une proposition à démontrer : il dispense de rechercher des explications directes, parfois délicates qui exigeraient une pénétration plus profonde de la science spéciale. Cependant, une démonstration qui ne reculerait pas devant ces explications directes, qui ne craindrait pas de pénétrer le fond des choses, serait sans doute plus instructive, elle entraînerait une adhésion sympathique de l'esprit, tandis que la démonstration analytique n'aura que l'adhésion respectueuse, le respect dû au mystère. Il y a telle démonstration analytique d'un théorème de Mécanique qui est si peu suggestive, que l'esprit ne perdrait rien à la supprimer et à se borner à affirmer l'exactitude du théorème.

La démonstration analytique de la composition des vitesses est typique à cet égard. Elle n'apprend rien que la vérité du théorème. La démonstration mécanique est bien plus instructive ; il est vrai qu'elle présente un point délicat, qui exige certaines précautions.

Ne sait-on pas encore que les équations de Lagrange, où il suffit de connaître $2T$ et U, sont la planche de salut des candidats auxquels leur peu de compréhension des choses de la Mécanique ôte la sûreté nécessaire pour appliquer à propos quelques théorèmes des moments ou des forces vives.

L'Analyse se substitue ici à la Mécanique au point de permettre d'y traiter des problèmes sans la savoir.

C'est un tour de force dû à la puissance du génie de Lagrange ; personne pourtant n'oserait faire valoir que le calcul permette d'être ignorant.

L'oserait-on d'ailleurs qu'on ne pourrait dire tant mieux, car sans parler du calcul des forces de liaison qui sont un complément obligé des équations de Lagrange et qui exigent une pénétration plus profonde du sujet, il faut se souvenir qu'il y a tout un monde de questions de mécanique qui sortent du champ d'application de ces merveilleuses équations.

4. Ces questions, disons-le tout de suite, n'offrent aucun intérêt

pour ceux qui ne cherchent en Mécanique que des occasions de calculs plus ou moins élégants.

Ces questions sont en effet les plus vraiment mécaniques, elles ne sont pas toujours faciles à saisir, et c'est parce qu'elles sont inaccessibles à ceux qui n'ont connu la Mécanique qu'à travers le prisme du calcul, que les amis éclairés de la Mécanique souhaitent que celle-ci soit étudiée dès ses principes par des moyens plus intuitifs.

Alors que Poncelet s'était déjà illustré par de profondes recherches de Géométrie et avait donné là des preuves géniales de son pouvoir d'intuition, un ministre vint qui le chargea de créer le cours de Mécanique appliquée à Metz : « Puisque vous avez fait de la Géométrie, aurait-il dit à Poncelet, vous allez enseigner la Mécanique. » Cette phrase fut-elle vraiment prononcée, ou bien fut-elle inventée pour créer un motif artificiel à raillerie? Dans tous les cas, les railleurs furent peu avisés.

En fait, les grands analystes, Lagrange, Laplace, Poisson, avaient apporté à la Mécanique l'immortel concours de leurs méthodes de calcul. Ils avaient fait rendre à la Mécanique analytique tout ce qu'elle pouvait donner de leur temps. Or il restait à créer une Mécanique nouvelle, rebelle à ces méthodes et trop diversifiée pour ne l'être pas. Le novateur qui mettrait debout cette nouvelle Mécanique devrait y apporter de singulières qualités de tact, d'intuition, de synthèse, et c'est pourquoi ce fut une mesure des mieux raisonnées et, les faits l'ont prouvé, des plus heureuses, d'y désigner Poncelet, qui, par ses travaux en Géométrie, avait déjà manifesté si hautement les qualités d'esprit nécessaires.

C'est cette Mécanique, dont l'importance s'accroît chaque jour, qui est nécessaire au développement de la Science technique, Science dont le progrès est devenu une des conditions essentielles de la vie économique et même de la défense d'une nation. C'est pourquoi les éducateurs qui ont tout à la fois conscience de ces nécessités et de leurs devoirs, apportent quelque passion à briser les routines, à secouer les paresses, à confondre les ignorances.

5. C'est précisément ce qu'a fait M. John Perry dans l'Ouvrage remarquable que nous avons l'honneur de présenter aux lecteurs de ce *Bulletin*.

Nous déclarerons tout de suite que, malgré l'intérêt considérable de son Livre et la sympathie qu'il inspire, il ne nous paraît pas possible de nous associer entièrement à certaines manières de voir de l'auteur. Qu'on fasse des appels constants au concret, qu'on illustre ses explications par des expériences, qu'on fasse s'exercer et qu'on s'attache à développer l'intuition, qu'on réserve surtout au bon sens le rôle qui lui convient et qu'on assoie sur des bases tout à la fois solides et souples les facultés et les moyens de jugement, rien de mieux, si l'on y adjoint surtout la guerre aux abstractions inutiles, à la logistique pointue, aux calculs creux. Mais gardons-nous soigneusement de cet écueil opposé, le culte de l'à peu près. « Malheur au vague, a dit Ernest Renan, mieux vaut le faux. »

Il faut observer que l'exactitude et la précision sont encore plus nécessaires au technicien qu'au théoricien. Si ce dernier poursuit en effet la recherche d'une formule algébrique, une erreur de signe qui s'y glisserait, ultérieurement réparable, peut ne pas modifier sensiblement le résultat, en sorte que la priorité de la formule reste tout de même à l'auteur. De ce fait on pourrait citer des exemples nombreux. Au technicien, au contraire, qui a besoin d'un résultat numérique, la moindre erreur occasionnera un résultat absolument sans valeur.

Nous pensons du reste qu'un souci suffisant de précision n'est pas incompatible avec les idées essentielles de l'auteur. L'exercice de l'intuition, même rapide, n'exclut pas la précision et la rigueur. On peut même affirmer que l'intuition s'exerce avec d'autant plus d'aisance et de souplesse que sa marche aura été rendue plus sûre par des habitudes de précision.

C'est justement en raison de cette précision nécessaire, mais qu'il faut pratiquer avec tact, que la Mécanique ne doit pas cesser d'être une branche des Mathématiques et que son enseignement doit être donné par des mathématiciens. Seulement il faut que ceux-ci répudient la logistique inutile et renoncent à chercher dans l'Algèbre un refuge commode où, sous couleur de faciliter la précision, qui, dieu merci ! peut être réalisée hors de l'Algèbre, ils noient la Mécanique dans le calcul.

6. Un autre reproche qu'on ne manquera pas d'adresser au

Livre de M. John Perry, c'est qu'on n'y retrouve pas cet ordre didactique auquel notre dogmatisme est accoutumé. Il est clair que, pour l'auteur, un ordre logique est en soi artificiel et que s'attarder à une définition en forme de choses que l'on comprend par intuition est une perte de temps. De même, un théorème dont on comprend les termes et dont on peut vérifier l'énoncé par ses conséquences expérimentales peut être aussi solidement assis dans l'esprit que si l'on en avait produit une démonstration logiquement irréprochable, mais pénible et peu instructive.

Et pour conclure : après que tant de logiciens à l'esprit aigu nous ont donné de consciencieux Traités où la logique règne en maîtresse, mais où le côté réel de la Mécanique est parfois si travesti, pourquoi trouverait-on mauvais qu'un intuitif vienne à son tour donner un autre genre de livre, où le bon sens remplace le logicisme et où les faits mécaniques soient présentés en liberté. Il est hors de doute que la vérité est entre les deux. Mais pour connaître ce juste milieu, il fallait qu'un Livre comme celui-ci fût écrit, qui marquât avec vigueur et autorité l'autre extrême.

Ce but étant admis, personne ne se refusera à reconnaître le grand talent que M. John Perry a mis dans son œuvre, et la constance soutenue avec laquelle il a conduit jusqu'au bout sa pensée. Il faut admirer la vie qu'il a su donner, avec leurs diversifications si variées, aux concepts et aux lois de la Mécanique. Ceux qui jusqu'ici ne les ont connus que dans la forme sèche et aride qui suffit pour les rendre aptes au calcul, ne manqueront pas d'être agréablement surpris. Si l'on me passe une image que je crois exacte, ils verront vivre des personnages dont ils ne connaissaient encore que les photographies.

D'ailleurs, comme nous sommes pénétré du désir d'appuyer nos assertions sur des preuves concrètes, nous invitons le lecteur à parcourir rapidement les chapitres de l'Ouvrage pour y recueillir les exemples les plus caractéristiques et les plus probants.

7. Chapitre I. — *Introduction.* — L'auteur y donne des indications générales concernant les connaissances préalables que doivent posséder les élèves pour suivre utilement ces leçons et l'esprit même qu'ils doivent y apporter. Habitude des exercices numériques et graphiques, usage du papier à dessin quadrillé. Ne

jamais se contenter de savoir comment on fait les choses ou d'en avoir entendu parler, mais les faire effectivement soi-même. Usage des planimètres, usage des Tables de logarithmes. Citons à ce propos la phrase suivante de l'auteur dont on appréciera la saveur : « Un professeur éminent a déclaré qu'on ne doit pas permettre à un élève d'employer les logarithmes avant qu'il n'eût appris à les calculer ; il n'a pas dit que l'élève ne devait se servir d'une montre ni porter un habit, tant qu'il ne serait pas capable de les confectionner lui-même. »

Dans le choix des exercices, M. Perry préconise de s'attacher non à des thèmes artificiels, mais exclusivement à des thèmes ayant une valeur pratique réelle, tels que dilatations linéaires ou cubiques, mesures d'étendues géométriques, surfaces ou volumes, calculs sur les poids, sur les vitesses. Du reste les pages du Livre fourmillent d'exercices choisis avec un merveilleux à propos. Ils constituent pour nos jeunes professeurs une mine précieuse où ils pourront s'alimenter.

Dans ce premier Chapitre, l'auteur rappelle, en s'attachant surtout à montrer leur valeur pratique, les notions de dérivée, qu'il rattache à la notion de vitesse, de quadrature, qu'il rattache à la mesure des aires, à propos desquelles il donne une méthode de calcul approché au moyen de trapèzes.

La dérivée seconde lui est une occasion de parler de la courbure et il ne manque pas d'indiquer que la dérivée seconde représente avec assez d'approximation celle-ci lorsque la courbe s'écarte peu d'une horizontale, comme dans le problème des poutres.

On sait qu'on a fondé sur des considérations théoriques la construction de la courbure d'une ligne fournie par un tracé dont la loi géométrique n'est pas connue. M. Perry signale très judicieusement que les constructions de ce genre ne peuvent avoir aucune valeur pratique.

CHAPITRE II. — *Vecteurs, mouvement relatif.* — Les vecteurs sont naturellement ici des forces ou des vitesses.

Le parallélogramme des forces est énoncé comme un principe qu'on peut vérifier expérimentalement. De même le parallélogramme des vitesses est *expliqué* sur des cas particuliers, mais *non démontré* en forme. En revanche, les exemples donnés sont dépourvus de banalité, on y trouve successivement proposés le

calcul de la vitesse d'une molécule d'eau dans une pompe centrifuge, les relations de vitesse dans divers mécanismes, trains épicycloïdaux, paradoxe de Fergusson, etc. Il est clair que la succession de ces exemples est tout à fait contraire à l'ordre logique auquel nous sommes accoutumés; mais nous avons prévenu déjà le lecteur à ce sujet.

Chapitre III. — *Travail et énergie.* — Ce Chapitre est à notre sens un des plus intéressants de l'Ouvrage; il a trait en effet à des notions essentielles et M. Perry les présente sous des formes vivantes et cependant fort nettes, qui contrastent avec la sécheresse des représentations mathématiques.

Il a soin dès le début d'établir une distinction entre le travail utilement dépensé et le travail dissipé, c'est-à-dire transformé en chaleur. « La puissance, dit-il, est la vitesse de production du travail ». Le travail de la pression dans un cylindre de machine à vapeur et le calcul de la puissance d'une telle machine lui offrent un exemple excellent de ces notions. Il lui suffit de connaître la surface du piston, la longueur de la manivelle, le nombre de tours-minute et la pression moyenne. Il saisit même l'occasion pour faire connaître en quelques lignes comment l'indicateur de Watt fournit cette dernière, en appliquant un planimètre à la mesure du diagramme.

L'énergie est le pouvoir de produire du travail. Elle peut être de deux ordres, ou bien cinétique ou bien potentielle. Ces deux sortes d'énergie peuvent se transformer l'une dans l'autre. L'auteur ne manque pas de fournir des exemples topiques de cette transformation.

Mais ce qu'il y a d'intéressant, ce sont les diverses formes que peut recevoir l'énergie potentielle, qui s'appelle uniformément — U en mathématiques. Cette énergie peut dépendre de la position d'un corps, comme un poids qui est à une certaine hauteur; elle peut aussi dépendre de la forme du corps supposé déformable et élastique; et la résilienne d'un corps déformable est le maximum d'énergie de déformation qu'un tel corps peut emmagasiner sans cesser d'être élastique.

Le fait qu'au cours de la transformation de l'énergie potentielle en énergie cinétique il y a dissipation d'énergie, prouve l'existence

dans le corps élastique d'un frottement intérieur (*viscosité*) producteur de travail dissipé.

L'équivalence de la chaleur et du travail permet de parler de la provision possible d'énergie dans un poids donné de charbon, de gaz ou d'essence; mentionnons encore des applications de la notion d'énergie à la bicyclette, au travail des métaux, aux transmissions hydrauliques, à la propulsion des navires.

Le fait que des exemples si variés peuvent être traités, en quelques lignes d'explication et en toute clarté, donne une idée de la virtuosité et de la souplesse des méthodes de l'auteur.

Chapitre IV. — *Frottement.* — C'est une caractéristique de la Mécanique dogmatique, que le frottement n'y apparaît qu'au second plan. Il s'impose partout dans la réalité. Pour le mettre en évidence M. Perry part du principe de l'indestructibilité de l'énergie; en vertu de ce principe, si de l'énergie semble disparaître quelque part, c'est qu'il y a eu production de travail dissipé. L'auteur fait voir comment des représentations graphiques permettent d'analyser étroitement ces phénomènes délicats et de mettre en évidence les lois du frottement. Il traite, à titre d'exemple, du frottement dans les coussinets des arbres et montre comment on peut se rendre compte du rôle comparé du frottement dans divers mécanismes : parallélogramme de Watt, glissières rectilignes, paliers à billes, roues-support, etc. Toutes ces discussions, qui ne mettent en œuvre que des moyens mathématiques élémentaires, constituent pour les élèves un apprentissage excellent d'analyse mécanique.

Chapitre V. — *Rendement.* — Ce Chapitre est un complément des deux précédents : l'auteur ne manque pas de présenter comme exemple le rapport entre la puissance disponible ou puissance au frein et la puissance indiquée, rapport habituellement dénommé le rendement organique.

Chapitre VI. — *Machines simples.* — Signalons la part faite par M. Perry au rôle du frottement dans les machines simples et, entre autres, les conséquences qui en résultent pour la non-réversibilité du système Vis. On se rendra compte dans ce Chapitre que, le cas échéant, l'auteur ne néglige pas d'appeler à son aide le calcul. Signalons encore l'étude des articulations où s'exerce un frottement et le calcul de l'effort exercé par un tourillon sur le coussinet.

Chapitre VII. — *Méthodes analytiques et méthodes graphiques.*

Chapitre VIII. — *Applications de la Statique graphique.* — Exposé des principes essentiels de la Statique graphique, polygone des forces, polygone funiculaire, applications nombreuses; distribution des efforts sur une grue, dans une ferme, dans un comble; exposition de la méthode des sections; chaîne articulée; pont suspendu; arcs, avec diverses hypothèses sur le mode d'application des charges; culées.

Il faut signaler à la fin du Chapitre VII un intéressant Appendice dû à M. J. Harrison du *Royal College of Science*, intitulé : *Forces dans l'espace et constructions réticulées à trois dimensions*, dont l'objet est d'étendre au cas de l'espace les procédés de la statique graphique dans le plan. La méthode consiste à faire usage des moyens de la Géométrie descriptive pour représenter les forces dans l'espace.

Chapitre IX. — *Machines hydrauliques.* — Presse hydraulique, ses usages variés et notamment son utilité pour produire de grands efforts comme dans les machines d'essais, vérins hydrauliques, pompes, machines à eau sous pression, grues hydrauliques, élévateurs et monte-charges, etc. C'est sur les machines elles-mêmes que l'auteur explique les principes de la mécanique des liquides; cependant il ne néglige pas telles questions générales susceptibles d'applications immédiates, comme action d'un liquide sur une paroi, équilibre des fluides animés d'un mouvement de rotation d'ensemble, etc.

Chapitre X. — *Généralités sur les machines.* — M. Perry se place d'abord au point de vue de la Cinématique et envisage les rapports de vitesse entre deux arbres connectés par une courroie, entre deux arbres reliés par un engrenage constitué soit au moyen de roues dentées, soit au moyen de profils hélicoïdaux (vis sans fin).

L'auteur indique comment, dans des cas où les Mathématiques fourniraient une solution compliquée, on peut y obvier en effectuant certains dessins schématiques (exemple : mouvement de la bielle et manivelle ou de l'excentrique).

Conditions dans lesquelles un arbre transmet la puissance, phénomènes de torsion auquel il est soumis; son utilisation comme

procédé dynamométrique (dynamomètre d'Ayrton et Perry) : question analogue sur les courroies : rôle du frottement et inconvénient du glissement; utilité de plusieurs tours de corde.

Dynamomètres de transmission et dynamomètres d'absorption, freins, etc.

Chapitre XI. — *Énergie cinétique.* — Nous revenons avec ce Chapitre aux questions de Mécanique générale; d'abord un retour sur le théorème des forces vives et la transformation l'une dans l'autre de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle; l'auteur fait voir comment la machine d'Atwood permet de les vérifier. Retenons encore l'étude de l'action du volant en tant que réservoir d'énergie cinétique.

Dans ce même Chapitre, il étudie aussi les quantités de mouvement et leur rôle dans les problèmes de chocs.

Les quatre derniers Chapitres traitent les questions qui concernent la résistance des matériaux : XII. *Matériaux de construction.* — XIII. *Extension et compression.* — XIV. *Cisaillement et tension.* — XV. *Théorie plus difficile.*

Sous ce titre modeste, le dernier Chapitre représente en raccourci la théorie de l'Élasticité. Entre autres questions traitées nous citerons le théorème de réciprocité de Betti, la déformation de l'enveloppe cylindrique, celle d'un cylindre plein animé d'une rotation uniforme autour de son axe, le cas d'un disque d'épaisseur variable; la torsion des prismes; l'enveloppe sphérique; la flexion uniforme et non uniforme d'un prisme. L'auteur insiste sur les applications pratiques du problème de Saint-Venant. Il traite aussi le problème du plan indéfini.

Comme on le voit, ce premier Volume constitue un ensemble des plus touffus qui vaudrait déjà par la richesse des matériaux, mais dont l'originalité de la méthode et la vie que M. Perry donne à l'exposition accroissent grandement la valeur.

M. Davaux, technicien lui-même des plus distingués, qui nous a déjà donné la traduction d'importants Ouvrages scientifiques, entre autres de la célèbre *Physique* de Chwolson, a fait du Livre de M. John Perry une traduction fidèle qui rend avec exactitude les tours de pensée parfois si originaux de l'auteur anglais. Notre éditeur scientifiqne français M. Hermann a apporté à l'édition du

Volume ses soins les plus éclairés Nous mentionnerons que le texte est en deux caractères, les plus fins s'appliquant aux matières plus dificiles et que seuls peuvent s'assimiler les élèves d'une instruction déjà avancée (1). G. Koenigs.

PICARD (Émile). — L'Histoire des Sciences et les prétentions de la Science allemande. (*Pour la Vérité.* Etudes publiées sous le patronage des Secrétaires perpétuels des cinq Académies.) 1 vol. in-16, 49 pages, Paris, Perrin et Cie, 1916.

Il n'est, à l'heure présente, aucun ordre de la connaissance humaine, où la race germanique ne proclame bien haut sa supériorité. Dans les Sciences, cette prétention est aujourd'hui plus manifeste que jamais : s'il faut en croire les savants d'Outre-Rhin, c'est en Allemagne qu'ont paru les inventions les plus neuves et les créations scientifiques les plus fécondes. Ceux qui voudront se convaincre de la vanité de telles assertions liront avec fruit l'étude décisive publiée sur cette question par M. Émile Picard. Ils y trouveront, en quelques pages de stricte impartialité, un historique où justice est faite des prétentions monstrueuses de la Science allemande, et une analyse profonde, qui en démêle les causes. Ils y apprendront à connaître la mentalité propre à la plupart des savants d'Outre-Rhin, et les traits essentiels qui, dans l'ensemble, les distinguent des intellectuels des autres pays. Ils verront enfin qu'en dépit du développement gigantesque de son industrie, l'Allemagne, dans le domaine des applications et des

(1) Dans le principe, le Volume devait se terminer par un Appendice de MM. François et Eugène Cosserat sur la mécanique des corps déformables. La mort imprévue de M. François Cosserat n'a pas malheureusement permis de suivre le plan primitif de l'Ouvrage. Le monde savant le regrettera, car les travaux sur la théorie des corps déformables faits par M. F. Cosserat en collaboration avec son frère, M. Eugène Cosserat, dateront dans l'évolution de cette importante et difficile branche de la Science. Technicien très averti autant que fin mathématicien, M. F. Cosserat possédait les plus précieux moyens pour contribuer à parachever l'œuvre de nos savants français, Lamé, Barré de Saint-Venant, Boussinesq. Son esprit critique très aiguisé s'exerçait avec une maîtrise très sûre sur ces questions délicates où l'ingénieur réclame d'un côté le droit d'approximer, tandis que le mathémacien aperçoit des raisons de discontinuité qui rendent parfois précaires les bases mêmes de l'approximation. G. K.

inventions, n'a pas témoigné davantage d'une originalité qui la place au-dessus des autres nations.

Nous ne pouvons faire une analyse de ces pages très condensées. Bornons-nous à signaler quelques points. Dans le Chapitre II, M. Picard insiste sur la prodigieuse incapacité des auteurs allemands à mettre en lumière les idées essentielles; ils traitent, en général, avec la même ampleur les détails accessoires et les points importants : « Avec quel plaisir, dit M. Picard, on revient, après la lecture d'un texte scientifique allemand, à un Mémoire clair et lumineux de Lagrange, à un Livre de J.-B. Dumas ou de Claude Bernard. » Et un peu plus loin : « Ce défaut dans l'estimation de la valeur scientifique a conduit à apprécier la quantité aux dépens de la qualité, et, l'Allemagne étant sans conteste le pays où les presses scientifiques travaillent le plus, la Science allemande s'est estimée *au-dessus de tout.* »

M. Picard insiste aussi sur ce que, pour les Allemands, la difficulté à juger de l'importance réelle des problèmes fait parfois attacher un grand prix à des questions purement formelles sans intérêt pour le fond. « Par un simple changement de forme, dit-il, ou une légère modification expérimentale, on croit faire une grande découverte. » Et encore : « La manie de ratiociner et de rendre obscures les choses claires est une des caractéristiques du pédantisme germanique. »

Dans le troisième Chapitre, M. Picard se demande s'il n'y aurait pas quelque différence entre la mentalité moyenne de l'homme de science en Allemagne et dans la plupart des autres pays. Cette différence lui paraît réelle, et elle est d'ordre philosophique. Selon M. Picard, les tendances formalistes de la Science allemande peuvent être rattachées au subjectivisme des doctrines kantiennes et de celles qui en sont plus ou moins directement issues. Il compare la mentalité de l'homme de science qui, se fiant avec Descartes au sens commun, croit savoir et étudier le réel, à celle du disciple de Kant et de ses successeurs qui ne voient les choses qu'à travers des formes ou des catégories plus ou moins arbitraires. Il signale à ce sujet les erreurs de Kant touchant les principes de la Géométrie, et il rend ici justice à Gauss qui a depuis longtemps combattu les vues de Kant sur l'espace. Citons encore le passage suivant : « Dans les sciences, l'esprit d'invention ne se trouve guère dans le

grand magasin des principes logiques et métaphysiques.... L'esprit d'invention sait s'écarter à propos de la voie des déductions logiques; il exige une aptitude à saisir des rapprochements entre diverses catégories de faits et demande un sens aigu du réel qui n'a rien à voir avec une réalité que l'on prétend construire soi-même. »

Il est superflu de dire ici le chaleureux accueil que l'Opuscule de M. Emile Picard a déjà trouvé près du public de France et des Nations alliées. Mais quelle action n'aura-t-il pas dans les Pays neutres sur ceux qui pensent? Alors que l'Allemagne, passionnée d'accroître son prestige dans le monde, ne recule devant aucun moyen pour y faire valoir ses productions de toute nature, et discréditer celles de ses concurrents, il était urgent qu'un de nos Maîtres les plus éminents vînt rétablir la vérité, mettre en lumière la disproportion entre ce que la race germanique a découvert dans les sciences et « le rôle qu'elle prétend jouer dans le monde ».

Georges Bouligand.

MÉLANGES.

ÉTUDE SUR LE MOUVEMENT D'UNE DROITE MOBILE DONT TROIS POINTS DÉCRIVENT LES TROIS FACES D'UN ANGLE TRIÈDRE ;

Par M. Gaston DARBOUX.

XII.

Tous les cas particuliers que nous venons d'examiner se présentent-ils lorsqu'on part, comme nous l'avons fait dans cette étude, des ellipsoïdes les plus généraux? Pour répondre à cette question, il suffit de se servir des relations (36), (37), (40), (41).

Prenons arbitrairement un plan directeur, correspondant à

l'abscisse ρ. Il devra satisfaire à l'équation

(75) $$(a^2 - \rho^2)m^2 + (b^2 - \rho^2)n^2 + (c^2 - \rho^2)p^2 = 0.$$

Supposons que nous voulions que le plan (P′) correspondant à l'abscisse ρ' se confonde avec le premier, il faudra faire

$$\rho' = \rho,$$

et, par conséquent,

(76) $$\rho'' = \frac{ab}{\rho^2}.$$

Alors, les systèmes (30) et (40) nous donneront les deux équations

$$mx'' + ny'' + pz'' = 0,$$

$$x''^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\rho''^2}\right) + y''^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\rho''^2}\right) + z''^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\rho''^2}\right) = 0,$$

qui feront connaître un double système de valeurs pour x'', y'', z''; nous aurons ensuite x', y', z' par les relations

$$mx' + ny' + pz' = 0,$$

$$x'x''\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\rho'\rho''}\right) + y'y''\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\rho'\rho''}\right) + z'z''\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\rho'\rho''}\right) = 0,$$

puis m'', n'', p'' par les suivantes :

$$m''x' + n''y' + p''z' = 0,$$

$$(a^2 - \rho\rho'')mm'' + (b^2 - \rho\rho'')nn'' + (c^2 - \rho\rho'')pp'' = 0.$$

Tout sera connu, les plans et les arêtes du tétraèdre limite formé par les trois plans directeurs dont deux seront confondus.

Le cas de la racine triple est encore plus simple, puisque alors on a

(77) $$\rho = \rho' = \rho'' = \sqrt[3]{abc}.$$

Le plan directeur triple satisfera à l'unique condition

$$m^2(a^2 - \rho^2) + n^2(b^2 - \rho^2) + p^2(c^2 - \rho^2) = 0,$$

et les trois arêtes du trièdre se réduiront à une seule droite, qui sera définie par le système

$$mx + ny + pz = 0,$$

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) = 0,$$

ρ ayant bien entendu la valeur donnée par la formule (77).

Le seul cas vraiment intéressant à signaler est celui où tous les mineurs de ∇ sont nuls et où, par conséquent, la droite mobile (d) a l'une de ses extrémités sur une droite (δ) et l'autre dans un plan (P). Traitons-le par la Géométrie. Nous savons qu'alors (P) sera un plan cyclique de l'ellipsoïde (E). Il coupera donc cet ellipsoïde suivant un cercle de rayon égal à b, b étant l'axe moyen de (E). Quand le point de la droite mobile (d) qui décrit (δ) viendra au centre de (E), l'autre extrémité de (d) décrira dans le plan (P) le cercle de rayon b. Il faut donc que l'abscisse double à porter sur (d) à partir du point M qui décrit (E) soit égale à $\pm b$. Comme le produit des trois abscisses est égal à $-abc$, la troisième aura pour valeur

$$\rho = -\frac{ac}{b}. \tag{78}$$

Et en effet, nous savons que, si l'on prend comme position de la droite mobile la perpendiculaire abaissée sur le plan cyclique (P) du point μ où le plan tangent à l'ellipsoïde est parallèle à (P), cette perpendiculaire a pour valeur absolue $\frac{ac}{b}$. En appliquant la construction géométrique donnée au n° VII, on sera donc conduit à la construction suivante :

Du point μ, *qui est un ombilic, on abaissera la perpendiculaire sur le plan cyclique* (P) *qui est parallèle au plan tangent en* μ. *Sur cette perpendiculaire on portera, à partir du point* μ *et dans les deux sens, des longueurs* $\mu\mu'$, $\mu\mu''$ *égales à* b, *et l'on joindra les deux points* μ', μ'' *au centre* O *de* (E). *Les deux droites* $O\mu'$, $O\mu''$ *pourront être associées, l'une ou l'autre, au plan* (P) *pour fournir un des modes de génération cherchés. C'est-à-dire que l'ellipsoïde* (E) *pourra être décrit par un point de la droite de longueur* $b \pm \frac{ac}{b}$ *dont les extrémités s'appuient sur* (P) *et sur l'une ou l'autre des droites* $O\mu'$, $O\mu''$.

Si, par exemple, on a porté, à partir du point μ, la longueur b dans le même sens que $\frac{ac}{b}$, ce qui donnera le point μ', la longueur de la droite sera la valeur absolue de $\frac{ac}{b} - b$.

Cette construction deviendra donc *illusoire* si l'on a

$$b = \frac{ac}{b}, \qquad b^2 = ac.$$

Car alors la droite $O\mu'$ se trouvera dans le plan (P). Mais dans cette hypothèse, l'équation en ρ a une racine triple puisqu'on a

$$b = \sqrt[3]{abc},$$

et l'on retombe sur un cas particulier déjà signalé au numéro précédent.

Nous ferons remarquer, et ce résultat sera expliqué plus loin, qu'on passe d'une des deux constructions indiquées plus haut à l'autre en prenant la symétrique de la droite mobile par rapport à la perpendiculaire menée par le point décrivant M au plan (P).

Il résulte de ce qui précède qu'il existe quatre modes de description de l'ellipsoïde par un point d'une droite de longueur constante dont l'une des extrémités s'appuie sur un plan (P), tandis que l'autre décrit une droite (δ). Ces quatre modes sont étroitement liés les uns aux autres. D'abord il est évident, d'après ce qui précède, qu'ils n'employent pas quatre plans (P) distincts, mais *deux* seulement, puisque ces plans (P) doivent être des plans cycliques de l'ellipsoïde. On verra aisément que, de même, il n'y a pas quatre droites (δ) distinctes, mais deux seulement, que l'on construira de la manière suivante :

Sur la normale en un ombilic réel μ, *on portera de part et d'autre deux longueurs* $\mu\mu'$, $\mu\mu''$ *égales à l'axe moyen* b. *Les droites que l'on obtient en joignant les points* μ', μ'' *au centre* O *de l'ellipsoïde sont celles qu'il faut associer à chacun des deux plans cycliques pour obtenir les quatre modes de description que nous venons de définir. Elles jouissent des propriétés suivantes. La plus grande* $O\mu$ *est égale à* $a+c$, *la plus petite* $O\mu'$ *à* $a-c$, *et elles sont placées symétriquement par rapport au grand et au petit axe de l'ellipsoïde.*

On peut encore énoncer le théorème suivant :

Étant données deux droites qui se coupent, OE, OE′, *on mène dans le plan de ces droites des parallèles à une direction fixe.*

Soient m, m', les points où une de ces parallèles coupe les droites OE, OE'; *si, de ces points comme centres, on décrit des sphères de rayon constant b, leur cercle d'intersection engendrera un ellipsoïde de centre* O *dont l'axe moyen sera égal à b. Pour achever de construire cet ellipsoïde on prendra la droite mm' dans la position $\mu\mu'$ où elle est le plus éloignée de* O *et par conséquent égale à $2b$. Le grand axe de l'ellipsoïde sera la bissectrice de l'angle $\mu O \mu'$, le petit axe sera la bissectrice extérieure du même angle et, par conséquent, l'axe moyen sera la perpendiculaire menée par* O *au plan $\mu O \mu'$. La plus grande des droites $O\mu$, $O\mu'$ sera égale à $a+c$, la plus petite à $a-c$, a et c étant respectivement le plus grand et le plus petit axe de l'ellipsoïde. En sorte que l'ellipsoïde décrit sera défini en grandeur et en position. L'un de ses plans cycliques sera d'ailleurs perpendiculaire à la droite $\mu\mu'$, l'autre sera perpendiculaire à la droite qui est antiparallèle à $\mu\mu'$ par rapport à l'angle* EOE'. *Les deux droites* OE, OE' *sont celles qu'il faut associer à l'un des plans cycliques pour obtenir l'un des quatre modes de description que nous avons définis plus haut.*

Cette proposition conduit à un mode de génération de l'ellipsoïde qu'il est aisé de réaliser. Imaginons un compas à branches égales dont les pointes seraient placées respectivement en m et en m'. Si la droite mm' est maintenue parallèle à une direction fixe, la tête du compas décrira l'ellipsoïde le plus général dont l'axe moyen soit égal à la longueur commune des branches du compas.

On imaginera aisément des dispositions très simples permettant de maintenir invariable la direction mm'. On peut, par exemple, faire glisser la droite mm' dans une gaine de longueur donnée dont une des extrémités placées en m décrira la droite OE, tandis que l'autre sera assujettie à rester sur une parallèle à OE, située dans le plan EOE'.

XIII.

Nous terminerons cette étude par des applications de notre proposition fondamentale. Cette proposition peut s'énoncer comme il suit :

Pour obtenir tous les modes de génération d'un ellipsoïde donné (E), *il suffit de prendre une de ses droites principales* (D), *c'est-à-dire une des arêtes de l'angle tétraèdre* (U) *relatif à chaque point* M *de la surface, et de lui imprimer une rotation de grandeur déterminée autour d'un axe de direction invariable passant par le point* M *qui décrit l'ellipsoïde.*

D'après cela, si l'on veut obtenir deux générations différentes de l'ellipsoïde (E), il faudra imprimer à la droite (D) deux rotations différentes déterminées, ce qui donnera deux droites différentes (d), (d') passant par M. Or, il est clair qu'on peut passer de (d') à (d) par la rotation déterminée qui amène (d') en (D), puis par la rotation qui amène (D) en (d). La composition de ces deux rotations donne évidemment une rotation de grandeur déterminée autour d'un axe de direction invariable. Ainsi :

Quand on a obtenu un des modes de description de l'ellipsoïde (E), *à l'aide d'une droite mobile* (d), *on obtient tous les autres en soumettant cette droite mobile à une rotation quelconque de grandeur déterminée autour d'un axe passant par le point* M *et parallèle à un axe fixe.*

D'après cela, nous voyons que, lorsqu'on aura obtenu une génération quelconque de l'ellipsoïde (E), on pourra faire pivoter les droites mobiles (d) à l'aide desquelles il est décrit, non plus seulement autour du point M, mais autour d'un point fixe quelconque de la droite (d), et l'on aura ainsi des droites invariables dont tous les points décriront des ellipsoïdes. Il est vrai que la démonstration ne s'étend pas au cas où le point fixe de la droite (d) se trouve dans un des plans directeurs. Mais ce cas particulier s'obtient évidemment par le passage à la limite. Ainsi :

Lorsque trois points d'une droite sont assujettis à décrire trois plans, on peut imprimer à la droite une rotation autour du point où elle rencontre l'un de ces plans, cette rotation ayant une grandeur et un sens déterminés, tous les points de la droite dans sa nouvelle position ne cesseront pas de décrire des ellipsoïdes.

Comme conséquence des résultats précédents, on obtient le théorème suivant ;

Si l'on imprime à la droite principale (D) *deux rotations différentes autour du point* M *qui décrit l'ellipsoïde* (E) *de manière à obtenir deux descriptions de cet ellipsoïde par deux droites* (d), (d') *se coupant en* M, *le plan formé par ces deux droites jouira de la propriété suivante :*

Si l'on rapporte ses points au système d'axes coordonnés formé par les droites (d), (d') *dont l'angle est d'ailleurs variable, tout point de coordonnées fixes par rapport à ces axes décrira un ellipsoïde pour lequel on connaîtra deux modes de génération déterminés par les parallèles qu'on peut mener de ce point, respectivement à* (d) *et à* (d').

Le plan que nous venons de considérer peut être réalisé matériellement à l'aide de parallélogrammes articulés dont les côtés seront parallèles aux droites (d) et (d'). Si les articulations ne sont pas planes, il suffira de prendre deux droites parallèles à (d), par exemple, puis une parallèle à (d') et d'articuler toutes ces droites autour de leurs points d'intersection.

Les points du plan qui décrivent des plans seront, en général, sur une courbe du troisième ordre.

En continuant de cette manière, et en prenant trois modes de description de (E), on déterminera dans l'espace un réseau de parallélépipèdes articulés. Plus généralement, on aura tous les modes de description correspondants aux formules

$$(79) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a x_1 + \sum_1^n \rho_i(\alpha_i x_1 + \alpha'_i y_1 + \alpha''_i z_1), \\ y &= b y_1 + \sum_1^n \rho_i(\beta_i x_1 + \beta'_i y_1 + \beta''_i z_1), \\ z &= c z_1 + \sum_1^n \rho_i(\gamma_i x_1 + \gamma'_i y_1 + \gamma''_i z_1), \end{aligned} \right.$$

les ρ_i étant des constantes et les α_i, β_i, ... étant les coefficients de diverses substitutions orthogonales au déterminant *un*.

XIV.

Par exemple, si l'on passe de la droite principale aux trois autres arêtes de l'angle tétraèdre (U) on a les formules

$$(80)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_1(a+\rho-\rho_1-\rho_2),\\ y &= y_1(b-\rho+\rho_1-\rho_2),\\ z &= z_1(c-\rho-\rho_1+\rho_2),\end{aligned}\right.$$

dont nous allons faire une étude détaillée.

ρ, ρ_1, ρ_2 sont les coordonnées du point considéré de l'espace par rapport au système d'axes coordonnés formé par les trois arêtes qui ont été choisies de l'angle tétraèdre (U). En soumettant ces coordonnées à des conditions simples, on pourra faire décrire au point, soit un des plans principaux, soit un des axes, soit même le rendre fixe. Par exemple, le point dont les coordonnées sont

$$\rho = \frac{b+c}{2}, \qquad \rho_1 = \frac{a+c}{2}, \qquad \rho_2 = \frac{a+b}{2},$$

demeurera fixe quand le point M décrira l'ellipsoïde (E). Ceci nous suggère une construction dans laquelle nous emploierons des systèmes articulés.

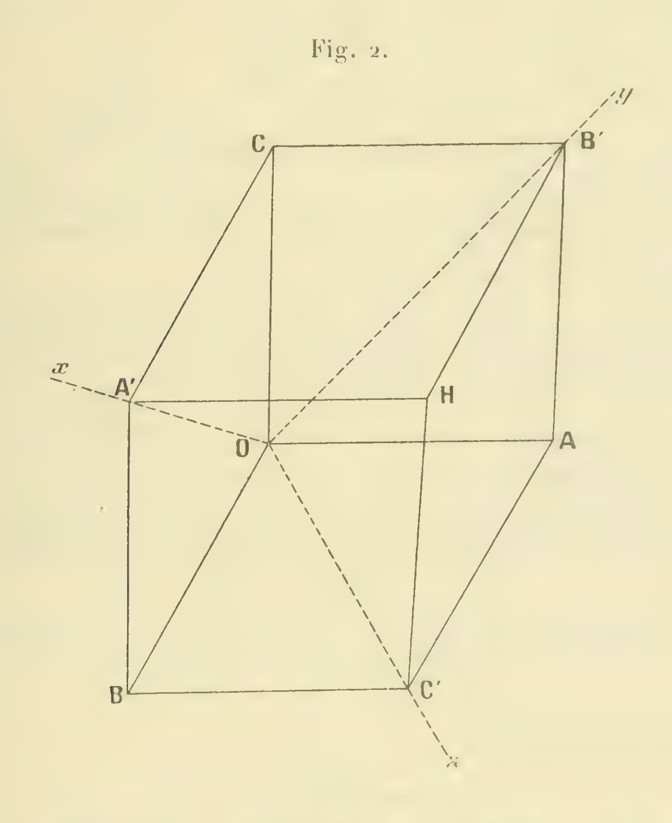
Nous commencerons par quelques remarques préliminaires.

Considérons (*fig.* 2) un parallélépipède OABCA'B'C'H dont toutes les arêtes sont articulées sphériquement autour de leurs points communs. Il ne faut pas croire que, dans toutes ses déformations, cette figure demeure un parallélépipède. Par exemple, les quatre points OBA'C ne demeureront pas nécessairement dans un même plan. Pour que le parallélépipède conserve sa définition, il faut ajouter trois conditions nouvelles; par exemple, relier deux points situés respectivement sur CA' et OB à la même distance fixe de C et de O par une tige égale à OC, et opérer de même pour les faces OBC'A, OAB'C. Alors ces trois faces ne cesseront pas d'être des parallélogrammes, et il en sera de même de celles qui se croisent en H. *Dans toutes ses déformations, le parallélépipède ne cessera pas d'être un parallélépipède*, et sa forme ne dépendra plus que de la valeur des trois angles que forment en O

les arêtes OA, OB, OC, c'est-à-dire de *trois paramètres distincts.*

Supposons maintenant que les arêtes du parallélépipède soient toutes égales. Si l'on considère les diagonales des OA′, OB′, OC′ qui sont alors les bissectrices des angles BOC, COA, AOB, *deux de ces diagonales ne peuvent être rectangulaires sans être en*

Fig. 2.



même temps perpendiculaires à la troisième et, de plus, la diagonale OH *du parallélépipède devient alors égale aux arêtes.*

Le lecteur démontrera sans peine ces propositions, qui sont tout à fait élémentaires. Pour que le parallélépipède jouisse de la propriété indiquée, il faut et il suffit que la somme des cosinus des trois angles BOC, COA, AOB soit égale à — 1.

Il suit de là que, si l'on assujettit les trois droites OA′, OB′, OC′ à former un trièdre trirectangle, *la forme du parallélépipède dépendra alors de deux variables.*

D'après cela, si l'on place le parallélépipède de telle manière que l'un de ses sommets soit à l'origine des coordonnées O, les sommets A, B, C, opposés à O dans les trois faces, étant assujettis à demeurer respectivement sur les axes rectangulaires des x, des y, des z, ce rhomboèdre jouira encore de deux degrés de liberté

et le sommet H opposé à O décrira toute une sphère de rayon égal à l'arête du rhomboèdre.

C'est ce que confirme le calcul suivant.

Supposons l'arête du rhomboèdre égale à l'unité, et désignons par

$$\begin{matrix} A, & B, & C, \\ A_1, & B_1, & C_1, \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{matrix}$$

respectivement les projections des arêtes OA, OB, OC passant par O sur Ox, Oy, Oz.

En exprimant que Ox, Oy, Oz sont les diagonales des faces, nous aurons les conditions

$$(81) \qquad \left\{ \begin{matrix} B_1 + B_2 = 0, & C_2 + C = 0, & A + A_1 = 0, \\ C_1 + C_2 = 0, & A_2 + A = 0, & B + B_1 = 0. \end{matrix} \right.$$

Posons

$$(82) \qquad A = -x_1, \qquad B_1 = -y_1, \qquad C_2 = -z_1.$$

Il viendra, pour les projections de OA, OB, OC, les expressions

$$(83) \qquad \left\{ \begin{matrix} -x_1, & y_1, & z_1, \\ x_1, & -y_1, & z_1, \\ x_1, & y_1, & -z_1, \end{matrix} \right.$$

et l'on aura évidemment

$$(84) \qquad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1.$$

Il reste deux arbitraires; c'est la confirmation du résultat annoncé : le mouvement du rhomboèdre articulé dépend de deux paramètres.

Soient maintenant σ, σ_1, σ_2 les coordonnées d'un point M rapporté aux axes mobiles OA, OB, OC.

Les coordonnées de ce point M, relatives aux axes fixes, s'obtiendront sans difficulté puisque l'on connaît les projections des segments unitaires OA, OB, OC sur ces axes; elles seront

$$(85) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_1(-\sigma + \sigma_1 + \sigma_2), \\ y &= y_1(\sigma - \sigma_1 + \sigma_2), \\ z &= z_1(\sigma + \sigma_1 - \sigma_2). \end{aligned} \right.$$

Toutes les fois que σ, σ_1, σ_2 seront constantes, le point (x, y, z) décrira un ellipsoïde. En particulier, comme on a, pour le point H

de la figure 2,

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = 1,$$

on voit bien que ce point décrira la sphère définie par l'équation (84).

Si l'on prend

$$(86) \qquad \sigma = \frac{b+c}{2}, \qquad \sigma_1 = \frac{a+c}{2}, \qquad \sigma_2 = \frac{a+b}{2},$$

les formules (85) deviendront

$$(87) \qquad x = a x_1, \qquad y = b y_1, \qquad z = c z_1$$

et nous donneront l'ellipsoïde d'axes a, b, c.

Pour obtenir cet ellipsoïde, il suffira donc de porter sur OA, OB, OC les longueurs définies par les formules (86), puis d'achever le parallélépipède déterminé par ces trois arêtes, en articulant, comme nous l'avons indiqué, assez d'arêtes de la figure pour obtenir, dans le mouvement, la conservation de la forme parallélépipédique.

La construction précédente peut donc être réalisée matériellement.

XV.

Au début de cette étude, nous avons signalé une propriété intéressante relative au sujet qui nous occupe. Dans le cas où les trois plans directeurs sont perpendiculaires, la droite mobile (d) demeure, dans toutes les positions, normale à une famille de surfaces parallèles. Nous allons retrouver ce résultat en cherchant dans quel cas cette droite peut être normale à une famille de surfaces.

Reprenons les équations qui la déterminent, mises sous la forme (61)

$$(88) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a(\alpha\, x' + \beta\, y' + \gamma\, z') + \rho x', \\ y &= b(\alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z') + \rho y', \\ z &= c(\alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z') + \rho z', \end{aligned} \right.$$

où l'on a

$$(89) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Pour que la droite soit normale à une surface, il faut qu'on puisse déterminer ρ de telle manière que l'on ait identiquement

$$x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz = 0.$$

Cela donne, en remplaçant dx, dy, dz par leurs valeurs,

$$(90)\qquad \begin{aligned} &d\rho + a\alpha x'\,dx' + b\beta' y'\,dy' + c\gamma'' z'\,dz' \\ &\quad + a\beta x'\,dy' + b\alpha' y'\,dx' + b\gamma' y'\,dz' + c\beta'' z'\,dy' \\ &\qquad + c\alpha'' z'\,dx' + a\gamma x'\,dz' = 0. \end{aligned}$$

Pour que $d\rho$ soit une différentielle exacte il faut, même en tenant compte de la relation (89), que l'on ait

$$(91)\qquad a\beta = b\alpha', \qquad b\gamma' = c\beta'', \qquad c\alpha'' = a\gamma.$$

On peut résoudre complètement ces équations en tenant compte des expressions (19) des neuf cosinus; mais il est aisé de voir qu'elles n'ont qu'une seule solution réelle admissible, celle pour laquelle les six cosinus α', α'', β, β'', γ, γ' sont nuls. Alors α, β', γ'' sont égaux à 1 en valeur absolue et l'on ne trouve que les quatre solutions

$$\begin{array}{lll} \alpha = 1, & \beta' = 1, & \gamma'' = 1, \\ \alpha = -1, & \beta' = 1, & \gamma'' = -1, \\ \alpha = -1, & \beta' = -1, & \gamma'' = 1, \\ \alpha = 1, & \beta' = -1, & \gamma'' = -1, \end{array}$$

qui correspondent aux quatre arêtes de l'angle tétraèdre (U). Ainsi, *quand les plans directeurs ne forment pas un trièdre trirectangle, la droite mobile* (*d*) *n'est normale à aucune surface.*

La méthode précédente permet d'obtenir assez facilement l'équation en coordonnées ponctuelles de la surface normale à toutes les positions d'une droite principale. Prenons, par exemple,

$$(92)\qquad \alpha = 1, \qquad \beta' = 1, \qquad \gamma'' = 1,$$

les formules (88) deviendront

$$(93)\qquad x = (a+\rho)x', \qquad y = (b+\rho)y', \qquad z = (c+\rho)z';$$

en intégrant l'équation (90), on aura

$$(94)\qquad 2\rho + (a+k)x'^2 + (b+k)y'^2 + (c+k)z'^2 = 0,$$

k désignant une constante arbitraire. Éliminons x', y', z' entre les

équations (89), (93), (94), il viendra

$$(95)\qquad 1 = \frac{x^2}{(a+\rho)^2} + \frac{y^2}{(b+\rho)^2} + \frac{z^2}{(c+\rho)^2},$$

$$(96)\qquad \rho + k + \frac{x^2}{a+\rho} + \frac{y^2}{b+\rho} + \frac{z^2}{c+\rho} = 0.$$

La première équation s'obtient en prenant la dérivée de la seconde par rapport à ρ. On pourra donc former l'équation en coordonnées ponctuelles des surfaces normales en exprimant que l'équation du quatrième degré en ρ (96) a une racine double. Cette condition se présentera, comme on sait, sous la forme

$$I^3 - 27J^2 = 0,$$

I étant du second degré et J du troisième par rapport à x^2, y^2, z^2. Les surfaces parallèles normales aux diverses positions de la droite seront donc du douzième ordre. Comme il fallait s'y attendre, il en passera six par chaque point de l'espace.

La méthode précédente conduit très simplement aussi à l'équation des surfaces normales, en coordonnées tangentielles. Puisque ces surfaces sont les enveloppes des quadriques représentées par l'équation (96), il suffira de prendre l'équation en coordonnées tangentielles de ces quadriques. Cette équation est

$$(97)\qquad \frac{p^2}{\rho+k} + (a+\rho)u^2 + (b+\rho)v^2 + (c+\rho)w^2 = 0,$$

si l'on écrit l'équation d'un plan sous la forme

$$(98)\qquad ux + vy + wz + p = 0.$$

En prenant l'enveloppe des quadriques représentées par l'équation (97), on trouvera

$$(99)\quad [(a-k)u^2 + (b-k)v^2 + (c-k)w^2]^2 - 4p^2(u^2+v^2+w^2) = 0.$$

On voit que les surfaces normales sont de quatrième classe et qu'il y en a deux seulement tangentes à un plan. L'équation précédente montre qu'elles sont ce que Laguerre appelait des *surfaces de direction* et qu'elles appartiennent, comme cas très particulier, à la classe de celles que j'ai nommées *paracyclides* dans un travail récent inséré au Tome LIII des *Mémoires de l'Académie des Sciences* sous le titre suivant : *Mémoire sur une classe de surfaces de quatrième classe qui sont corrélatives des*

surfaces du quatrième ordre à conique double et admettent pour courbe double le cercle de l'infini. Si l'on suppose que, dans l'équation (98), on ait

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

l'équation de la surface prendra la forme très simple

$$(100) \qquad 2p + k = au^2 + bv^2 + cw^2.$$

XVI.

Nous terminerons par l'examen de la question suivante :

Considérons deux quelconques des ellipsoïdes (E_ρ) décrits par deux points de la droite mobile (d) dans un mode de description déterminé. Ils sont, l'un et l'autre, en correspondance homographique avec la sphère de rayon *un* et, par conséquent, ils sont reliés l'un à l'autre par une correspondance homographique qui conserve à la fois leur centre et le plan de l'infini. Si donc le point m qui décrit l'un d'eux est assujetti à rester dans un plan, c'est-à-dire sur une ellipse, le point correspondant m' de l'autre décrira aussi une ellipse. En envisageant tous les ellipsoïdes décrits par les différents points de la droite mobile, on est donc conduit à ce mouvement particulier dans lequel tous les points de la droite mobile décrivent des ellipses. Ce mouvement est bien connu : il a été étudié par Halphen, Mannheim, d'autres encore. On pourra consulter à ce sujet les *Principes et développements de Géométrie cinématique* de Mannheim. Il résulte immédiatement des formules définissant la correspondance homographique que le lieu des centres des ellipses est une ligne droite; cherchons si elles peuvent toutes être des cercles.

Nous connaissons déjà une solution particulière du problème. Nous savons que tout ellipsoïde (E) peut être décrit par un point d'une droite de longueur constante (d) qui s'appuie sur un plan (P) et sur une droite (δ) qui rencontre (P).

Le plan (P) est un plan cyclique pour tous les ellipsoïdes décrits par des points de la droite et ces ellipsoïdes se correspondent homographiquement de telle manière qu'à un cercle de l'un, situé dans un plan parallèle à (P), correspond un cercle de l'autre situé dans un plan parallèle. Tous les cercles homologues

sont sur un cône engendré par les positions de (d) qui rencontrent la droite fixe (δ) au même point.

A cette solution particulière nous allons rattacher la solution générale du problème.

Dans cette solution, nous savons que deux cercles homologues doivent se correspondre homographiquement et que leurs points correspondants demeurent à une distance constante l'un de l'autre. Or, le lecteur le vérifiera aisément, ceci ne peut arriver que si les deux cercles sont dans des plans parallèles et si la ligne de leurs centres est perpendiculaire à ces plans.

Alors, la correspondance établie entre les deux cercles doit être telle que les droites joignant les points homologues engendrent un hyperboloïde de révolution autour de la ligne des centres.

Soit (d) une telle droite joignant sur les deux cercles les points homologues m, m' des ellipsoïdes (E_ρ), $(E_{\rho'})$. Il est évident qu'en imprimant autour du point m une rotation de grandeur déterminée dont l'axe sera perpendiculaire au plan des deux cercles, on peut amener toutes les droites (d) à passer par un même point de cet axe. On sait d'ailleurs que cette rotation peut être appliquée à *toutes* les droites (d) et qu'elle donne une génération nouvelle de l'ellipsoïde (E_ρ). Comme, dans cette génération nouvelle, il y a une infinité de droites (d) qui passent par un même point, elle ne peut être que celle à laquelle nous avions songé directement; et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Pour avoir toutes les descriptions de l'ellipsoïde (E) *dans lesquelles des cercles se correspondent sur les ellipsoïdes* (E_ρ), *on considérera d'abord une des quatre générations de* (E) *dans lesquelles la droite* (d) *s'appuie par une de ses extrémités sur une certaine droite* (δ) *et par l'autre sur un plan cyclique* (P), *puis on imprimera à la droite mobile autour du point qui décrit* (E) *une rotation déterminée quelconque dont l'axe sera perpendiculaire au plan* (P). *Tous les ellipsoïdes* (E_ρ) *ainsi obtenus auront en commun un plan cyclique, qui sera un de leurs plans directeurs.*

Les deux autres plans directeurs seront imaginaires et contiendront une des deux droites isotropes qui passent par le centre commun des ellipsoïdes et sont dans le plan (P).

AVIS DE CONCOURS POUR UN PRIX DE MATHÉMATIQUES.

La Classe des Sciences physiques de l'Académie royale de Bologne, à la demande de M. le Chevalier Docteur Adolphe Merlani, met au concours les sujets suivants :

I. « Exposer, par la méthode historico-critique, le développement organique de la théorie des fonctions elliptiques et les points de vue variés sous lesquels cette théorie a été considérée depuis la fin du XVIIIe siècle jusqu'à nos jours. Indiquer l'influence qu'ont eue, sur les autres branches de l'Analyse, les vues présentées successivement dans la précédente théorie. »

II. « Depuis les premières années du XXe siècle, on a proposé, de divers côtés, des définitions de l'intégration définie pour les substituer à la définition classique, dans le but de généraliser le conceps d'intégrale et de l'appliquer aux classes de fonctions les plus étendues qu'il soit possible. »

« Que le concurrent fasse, de ces définitions proposées, un soigneux examen historique et critique; et qu'il indique, parmi les définitions qu'il signalera, celle qu'il choisirait, en exposant d'une manière explicite les raisons de sa préférence. »

A celui qui présentera, pour le jugement de l'Académie, le meilleur travail, sur l'un ou l'autre de ces deux sujets, M. le Chevalier Docteur Adolphe Merlani enverra la somme de 500 lires.

Le concours sera fermé le 31 décembre 1916.

Les travaux présentés au concours doivent être écrits lisiblement en langue italienne et doivent être inédits. Le travail présenté sera anonyme. Sur le travail même devra être inscrite une devise, qui sera reproduite sur une enveloppe fermée contenant le nom du concurrent. Les travaux doivent être envoyés avant le 31 décembre 1916 au Secrétaire (ERCOLE GIACOMINI), via Zamboni, 33.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ZEUTHEN (H. G.). — Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. Mit 38 Figuren im Text. (*B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchernauf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen.* Band XXXIX). 1 vol. gr. in-8°, XII-394 pages. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1914.

En 1909, M. Zeuthen exposait, au Congrès des Mathématiciens tenu à Stockholm, une Introduction à un Traité didactique des méthodes énumératives de la Géométrie, et il plaidait la cause de ces méthodes auprès des mathématiciens méfiants. « Il est généralement reconnu, disait-il, que ces méthodes expéditives sont d'excellents instruments entre les mains des pionniers, pour la première occupation de positions nouvelles; mais, ajoute-t-on souvent, elles ne suffisent pas à assurer la justesse des résultats, qu'on se borne à découvrir avec leur aide ; une véritable démonstration de ces résultats demande une application immédiate de l'Algèbre. Il vaut donc mieux éviter l'usage de ces méthodes. A l'appui de cette opinion on renvoie aux fautes commises par ceux qui se sont servis de méthodes énumératives.... C'est certainement en conduisant à des résultats justes que les méthodes ont été utiles entre les mains des chercheurs, et cet avantage ne saurait être fortuit. Si parfois on s'est égaré en s'en servant, cela prouve simplement que les méthodes ont besoin d'être perfectionnées, ou qu'il est nécessaire de mieux les connaître. » Décrire et fixer rigoureusement ces méthodes, en répandre la connaissance parmi les mathématiciens, voilà justement la tâche que M. Zeuthen remplit dans le traité que nous allons examiner.

M. Zeuthen (c'est lui-même qui le remarque dans sa Préface) laisse de côté toute formulation du principe de la conservation du nombre, tel qu'il a été énoncé par Schubert et modifié ensuite, soit pour ne pas gêner les débutants par un énoncé qui serait forcément trop artificieux, soit parce que cet énoncé ne pourrait rien dire à l'égard de la multiplicité selon laquelle chaque type de solutions d'un problème doit être compté dans le nombre total.

Plus précisément, dans son exposé, il n'aura recours qu'au seul principe algébrique : « Le degré ou le nombre des racines d'une équation algébrique est indépendant de la valeur des coefficients de cette équation. » Les méthodes de la conservation du nombre ont justement pour but d'apprendre à calculer d'une façon simple le nombre des racines des équations algébriques, auxquelles donnent lieu les problèmes géométriques, en ayant égard aux racines infinies et multiples. L'Auteur se propose d'expliquer ces méthodes dans les deux premiers Chapitres en les illustrant par des exemples, et d'éveiller ainsi chez le lecteur une pleine confiance dans la sûreté de leurs applications.

Dès le Chapitre I, on s'aperçoit tout de suite que c'est un maître qui nous initie à une partie de la Géométrie, qui n'est pas parmi les plus faciles de cette matière. En peu de pages, en effet, après avoir fait remarquer au lecteur l'importance que peut avoir la connaissance du nombre des solutions d'un problème géométrique, M. Zeuthen, ayant déterminé quelques concepts (cas général, cas particulier, problème réductible, solutions multiples), introduit les premiers caractères élémentaires des courbes et des surfaces algébriques et des variétés engendrées par des droites. Il rappelle ensuite la notion d'élément d'une courbe, dont il établit quelques propriétés parmi lesquelles le théorème d'Halphen; il démontre le théorème de Bezout dans le plan et dans l'espace par un procédé très simple modelé sur celui par lequel Poncelet, confiant en son principe de continuité, déterminait la classe d'une courbe d'un ordre donné, et il complète ce théorème par la belle règle d'Halphen relative à la multiplicité d'intersection; il établit enfin la classe d'une courbe d'un ordre donné et l'abaissement qu'y produisent les points singuliers. Ce Chapitre contient aussi quelques notices sur les espaces à plusieurs dimensions; mais dans le cours de son Ouvrage, M. Zeuthen aime à s'arrêter davantage sur les figures du plan ou de l'espace ordinaire, qui sont plus familières au lecteur : il lui suffit de montrer que les méthodes énumératives sont valables aussi dans ces domaines plus étendus.

Dans la démonstration du théorème de Bezout, nous voyons déjà l'application du principe de la conservation du nombre, réduit au simple principe algébrique que je viens de rappeler; dans le

deuxième Chapitre, suivent d'autres applications dont quelques-unes sont du même type; dans d'autres, on a recours au théorème de Bezout pour déterminer, par exemple, l'ordre d'une courbe plane dont on connaît le nombre des intersections avec une courbe d'ordre connu; dans d'autres, enfin, pour déterminer certains nombres relatifs à des courbes ou à des surfaces, on les remplace convenablement tantôt par des courbes ou par des surfaces qui sont constituées par des droites ou par des plans, tantôt par leurs projections sur une droite ou sur un plan. Au fur et à mesure que l'occasion se présente, on introduit les principales courbes covariantes d'une courbe plane, on pose le concept de caractéristiques d'un système ∞^1 de courbes ou de surfaces, on développe quelques considérations sur les variétés de droites. Le champ d'application s'est donc considérablement élargi, et M. Zeuthen ne laisse échapper aucune occasion pour l'élargir davantage toutes les fois qu'il y en a l'opportunité. En même temps, fidèle à l'idée qui inspire son Traité, il déduit du principe algébrique dont il part quelques conséquences qui en découlent presque immédiatement, et qui se montrent tout de suite fécondes en résultats. Ainsi, il observe que, si un problème général a n solutions et si un de ses cas particuliers en a davantage, dans ce cas particulier il y a une infinité de solutions, et il en profite, par exemple, pour établir quelques propriétés de la congruence de Hirst et pour démontrer les théorèmes de fermeture de Poncelet. Une autre simple observation (si l'une des deux quantités liées entre elles par une relation algébrique ne peut pas prendre une certaine valeur, elle est nécessairement constante) conduit elle aussi à des démonstrations très simples de différentes propositions, par exemple, du théorème de Salmon sur les courbes planes du troisième ordre, et de la relation métrique-projective qui constitue le théorème de Carnot. Jusqu'ici M. Zeuthen n'a eu qu'en passant l'occasion de toucher à des questions de caractère métrique; maintenant, il montre comment on peut leur appliquer à elles aussi les méthodes énumératives. Avant la fin du Chapitre, M. Zeuthen ajoute quelques considérations sur la façon de calculer la multiplicité des solutions, et il saisit l'occasion de montrer l'avantage que, dans quelques recherches, on peut tirer de la considération d'un mouvement infiniment petit; nous trouvons ainsi le nombre des normales et des tangentes qu'on peut

conduire d'un point à une courbe donnée, suivant Steiner et Beck, et la démonstration de la validité de certaines formules concernant les courbes gauches, que M. Zeuthen avait déjà démontrées auparavant, mais dans l'hypothèse restrictive que certains caractères de ces courbes ne dépendent que de leur ordre et du nombre des points doubles apparents.

C'est ainsi que M. Zeuthen, dans les deux premiers Chapitres, riches en faits et en force persuasive, rend les méthodes énumératives familières au lecteur, et lui permet de le suivre aisément dans les recherches auxquelles il va maintenant se livrer.

Dans le Chapitre III, M. Zeuthen pose d'abord la notion de genre d'une courbe, pour démontrer ensuite la formule qui lie les genres de deux courbes entre les points desquelles est établie une correspondance d'indices quelconques, entre eux et avec le nombre des éléments multiples de la correspondance (théorème général du genre). C'est la formule connue sous le nom de *formule de Zeuthen*, telle qu'elle a été complétée par Halphen. De cette proposition découle immédiatement le théorème de Riemann sur l'invariance du genre dans les transformations birationnelles. De ce théorème, à son tour, on peut déduire les formules de Plücker, dont M. Zeuthen développe la théorie dans toute sa généralité, en introduisant aussi les équivalents plückériens. On sait qu'on appelle ainsi les nombres qui indiquent combien de fois une singularité quelconque doit être comptée entre les points doubles, les rebroussements, les tangentes doubles, les tangentes d'inflexion pour appliquer les formules de Plücker et celle qui exprime le genre en fonction des caractères plückériens. Le théorème du genre donne un moyen de calculer les caractères d'une courbe dont on connaît une génération; M. Zeuthen nous en présente un exemple en étudiant la développée d'une courbe donnée. La notion de genre d'un système ∞^1 de courbes planes conduit aussi à des applications, par exemple aux faisceaux de courbes et aux systèmes de caractéristique 2 (parmi eux, les systèmes de coniques quadritangentes à une courbe plane du quatrième ordre sont particulièrement étudiés). Quant aux courbes gauches, l'Auteur établit les formules de Cayley, et il étudie la courbe double de la développable circonscrite. Aussi, pour les surfaces réglées gauches, on trouve

plusieurs relations en appliquant le théorème du genre; et les propriétés établies à l'égard des formules de Plücker conduisent à quelques résultats relatifs aux surfaces en général. A ce propos, après quelques rapides développements sur les surfaces du troisième ordre et sur les surfaces du quatrième ordre à conique double, l'Auteur introduit la surface de Kummer, comme enveloppe d'un système de quadriques de caractéristique 2 : il avait déjà rencontré cette surface en recherchant la surface focale d'une congruence sans lignes singulières, du deuxième ordre et de la deuxième classe.

A la fin du Chapitre, il définit le genre arithmétique d'une surface et l'invariant de Zeuthen-Segre, et ensuite il donne une démonstration originale de deux formules, établies par M. Severi, qui lient respectivement ces deux invariants relatifs à deux surfaces entre lesquelles est établie une correspondance d'indices quelconques (de ces deux formules on pourrait déduire la troisième trouvée par M. Severi). M. Zeuthen établit aussi l'invariance dans les transformations birationnelles de l'expression $\lambda - 3\nu$, relative à une courbe d'ordre ν tracée sur une surface de l'espace ordinaire, où λ indique le nombre des points d'intersection de la courbe avec la courbe de contact d'un cône quelconque circonscrit à la surface; on reconnaît là, dans l'espace ordinaire, l'expression que M. Severi a appelée « caractère d'immersion d'une courbe tracée sur une surface ».

Le Chapitre IV traite du principe de correspondance; et d'abord du principe, lié au nom de Chasles, que l'Auteur appelle « principe simple de correspondance » (einfacher Korrespondenzsatz). On sait que ce principe affirme l'existence de $\alpha_1 + \alpha_2$ points unis dans une correspondance (α_1, α_2) entre les points d'une droite; M. Zeuthen le complète par la règle, due à lui-même, qui donne le moyen de calculer le nombre des coïncidences ayant lieu en un point de la droite. Le principe est appliqué à plusieurs exemples : ainsi M. Zeuthen détermine, sous certaines conditions, les coïncidences qu'on a dans une correspondance entre des points de deux courbes d'un même plan tels que la droite qui les joint enveloppe une courbe d'une classe donnée, et il applique à son tour cette détermination à une nouvelle déduction des formules de Plücker.

L'extension de cette recherche à l'espace lui permet de déduire le nombre des points isolés d'intersection de trois surfaces passant par une même courbe, avec des multiplicités données. Nous rappelons aussi la détermination du nombre des points triples d'une surface réglée développable ou gauche. Et pour faire mieux ressortir quelle est la portée du principe, qui permet non seulement d'établir des relations isolées entre les caractères d'une variété algébrique, mais parfois aussi de parvenir jusqu'à les exprimer en fonction d'un groupe de caractères indépendants, M. Zeuthen expose ses recherches sur les systèmes ∞^1 de courbes planes, en se bornant toutefois à l'hypothèse que les courbes sont généralement des courbes d'ordre n sans points multiples; il montre que les principaux nombres caractérisant un tel système s'expriment en fonction de n et de la première caractéristique.

L'extension du principe de Chasles à des courbes d'un genre quelconque a été notoirememt formulée par Cayley et démontrée par Brill; dans cette formulation, le nombre γ des points unis d'une correspondance (α_1, α_2) sur une courbe de genre p est donné par

$$\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + 2kp, \tag{1}$$

où k, valence (Wertigkeit) de la correspondance, est défini géométriquement comme un entier, par sa nature même positif ou nul, dépendant de la correspondance. L'existence de ce nombre ne peut pourtant pas être affirmée pour toute correspondance : le principe de Cayley-Brill concerne précisément les correspondances pour lesquelles k est susceptible de cette définition. M. Zeuthen, ayant donné la démonstration de ce principe, définit la valence pour une correspondance quelconque au moyen de la relation (1); il suit ainsi l'ordre d'idées indiqué par Burckhardt, et se détache des géomètres qui, marchant sur les traces de Cayley, étendent la définition géométrique primitive de façon qu'elle embrasse aussi les valeurs négatives de k, et distinguent ensuite les correspondances à valence de celles qui en sont dépouvues. La définition de valence est suivie de quelques exemples de correspondance à valence négative (de chaque correspondance à valence positive k, on peut en déduire une dont la valence est $-k$) et d'un exemple de correspondance à valence fractionnaire, sur une cubique équianhar-

monique. Une méthode assez générale pour déterminer le nombre des points unis, et par conséquent la valence d'une correspondance, vient aussi s'ajouter au principe de Cayley-Brill, qui d'ailleurs y est substantiellement contenu. Elle peut être appliquée d'abord quand on considère une correspondance sur une courbe de genre p qui est variable dans un système dépendant de p paramètres au moins, et tel qu'en fixant convenablement les valeurs de ces paramètres, on obtienne, dans le système, des courbes irréductibles douées de p nouveaux points doubles. L'examen de la variation du nombre des points unis dans le passage aux courbes rationnelles du système est suffisant pour résoudre le problème. Par des modifications convenables, on peut même s'affranchir de la dernière hypothèse. Nous trouvons des exemples des deux cas dans la détermination du nombre des points-pinces d'une surface réglée gauche. Les correspondances biunivoques sur les cubiques planes elliptiques sont le sujet d'une belle application : M. Zeuthen parvient rapidement à déterminer les deux types qui sont les seuls à pouvoir se présenter sur les cubiques à module général, et les types ultérieurs de correspondances, singulières, qu'on a dans les cubiques harmoniques et équianharmoniques; il recherche encore quel effet a sur les valences le produit de plusieurs correspondances et il ne néglige pas de donner une notice sur les polygones de Steiner. Entre les autres applications concernant les courbes planes, nous rappelons encore la recherche du nombre des groupes de $s+1$ points communs à deux séries linéaires $g^1_{m_1}$, $g^s_{m_2}$, qui conduit à un cas particulier d'une formule bien connue de Schubert; la solution de plusieurs problèmes de contact, entre autres de celui qui est résolu par la formule de Jonquières; enfin (ce qui avait déjà été effectué d'une façon incomplète par Cayley) la recherche du nombre des triangles qui sont à la fois inscrits et circonscrits à une courbe douée de singularités plückériennes données, les points de contact des côtés étant différents des sommets. D'autres applications concernent les courbes gauches : par le moyen d'une monoïde l'Auteur étend à celles-ci la méthode pour déterminer les valences qui est contenue dans le principe de Cayley-Brill.

La dernière Partie du Chapitre traite de l'extension aux surfaces du principe de correspondance. M. Zeuthen part des correspon-

dances sur les quadriques, et il parvient par ce moyen à établir ce qu'il appelle le premier principe de correspondance dans le plan; il s'agit de la relation

$$\xi + \eta + \zeta = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta, \tag{2}$$

que Salmon a formulée dans un cas particulier et que Zeuthen a complétée peu après : cette relation a lieu pour une correspondance (α_1, α_2) entre deux plans superposés, où η, ζ, ξ, β indiquent respectivement l'ordre de la courbe lieu de points unis, la classe de l'enveloppe des droites qui joignent les points de cette courbe à leurs correspondants infiniment proches, le nombre des points unis isolés, enfin l'ordre de la courbe décrite par les points de l'un des deux plans qui correspondent aux points d'une droite de l'autre plan. Ici encore, ces principes sont suivis de plusieurs applications : par exemple, l'Auteur en déduit la formule d'Halphen qui donne le nombre des rayons communs à deux congruences. Ensuite, ayant signalé au lecteur un deuxième principe de correspondance dans le plan (le corrélatif du premier) et un troisième regardant les correspondances entre les points et les droites d'un même plan, il expose ses belles recherches relatives aux correspondances sur une surface quelconque. Ses résultats sont exprimés par la relation

$$\xi + \eta + \zeta - \omega = \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\beta}{m} - k(I + 1), \tag{3}$$

où m est l'ordre de la surface, I en est l'invariant de Zeuthen-Segre, ω et β indiquent respectivement le nombre des points communs à la courbe lieu de points unis et à la courbe de contact d'un cône circonscrit, et le nombre des couples de points correspondants situés sur deux sections planes; et enfin ξ, η, ζ ont une signification semblable à celle qu'ils avaient dans la relation (2); k, la valence de la correspondance, a une définition géométrique analogue à celle qu'il avait dans le principe de Cayley-Brill. De plus, en conformité avec ce qu'il avait fait pour les courbes, M. Zeuthen considère la valence pour une correspondance quelconque, quand même k ne serait pas susceptible de cette définition, en partant de la relation (3) même pour le définir.

Un intérêt particulier s'attache aux questions traitées dans le

Chapitre V, auxquelles est lié le souvenir des vives polémiques dont quelques-unes d'entre elles ont été le sujet. Nous trouvons d'abord des recherches sur les systèmes de courbes en général : il s'agit de trouver le nombre des courbes qui remplissent un certain nombre de conditions. Lorsque l'on considère simultanément des conditions pour lesquelles on connaît déjà le nombre des solutions si chacune d'entre elles est associée à un nombre convenable de conditions linéaires, il faut procéder avec des précautions que M. Zeuthen signale soigneusement. On en trouve un exemple dans le problème (développé avec une diffusion particulière dans le cas $n = 3$) de la détermination des courbes d'ordre n qui passent par $\frac{1}{2}n(n+3) - s$ points donnés et qui coupent s courbes données en trois points en ligne droite ; dans cet exemple, l'Auteur nous montre comment on peut calculer le nombre de solutions propres (dans ce cas, il s'agit des courbes qui ne sont pas constituées par une droite et par une courbe d'ordre $n - 1$) au moyen de l'introduction successive de chaque condition. Certains résultats relatifs à des problèmes de contact (par exemple la recherche des courbes d'un système ∞^2 qui sont osculatrices ou bitangentes à une courbe donnée) sont aussi convenablement combinés entre eux ; et l'on démontre que, si l'on considère simultanément des conditions simples, dans l'hypothèse que pour chacune d'elles existent, dans un système ∞^1 de caractéristiques μ, μ', $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ courbes qui la remplissent, α, α' dépendant seulement de la condition considérée, le nombre des courbes d'un système ∞^r qui les remplissent toutes est exprimé par le produit symbolique

$$(\alpha_1\mu + \alpha'_1\mu')(\alpha_2\mu + \alpha'_2\mu')\ldots(\alpha_r\mu + \alpha'_r\mu'),$$

où il faut remplacer dans le développement chaque symbole

$$\mu^s\mu'^t (s + t = r)$$

par le nombre des courbes du système ∞^r qui passent par s points donnés et touchent t droites données. On met pourtant en pleine évidence que l'hypothèse faite à l'égard de $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ n'est pas toujours valable. On sait comment cette question dans le cas des coniques a été longuement débattue et résolue enfin négativement, à la suite des recherches d'Halphen. M. Zeuthen, en se mettant à

exposer ces recherches, commence par distinguer les différents types de dégénérescences de coniques dont il faut tenir compte; c'est-à-dire les coniques qui, considérées comme lieu, se réduisent à une droite double, et, considérées comme enveloppes, à deux points distincts, les figures corrélatives, et aussi les coniques qui, comme lieu, se réduisent à une droite double et, comme enveloppe, à un point double : on les appelle *dégénérescences halphéniennes*, car c'est ce savant qui a montré la nécessité de les distinguer, dans ces recherches, de celles des deux premiers types. Le résultat relatif à $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ est valable quand le système ∞^1 ayant pour caractéristiques μ, μ' ne contient pas de coniques dégénérées du troisième type, ou quand la condition ultérieure imposée aux coniques du système n'est pas satisfaite par une droite double quelconque, dont les deux sommets coïncident en un point arbitraire de la droite; si aucune des deux hypothèses n'est remplie, il faut retrancher de l'expression $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ un terme π qu'on sait évaluer dans chaque cas. L'avantage qu'il y a à procéder ainsi, au lieu d'accepter dans tous les cas le résultat $\alpha\mu + \alpha'\mu'$ qui comprendrait alors toutes les coniques dégénérées, est très bien mis en évidence par M. Zeuthen. Après ces développements, il montre sur plusieurs exemples de quelles façons on peut déterminer les valeurs α et α' qui correspondent à une condition simple donnée, ainsi que les caractéristiques μ et μ' d'un système ∞^1; dans cette dernière recherche jouent un rôle important le nombre λ des coniques-lieux du système réduites à des droites doubles et celui λ' des coniques-enveloppes réduites à des points doubles; on a

$$\lambda = 2\mu - \mu', \qquad \lambda' = 2\mu' - \mu;$$

c'est ainsi qu'on trouve les caractéristiques du système des coniques quadritangentes à une courbe ayant des singularités pluckériennes données, et du système des coniques qui ont avec une telle courbe un contact de quatrième ordre. Lorsqu'on assujettit une conique de ce dernier système à la condition que les diamètres parallèles à une direction donnée aient un paramètre également donné, cela donne lieu, à cause de la présence de dégénérescences halphéniennes, au calcul du terme soustractif π, que nous voyons ainsi effectué dans cet exemple. La recherche du nombre des coniques qui remplissent une condition double et une triple est aussi consi-

dérée par M. Zeuthen; et celle des coniques qui remplissent une condition quintuple est illustrée par un exemple, où il s'agit de trouver les coniques qui ont avec une courbe donnée un contact du cinquième ordre.

Après cette étude, se place naturellement son analogue pour les systèmes de surfaces, en particulier pour les systèmes de surfaces du deuxième ordre. Mais la théorie des systèmes de coniques a été généralisée ainsi d'un autre point de vue, en remplaçant les polarités qui définissent les coniques par des corrélations quelconques : M. Zeuthen signale encore cette généralisation, ainsi que son analogue dans l'espace.

L'Auteur termine son Ouvrage par un Chapitre sur le calcul symbolique, tel que Schubert l'a développé. Je renonce à en donner une analyse détaillée qui nous entraînerait trop loin, d'autant plus qu'il ne s'éloigne pas d'une manière remarquable du « Kalkül » de Schubert.

Voilà, esquissé dans ses grandes lignes, le contenu de ce Traité. J'ai déjà eu l'occasion de remarquer ses excellentes qualités didactiques, qu'on retrouve aussi dans le choix des exercices. Je voudrais pourtant rappeler que la simplicité de l'exposition s'accompagne toujours d'une soigneuse précision des concepts et de la plus grande rigueur dans toutes les questions. Dans tout genre de recherches, M. Zeuthen considère avec un soin particulier l'exacte détermination de la multiplicité des solutions : on sait que c'est un sujet auquel il a contribué par d'importantes recherches. Cet Ouvrage est également destiné à rendre de grands services à tous les géomètres, non seulement à cause des choses nouvelles et remarquables qui y sont renfermées, mais aussi parce qu'il coordonne des résultats connus sous un seul point de vue et permet ainsi au lecteur de s'orienter dans un grand nombre de questions. A cet égard, peut-être, il est à regretter que M. Zeuthen renvoie à son article sur la Géométrie énumérative qui a paru dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* pour la bibliographie qui en précède la publication; quoique les deux Ouvrages soient conçus d'une façon semblable, il arrive nécessairement que ces

indications sont trop sommaires, sans tenir compte qu'il est moins aisé de les consulter.

Ainsi que nous l'avons déjà remarqué à propos du principe de la conservation du nombre, M. Zeuthen n'aime pas toujours les vastes énoncés compréhensifs et préfère indiquer des méthodes générales pour résoudre les différents problèmes qui se présentent dans la Géométrie énumérative. Le domaine d'application de chacune de ces méthodes ressort toujours d'une manière bien définie, d'autant plus que M. Zeuthen établit entre elles d'utiles comparaisons (à ce propos, nous citons les considérations qu'il développe en comparant le théorème du genre avec le principe de correspondance de Cayley-Brill). Or, même ceux qui ne sauraient pas s'associer complètement aux critiques que l'Auteur adresse aux formulations du principe de la conservation du nombre, doivent reconnaître que, même en s'en passant, il est parvenu à nous donner une représentation adéquate de la Géométrie énumérative. Encore, le lecteur acquiert-il une connaissance assez ample de la théorie de la valence, quoique M. Zeuthen ne lui présente ni les recherches générales de Hurwitz ni celles plus récentes de M. Severi.

Naturellement, pour excellent que soit un Traité de Géométrie énumérative, il ne faut pas lui demander plus qu'il ne peut donner; dans plusieurs questions de Géométrie algébrique, d'autres méthodes conduisent à des résultats plus expressifs (je citerai, par exemple, la nouvelle signification que reçoit, dans les recherches de M. Castelnuovo et de M. Severi, la formule de Zeuthen exprimant le théorème général du genre); mais par leur nature même de tels résultats ne pourraient pas découler des recherches purement énumératives auxquelles se borne expressément M. Zeuthen.

J'espère que de ces lignes pourront ressortir l'importance et la valeur de cet Ouvrage, qui assure encore une fois à l'illustre professeur de l'Université de Copenhague l'admiration et la reconnaissance des mathématiciens.

ALESSANDRO TERRACINI.

FORSYTH (A. R.). — A Treatise on differential Equations. Fourth edition. 1 vol. in-8, XVIII-584 pages. London, Macmillan, 1914.

La première édition de cet Ouvrage remonte à 1885; il en est aujourd'hui à sa quatrième. La troisième édition eut l'honneur d'être analysée, ici même, par le regretté Maître, Jules Tannery, qui lui consacra plusieurs pages de ce Bulletin; c'est un des meilleurs éloges que l'on puisse en faire. Malgré ses nombreuses réimpressions, ce Livre a conservé son caractère de grande simplicité. Il était et il reste un Livre modeste, qui s'adresse à un public nombreux : jeunes étudiants des Facultés qui commencent à s'intéresser à la théorie des équations différentielles, élèves des Écoles spéciales qui ont de plus en plus, chaque jour, besoin de leur concours pour les applications de la Mécanique ou de la Physique mathématique. Certes, la tentation dut être forte pour son Auteur d'y ajouter certaines théories, de compléter bien des démonstrations; mais il a su, malgré de notables retouches, le maintenir dans le cadre primitif où il l'avait conçu. L'intégration d'une équation différentielle peut être tentée par deux voies différentes. On peut chercher à la ramener à des équations simples (quadratures, équations linéaires, etc.), c'est-à-dire poursuivre *l'intégration formelle* de l'équation. Si l'on n'aperçoit aucune réduction de ce genre, on peut chercher à étudier l'intégrale générale par approximations, dans tout le champ réel et complexe, à mettre en évidence ses propriétés, ses singularités. L'Auteur s'est placé presque exclusivement au point de vue du premier problème. C'est lui qu'il entend exposer, non seulement dans ses grandes lignes, mais aussi dans les cas les plus intéressants pour la pratique. Certes, il lui arrivera d'avoir recours aux développements en séries et aux intégrales définies, mais il est presque toujours resté dans le domaine réel. Cela lui est quelquefois une gène comme dans l'étude de la série hypergéométrique, dans l'analyse des travaux de M. E. Goursat. Que le lecteur ne cherche donc pas, ici, la démonstration rigoureuse des théorèmes d'existence; il n'entre pas dans l'esprit de l'Auteur de les y insérer. Volontairement il a omis les travaux de MM. Picard, Poincaré, Painlevé sur les méthodes d'approximation et la réductibilité des équations

différentielles, etc. De même, pour citer des travaux étrangers, il ne fait nullement mention des travaux et des résultats de Fuchs sur l'intégration des équations linéaires différentielles du premier ordre, de la discussion du problème de Pfaff.

Avant tout, l'Auteur a voulu faire un Livre d'une grande clarté et d'un caractère pratique. L'interprétation géométrique des méthodes et des résultats, qui est si précieuse aux commençants, y est donnée aussi largement que possible; on la rencontre dès le début de son Livre dans l'étude des intégrales singulières des équations. Certes, celui qui l'aura suivi pas à pas, qui aura résolu les exercices innombrables et variés, pris dans les Mémoires originaux, dans les questions d'examen ou construits spécialement par l'Auteur, qui accompagnent chaque méthode ou suivent chaque Chapitre, aura sur les équations différentielles et les différents problèmes qu'elles posent des vues d'ensemble très précises. Il acquerra de plus une très grande habileté dans les procédés du calcul. Il pourra alors, s'il a pris goût à ces questions, ce dont je ne doute pas, aborder le grand Traité du même Auteur, *Theory of differential Equations*.

Dans une introduction rapide, qui lui sert de premier Chapitre, l'Auteur expose la formation des équations différentielles, définit les solutions d'une telle équation; le rôle des intégrales distinctes le conduit à rappeler dans ses grandes lignes la théorie des déterminants fonctionnels. Un long Chapitre, clair, précis, bien ordonné est consacré aux équations du premier ordre en général. Les méthodes classiques d'intégration, séparation des variables, équations linéaires, équations homogènes, etc., y sont exposées et très nettement différenciées les unes des autres. L'équation de Clairaut introduit tout naturellement la notion d'intégrale singulière. L'Auteur, en s'aidant du point de vue géométrique, étudie avec beaucoup de soin cette intégrale et les conditions analytiques d'existence. Le Chapitre se termine par la *transformation de Legendre*, la seule des transformations de contact qui y soit exposée, et par une Note de Rung sur le calcul numérique des équations différentielles.

Les équations linéaires à coefficients constants, si fréquentes dans les applications, sont largement exposées au cours d'un nouveau Chapitre. La méthode y est bien mise en relief et le calcul

symbolique, qui l'accompagne, fort agréable. L'Auteur en rapproche les équations linéaires homogènes.

Avant d'aborder l'étude des équations linéaires du second ordre à coefficients variables, M. Forsyth étudie différentes méthodes d'intégration qui s'appliquent à des types d'équations bien caractérisés. Il y signale différentes propriétés de l'équation linéaire du second ordre : sa réduction à la forme normale, l'introduction de l'invariant I, la *dérivée schwarzienne*, la variation des paramètres. Toutes ces méthodes reçoivent leur application géométrique dans l'étude des trajectoires.

L'Auteur aborde ensuite l'intégration par les séries. Ce Chapitre est principalement écrit pour traiter des équations de Legendre, Bessel, Riccati, équations qui se rencontrent dans bon nombre de questions de Mathématiques appliquées. Le lecteur y trouvera clairement exposé le calcul des fonctions P_n et Q_n de Legendre, J_n et J_{-n} de Bessel, d'un usage si courant en Physique mathématique. Il y discutera les différents cas qui peuvent se présenter et étudiera les relations différentielles entre P_n et Q_n, J_n et J_{-n}, ainsi que les propriétés des fonctions J. On sait le rôle de l'équation de Riccati dans l'étude des équations de définition des fonctions *automorphes;* le lecteur en trouvera là des propriétés plus élémentaires : les cas d'intégrabilité, la propriété anharmonique de ses intégrales. Enfin, pour terminer cette substantielle étude, l'Auteur établit le passage de l'une de ses équations à l'autre et y donne l'expression de l'intégrale générale de l'équation de Riccati à l'aide des fonctions de Bessel.

L'équation différentielle de la série hypergéométrique, les diverses formes de ses solutions, les relations qui existent entre elles, l'introduction de la fonction Π de Gauss, les cas particuliers d'intégration sous forme finie occupent plus d'un Chapitre; l'Auteur y revient, en effet, à propos de la méthode d'intégration par intégrales définies. Plusieurs Notes sont alors consacrées à l'étude de l'intégration des équations linéaires en séries par la méthode de Frobenius, à l'étude des intégrales, en se limitant, pour la simplicité, aux équations du second ordre.

Un long Chapitre, fort bien documenté, est consacré aux équations d'Euler et à l'intégration des différentielles totales. Après avoir traité et interprété le cas de trois variables, l'Auteur passe au

cas de n variables et pose, à ce sujet, le problème de Pfaff. Puis il étudie les systèmes d'équations simultanées, expose la méthode des multiplicateurs de Jacobi et en fait l'application classique au cas des forces centrales.

Les deux derniers Chapitres se rapportent à la théorie des équations aux dérivées partielles. Après avoir, pour celles du premier ordre, classé les intégrales (complète, singulière, générale), les avoir interprétées géométriquement dans le cas de deux variables, l'Auteur examine une suite de types simples. Il étudie alors la méthode de Lagrange et Charpit, puis, passant au cas général, celle de Jacobi illustrée de nombreuses applications. La méthode de Bour, pour les équations simultanées, termine la première Partie de cette étude. Pour les équations du second ordre, l'Auteur expose la méthode de Monge, le méthode générale de l'intégrale intermédiaire, la transformation de Laplace de l'équation linéaire et, après un certain nombre de cas particuliers, l'intégration en série de l'équation de Laplace. Enfin, viennent la méthode classique d'Ampère pour les équations du second ordre et la généralisation d'Imschenetsky.

Une centaine d'exercices variés se rapportant à toutes les parties du Livre terminent cet Ouvrage, dont la lecture est non seulement intéressante et utile, mais même agréable. ED. OUIVET.

LINDSAY SINCE (E.). — A COURSE IN DESCRIPTIVE GEOMETRY AND PHOTOGRAMMETRY, *for the mathematical Laboratory*. (Edinburgh mathematical Tracts, n° 1.) 1 vol. in-8, VIII-79 pages. London, G. Bell and Sons, 1915.

L'Auteur constate que, dans la plupart des Universités britanniques, la Géométrie descriptive ne fait pas partie des programmes de Mathématiques et qu'elle est exposée seulement dans l'Enseignement technique. Son Livre comprend le cours de Géométrie descriptive professé, dans les classes de Mathématiques de l'Université d'Edimbourg, aux étudiants qui ne suivent pas l'Enseignement technique. Il est rédigé d'après les méthodes de Monge, en ne tenant presque pas compte des progrès accomplis depuis un siècle.

La reproduction de la Table des Matières suffira, il nous semble,

pour faire connaître les questions que M. E. Lindsay Since a développées dans ce *Cours*, qui renferme, très clairement exposés, les éléments de la Géométrie descriptive, de la Géométrie cotée et de la Perspective linéaire.

Table des matières.

spective du cube. — 50. Solution de problèmes en perspective par la méthode de Monge. — 51. Représentation en perspective de courbes planes. — 52. Section plane du cône droit circulaire. — 53. Représentation de courbes gauches et de surfaces courbes. — 54. Plan tangent à un cylindre donné. — 55. Relation entre la méthode de perspective et la méthode de Monge.

Exercices sur le Chapitre IV (4).

CHAPITRE V. — *Photogrammétrie.*

56. Le problème de photogrammétrie. — 57. Solution de ce problème. — 58. Discussion de ce problème lorsque quelques données manquent.

ER. L.

DUHEM (PIERRE). — LA SCIENCE ALLEMANDE. 1 vol. petit in-8, v-145 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1915.

Toute doctrine scientifique porte en elle, à un degré plus ou moins grand, l'empreinte du génie de la race qui l'a créée. Les marques du caractère national s'y trouvent d'autant plus accentuées, que l'œuvre s'approche moins de la perfection.

Tout particulièrement, les créations scientifiques d'outre-Rhin ont subi l'influence incontestable de la patience, de la minutie, de l'esprit de discipline rigoureuse, qui constituent l'apanage de tout Allemand. C'est ce que M. Duhem a fait ressortir d'une façon frappante dans son Article de la *Revue des deux Mondes*, ainsi que dans les Conférences qu'il fit à Bordeaux, en février et mars 1915, sous les auspices de l'Association des Étudiants catholiques de l'Université. Ce sont ces Conférences et cet Article qu'on trouve réunis dans le petit Volume intitulé : *La Science allemande* [1].

Parmi les méthodes de recherche de nos voisins, il en est une qui a joué de tout temps un rôle prédominant, et cela non seulement dans les Sciences du raisonnement, mais encore dans les Sciences expérimentales, voire même dans les Sciences historiques :

---

[1] Table des matières. *Leçons :* Les Sciences de raisonnement. Les Sciences expérimentales. Les Sciences historiques. Ordre et Clarté, Conclusion. *Appendice :* Quelques réflexions sur la Science allemande.

c'est la méthode déductive. Sa lente et prudente démarche est, par excellence, l'allure qui convient à l'intelligence allemande, accoutumée à la discipline rigoureuse que lui imposent les règles de la Logique. L'Allemand possède, au plus haut degré, l'esprit géométrique. Par contre, trop faiblement armé pour la connaissance intuitive, il méconnaît le plus souvent l'esprit de finesse, qui doit toute sa puissance de pénétration à sa souplesse primesautière. Voilà ce qui explique les qualités comme les défauts des productions scientifiques d'outre-Rhin.

Le géomètre y produit des œuvres d'une impeccable rigueur, achetée parfois, il est vrai, au prix d'une extrême minutie et d'une agaçante lenteur; admettre les axiomes d'Euclide lui semblerait scandale : il se complaira dans l'étude de leur indépendance, et dans la construction de géométries, assurément logiques, mais jetant, par leur bizarrerie, un suprême défi à la réalité. Toute doctrine mécanique ou physique devient, entre les mains des Germains, un chapitre de l'Algèbre. Le physicien pose ses hypothèses d'autorité, sans souci des considérations par lesquelles l'esprit de finesse leur pourrait préparer notre adhésion. Il poursuit ensuite sa théorie, sans se préoccuper de savoir si les conséquences qu'il en tire sont conformes à l'expérience. Bien plus, l'histoire elle-même affiche la prétention d'être méthodique et déductive; elle n'atteint il est vrai, un tel résultat qu'aux dépens de l'impartialité. L'historien allemand, dont l'activité n'a pas pour fin dernière la science pure, mais bien la grandeur de son pays, met son érudition au service des ambitions, des convoitises, des haines de ses compatriotes; il n'hésite pas, en dépit des textes les plus formels et les plus clairs, à annexer à l'Allemagne un homme ou un pays.

Le même manque d'esprit de finesse a une autre conséquence : la Science allemande est souvent obscure et confuse. Incapable de distinguer ce qui est vérité capitale de ce qui est détail insignifiant, l'Allemand ne saura composer un Ouvrage; il ne pourra classer d'une manière naturelle les sujets qu'il traite, il se noiera dans le galimatias le plus inextricable qu'on puisse imaginer.

Certes l'Allemagne a produit des savants qui échappent à tous ces reproches. Les Gauss, les Clausius, les Helmholtz en sont les plus brillants exemples. Leur génie, parfaitement équilibré, a su faire à chaque faculté sa juste place, et user tour à tour des intui-

tions du sens commun et des déductions de l'esprit géométrique. C'est un devoir impérieux qui s'impose à nous, Français, d'apprendre à connaître les œuvres de ces maîtres éminents. Il y a plus : nous ne devons pas, sous prétexte de défendre notre raison contre le poison germanique, ignorer les œuvres, moins parfaites, des autres savants d'outre-Rhin. Il en est maintes dont nous pouvons tirer profit. Justement parce qu'elles pêchent par un usage abusif de la méthode déductive, elles nous enseigneront la patiente rigueur, l'art de ne rien énoncer dont nous n'ayons la preuve; elles nous apprendront, d'autre part, à ne pas manquer d'esprit de suite ou de ténacité, à ne pas quitter une idée avant d'en avoir épuisé les conséquences.

Telles sont, rapidement esquissées, les pensées développées, avec tant de verve et d'aisance, par M. Duhem. Son Livre n'a pas seulement un intérêt d'actualité, il constitue une vue d'ensemble sur l'histoire du développement de la Science allemande, dans ses différentes branches. Aussi est-il superflu de dire l'accueil chaleureux qu'il a déjà trouvé près du public français.

Georges Bouligand.

Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'An 1916, *publié par le Bureau des Longitudes.* Avec des Notices scientifiques, 1 vol. in-16 (16-9) de VI-657 pages, avec 41 figures et 3 Cartes magnétiques. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916.

Il convient, de l'*Avertissement*, d'extraire ce qui suit :

« L'*Annuaire*, dont la publication rentre dans les attributions du Bureau des Longitudes, parut, pour la première fois, en 1796; il se rapportait à l'an V (1796-1797).

» Depuis 1900, toutes les dates et heures sont exprimées en temps civil moyen, compté sans interruption de 0^h à 24^h à partir de minuit.

» Depuis 1902, par application de la loi du 9 mars 1911, les heures des divers phénomènes sont exprimées *en temps légal*, c'est-à-dire en temps moyen de Paris, diminué de $9^m 21^s$.

» Suivant les dispositions inaugurées en 1904, le présent *An-*

nuaire contient des Tableaux détaillés relatifs à la Géographie, à la Statistique, à la Métrologie, aux Monnaies et à la Météorologie.

» En vertu de ce même principe, la partie astronomique du présent Volume renferme des Notes sur la Sismologie, les Cadrans solaires et la Physique solaire.

» D'une façon générale, la rédaction de l'*Annuaire* est restée la même qu'en 1914, mais les différents articles ont été revus avec soin et de nombreux perfectionnements de détail y ont été apportés.

» Un supplément à l'*Annuaire* donne pour l'année 1917, les principaux éléments des divers Calendriers en usage, les heures des levers et couchers du Soleil et de la Lune, les phases lunaires, les éclipses de Soleil et de Lune et enfin des données relatives aux marées. »

Cet *Annuaire* contient une Notice scientifique sur *La pression barométrique moyenne et le régime des vents en France*, par M. G. Bigourdan; une *Notice sur le Commandant Guyou*, par M. Émile Picard.

La Notice sur le Commandant Guyou, né en 1843, décédé en 1915, est écrite avec le soin, la netteté, l'élégance de langage, le souci perpétuel de l'information historique exacte qui caractérisent toutes les publications de M. Émile Picard. On y trouve retracée la vie d'un savant qui s'est surtout attaché à faire progresser toutes les questions qui ont trait à la Marine. « Guyou, écrit M. E. Picard, avait un sens très fin de la Mécanique; il recherchait une vue directe des choses et recourait le moins possible aux formules. Je ne comprends bien, disait-il, que la Mécanique géométrique. » Guyou a attaqué dès 1879 la théorie du navire par l'étude de la stabilité de l'équilibre des corps flottants. Complétant les recherches de plusieurs auteurs, notamment de Bouguer et de Bravais, il est parvenu à donner pour cette question une démonstration « d'une rare élégance », devenue « classique », s'appuyant « seulement sur les éléments de la Géométrie infinitésimale ».

Pour mettre la Mécanique du navire sous une forme élémentaire, afin de rendre service aux officiers et au public maritime, Guyou a publié un Livre intitulé *Théorie du Navire*, où il a rassemblé ses propres travaux et présenté les recherches de ses devanciers.

« Cet Ouvrage, dit M. E. Picard, est un chef-d'œuvre de simplicité et d'élégance. » Son *Manuel des Instruments nautiques*, « aujourd'hui partout utilisé », renferme l'exposé de ses idées relativement aux constructions graphiques permettant d'obtenir simultanément, pour un cap magnétique donné, la déviation et la force directrice.

Le Département de la Marine, en 1895, alors qu'il n'existait « aucune formule, ayant quelque valeur scientifique, pour corriger les résultats, observés à bord, de l'influence du fer des bâtiments », chargea Guyou d'établir des formules convenables. Celui-ci parvint, malgré de grandes difficultés, à établir une bonne formule pour résoudre ce problème.

L'œuvre personnelle de Guyou en Astronomie nautique est « fort importante »; on la trouve dans les Cours qu'il professa au *Borda* de 1881 à 1884.

M. Émile Picard émet le vœu qu'un jour le nom de celui qui fut « à la fois un homme de science et un homme d'action », qui « se regardait avant tout comme un marin », qui ne faisait des recherches scientifiques qu'en vue de faire progresser l'Art nautique, fût donné à un important navire de la Flotte française.

Er. L.

MÉLANGES.

SUR LE PRINCIPE DE RELATIVITÉ;

Par M. Henri VERGNE.

1. Est-il possible, au moyen d'observations suffisamment précises (disons infiniment précises), de mettre en évidence expérimentalement le mouvement *absolu* de la Terre (ou, plus généralement, d'un corps solide quelconque)? Par mouvement absolu, il faut entendre le mouvement de la Terre par rapport à l'éther (considéré lui-même comme ayant une existence objective et étant en repos absolu).

A cette question, il n'est pas douteux qu'on doive répondre affirmativement, si l'on admet la vieille et simple doctrine du *temps absolu*, qui nous est si familière. Il est clair, en effet, par exemple, que la vitesse de la lumière n'aura pas une valeur indépendante de la direction dans laquelle on la mesure; elle sera plus petite, mesurée dans la direction du mouvement que dans la direction opposée; si l'on fait éclater une étincelle lumineuse entre les bornes d'un excitateur, la surface d'onde à une époque t sera une sphère qui n'aura pas pour centre l'excitateur, puisque celui-ci s'est déplacé par rapport à l'éther.

Bien entendu ce n'est pas à une expérience de ce genre que l'on s'adressera pour essayer de constater le mouvement absolu de la Terre. On cherchera plutôt à observer des variations de direction, ou des déplacements de franges d'interférence. C'est ce qu'a fait Michelson; d'autres physiciens ont repris ses expériences, ou des expériences analogues, sous plusieurs formes différentes. *Or ils ont tous obtenu des résultats négatifs.* Rien n'a jamais pu déceler le mouvement de la Terre par rapport à l'éther. Pourtant les physiciens dont il s'agit croient pouvoir répondre qu'une variation de l'ordre du *carré* de l'aberration (c'est-à-dire de un cent-millionième) ne leur échapperait pas ([1]). Et l'on est tenté de conclure avec eux que l'expérience ne pourra jamais mettre en évidence que des mouvements *relatifs*, c'est-à-dire des mouvements de corps *matériels* par rapport à d'autres corps *matériels*.

2. On a cherché à expliquer cet étrange résultat. Lorentz, Minkowski, Einstein y sont partiellement parvenus en construisant une théorie basée sur le *Principe de Relativité*. Cette théorie pose, comme postulat fondamental, que *la vitesse de la lumière est une constante absolue*, rigoureusement la même quel que soit le groupe d'observateurs qui se charge de la mesurer. Il est évident que cette théorie doit commencer par jeter par-dessus bord la notion de *temps absolu* : elle la remplace par la notion de *temps relatif*, qu'on appelle plutôt *temps propre* (*Eigenzeit*) d'après Minkowski.

([1]) On sait que si l'on tient compte de l'aberration (qui vaut $\frac{1}{10000}$), mais si l'on néglige son carré, les résultats négatifs des expériences signalées dans le texte peuvent bien s'expliquer; mais ils ne s'expliquent plus dès qu'on tient compte de ce carré.

Imaginons un groupe d'observateurs A, *invariablement liés les uns aux autres*. Ces observateurs pourront, en croisant des signaux optiques, régler leurs horloges les unes sur les autres [1] : ils pourront par conséquent mesurer le temps d'une manière univoque et avec une même unité : ils pourront, sans ambiguïté, parler d'un temps qui leur est *propre*, et qu'ils appelleront T. Ces observateurs seront toujours d'accord sur la simultanéité de deux phénomènes, ou sur la durée de l'intervalle de temps qui les sépare.

De même, un second groupe d'observateurs a, invariablement liés les uns aux autres, possédera, lui aussi, un temps propre qui sera appelé t.

Mais, *si les groupes* A *et* a *sont mobiles l'un par rapport à l'autre*, rien ne permettra de régler les horloges de ces deux groupes les unes sur les autres : les temps T et t ne coïncideront pas. Deux phénomènes simultanés pour les A ne le seront pas forcément pour les a, et inversement; les A et les a n'assigneront pas la même durée à l'intervalle de temps qui sépare deux phénomènes. Ainsi, dans la théorie de la Relativité, des mesures ne sont cohérentes que si elles sont faites par des observateurs invariablement liés entre eux [2].

Nous allons étudier la Mécanique qui résulte de ces prémisses, en nous bornant au point de vue purement cinématique. Nous constaterons que, dans les cas les plus simples, elle rend compte des phénomènes, mais en l'approfondissant nous verrons surgir de très graves difficultés.

3. Commençons par examiner les mouvements rectilignes et uniformes.

Je considère un groupe d'observateurs A_1, A_2, ..., A_n, situés sur une droite indéfinie D : ces observateurs sont invariablement liés entre eux, il y en a par exemple un tous les mètres. Je considère de même un groupe d'observateurs a_1, a_2, ..., a_n, situés tous les mètres sur une droite indéfinie d qui coïncide avec la droite D. Ces deux droites D et d glissent l'une sur l'autre d'un mouvement

---

(1) Sur la possibilité d'un tel réglage, *voir*, par exemple, H. Poincaré, *Science et Méthode*, p. 236, et M. Laue, *Das Relativitätsprinzip*, p. 36-37.

(2) *Voir* E. Borel, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, p. 114-115.

rectiligne et uniforme dont la vitesse sera appelée tang hyp α (tangente hyperbolique α). Les observateurs A et a sont par exemple les voyageurs de deux trains qui se croisent.

Puisque les observateurs A sont invariablement liés entre eux, ils peuvent régler leurs horloges les unes sur les autres et possèdent donc un temps T qui leur est propre; ils peuvent aussi mesurer sur leur droite D les abscisses qu'ils appelleront X. De même les a appelleront x les abscisses portées sur leur droite d, et posséderont leur temps propre qu'ils appelleront t, capables qu'ils sont, puisqu'ils sont invariablement liés entre eux, de régler leurs horloges les unes sur les autres. Par contre, les A et les a ne peuvent pas accorder leurs horloges respectives, puisqu'ils sont en mouvement les uns par rapport aux autres.

Soit P un point mobile animé, sur la même droite D, d d'un mouvement rectiligne et uniforme. Soient X son abscisse comptée sur la droite D et x son abscisse sur la droite d. Les A verront le point P animé d'une vitesse $V = \frac{dX}{dT}$, et les a le verront animé d'une vitesse $v = \frac{dx}{dt}$. Pour que le Principe de Relativité soit respecté, il faut que, si le point P se meut avec la vitesse de la lumière pour les A, les a le voient aussi se mouvoir avec la vitesse de la lumière. C'est-à-dire que si l'on a [1]

$$dX^2 - dT^2 = 0,$$

on doit avoir aussi

$$dx^2 - dt^2 = 0,$$

et inversement.

C'est ce que traduisent les formules suivantes, bien connues sous le nom de *transformation de Lorentz* [2] :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = X \operatorname{ch} \alpha + T \operatorname{sh} \alpha, \\ t = X \operatorname{sh} \alpha + T \operatorname{ch} \alpha, \end{cases}$$

qui ne sont autres qu'un simple changement linéaire de variables transformant identiquement $X^2 - T^2$ en $x^2 - t^2$.

4. Étudions quelques conséquences de ces formules (1).

---

[1] Dans ce qui suit nous considérons, suivant l'usage, la vitesse de la lumière comme étant égale à l'*unité*.

[2] Dans ces formules nous choisissons les origines des temps et des abscisses de façon à faire disparaître des constantes additives.

Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux événements (par exemple deux étincelles) que les A voient se produire respectivement aux abscisses X_1 et X_2 et aux époques T_1 et T_2. Les a verront les deux *mêmes* événements $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ se produire aux époques t_1 et t_2 et aux abscisses x_1 et x_2, époques et abscisses qui seront *différentes* de celles qu'ont observées les A. Et l'on aura

$$(2) \qquad \begin{cases} x_2 - x_1 = (X_2 - X_1)\,\text{ch}\,\alpha + (T_2 - T_1)\,\text{sh}\,\alpha, \\ t_2 - t_1 = (X_2 - X_1)\,\text{sh}\,\alpha + (T_2 - T_1)\,\text{ch}\,\alpha. \end{cases}$$

1° Je suppose, par exemple, que les observateurs a voient les deux événements $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ se produire simultanément ($t_2 - t_1 = 0$) et à une distance ($x_2 - x_1$) l'un de l'autre. Les deux mêmes événements [cela résulte des formules (2)] *ne seront pas simultanés* pour les A ($T_2 - T_1 \neq 0$) qui les verront se produire à une distance

$$X_2 - X_1 = (x_2 - x_1)\,\text{ch}\,\alpha$$

différente de celle observée par les a.

Si la distance ($x_2 - x_1$) est de 1^m pour les observateurs a, elle sera de plus de 1^m pour les A. Les a, qui se croient en repos, diront que les A, par suite de leur mouvement de translation, ont évalué *trop grande* la distance des deux étincelles (ou, si l'on aime mieux, qu'ils l'ont mesurée avec une unité de longueur trop courte). C'est le phénomène de la *contraction de Lorentz :* le mètre avec lequel les A mesurent les longueurs s'est contracté du fait même de leur mouvement.

Inversement, si les deux événements $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ avaient été simultanés ($T_2 - T_1 = 0$) pour les A, ils ne l'auraient pas été pour les a ($t_2 - t_1 \neq 0$), et l'on aurait eu

$$x_2 - x_1 = (X_2 - X_1)\,\text{ch}\,\alpha;$$

cette fois ce sont les A qui, se croyant en repos, disent que les a sont en mouvement et sont, de ce fait, affectés par la contraction de Lorentz, qui leur fait évaluer trop grande la distance des deux étincelles. *Rien, en effet, ne distingue le rôle des a vis-à-vis des* A *du rôle des* A *vis-à-vis des a.*

2° Je suppose maintenant que les observateurs a voient les deux étincelles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ éclater au même point ($x_2 - x_1 = 0$), mais à un intervalle de temps $t_2 - t_1 \neq 0$. Les A verront les deux mêmes

étincelles éclater en deux points différents [1] ($X_2 - X_1 \neq 0$) et à un intervalle de temps

$$T_2 - T_1 = (t_2 - t_1)\,\text{ch}\,\alpha$$

différent de celui enregistré par les a. Les a, qui se croient en repos, diront que les A, par suite de leur mouvement de translation, ont évalué trop grande la durée (ou, si l'on aime mieux, qu'ils l'ont mesurée avec une unité de temps trop courte). C'est là le phénomène du *temps réduit* (ou *temps propre*) de Minkowski : l'unité de temps des observateurs en mouvement se trouve « contractée », comme l'était tout à l'heure leur unité de longueur.

Inversement, si les deux événements $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ avaient été vus se produire au même point ($X_2 - X_1 = 0$) par les A, à un intervalle de temps $T_2 - T_1$, les a les auraient vus en deux points différents ($x_2 - x_1 \neq 0$), et à un intervalle de temps

$$t_2 - t_1 = (T_2 - T_1)\,\text{ch}\,\alpha.$$

Cette fois, ce sont les A qui, se croyant en repos, disent que les a, par suite de leur mouvement, sont affectés par la réduction du temps, et ont évalué trop grande la durée.

On voit donc que la *contraction de Lorentz* et le *temps réduit de Minkowski* sont deux phénomènes concomitants : l'un ne pourrait pas arriver sans l'autre; pour mieux dire, ils constituent un seul et même phénomène, traduction physique des formules analytiques (1) ou (2).

Telle est la théorie classique de la Relativité. Elle rend, comme on voit, parfaitement compte des phénomènes *tant qu'il ne s'agit que de mouvements rectilignes et uniformes*. Mais si nous essayons d'aborder des mouvements plus généraux, par exemple une rotation, nous allons voir surgir des difficultés qui paraissent insurmontables.

5. Reprenons tout d'abord nos observateurs A et a, situés respectivement sur les droites D et d qui glissent l'une sur l'autre; et imaginons que tous les observateurs a conviennent de faire éclater une étincelle *à un même instant t*. Ces étincelles n'appa-

---

[1] Cela arrive, du reste, déjà en Mécanique classique.

raîtront pas simultanées aux observateurs A qui enregistreront les étincelles $a_1, a_2, \ldots, a_n$, respectivement aux instants $T_1, T_2, \ldots, T_n$, et l'on aura

$$T_1 > T_2 > \ldots > T_i > \ldots > T_n.$$

Ainsi les étincelles de droite apparaîtront, pour les observateurs A, *antérieures* aux étincelles de gauche, bien que les a les aient fait éclater au même instant.

Imaginons maintenant qu'au lieu de se trouver sur les deux droites D et d qui glissent l'une sur l'autre, nos observateurs A et a se trouvent sur deux circonférences C et c de même diamètre, coïncidant et glissant l'une sur l'autre; les observateurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$ occuperont les sommets d'un polygone régulier, il en sera de même des observateurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Nos deux groupes d'observateurs seront, si l'on veut, les cavaliers de deux manèges de chevaux de bois concentriques tournant avec des vitesses différentes. Les observateurs a, invariablement liés entre eux, possèdent un temps propre t. Les A, invariablement liés entre eux, possèdent un temps propre T.

Supposons que les a fassent, à un même instant t, éclater une étincelle. Ces étincelles ne seront pas simultanées pour les A. Ceux-ci verront l'étincelle a_2 éclater *avant* a_1; a_3 avant a_2; ...; a_n avant a_{n-1}; et enfin a_1 avant a_n. Ainsi la théorie de la Relativité nous amène à cette conclusion que l'étincelle a_n est *à la fois* antérieure et postérieure à l'étincelle a_1.

La remarque qui précède ne constitue pas seulement un paradoxe apparent, et nous arriverons aux mêmes impossibilités si nous attaquons la question analytiquement et d'une manière générale.

C'est ce que nous allons faire.

6. Considérons un premier groupe d'observateurs A invariablement liés entre eux et à un trièdre de référence OXYZ (il y aura, par exemple, un observateur A à chaque point dont les trois coordonnées sont des nombres entiers). Ces observateurs, invariablement liés, possèdent un temps propre qu'ils appellent T.

Considérons aussi un second groupe d'observateurs a, invariablement liés entre eux et à un trièdre de référence $oxyz$ (par exemple placés à chaque point dont les trois coordonnées x, y, z

sont des nombres entiers). Ces observateurs a appelleront t le temps qui leur est propre.

Les deux groupes d'observateurs A et a sont mobiles l'un par rapport à l'autre, sans que nous supposions rien de particulier sur ce mouvement d'entraînement.

Supposons qu'un phénomène (par exemple une étincelle) se produise à l'instant T au point que les A appellent XYZ. Les a verront le *même* phénomène se produire en un point qu'ils appelleront xyz, et ils le verront à l'instant t. Et il est de toute évidence qu'à chaque système de valeurs de X, Y, Z, T correspond un système de valeurs et un seul pour x, y, z, t et réciproquement. C'est dire que l'on passe du système (X, Y, Z, T) au système (x, y, z, t) par un simple changement de variables. Nous allons étudier de quelle nature doit être ce changement de variables pour que le Principe de Relativité soit respecté.

Soit P un point mobile animé d'un mouvement quelconque. Les A verront ce point animé d'une vitesse dont les composantes sont, à chaque instant T,

$$\frac{dX}{dT}, \quad \frac{dY}{dT}, \quad \frac{dZ}{dT},$$

tandis que les a appelleront, à chaque instant t,

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

les composantes de la vitesse du même point mobile.

Pour que le Principe de Relativité soit respecté, il faut que, si le point P se meut avec la vitesse de la lumière pour les A, les a le voient aussi se mouvoir avec la vitesse de la lumière; c'est-à-dire que, si l'on a

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dT^2 = 0,$$

on doit avoir aussi

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 = 0,$$

et réciproquement.

Le changement de variables que nous étudions doit être tel que chacune de ces deux dernières équations entraîne l'autre ; ce qui exige que l'on ait

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 - dT^2 = \lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2).$$

λ étant une certaine fonction de x, y, z, t (ou, si l'on préfère, de X, Y, Z, T).

Nous reconnaissons là un problème bien connu en Géométrie : c'est celui de la *Représentation conforme*. Seulement, ici, nous nous trouvons dans un espace à quatre dimensions, dont trois seulement sont euclidiennes, la quatrième étant hyperbolique (¹). Ce fait, d'ailleurs, n'a rien qui puisse nous gêner.

Le problème de la Relativité dans l'espace à trois dimensions se confond donc avec celui de la Représentation conforme dans un espace à quatre dimensions.

Plus généralement, *le problème de la Relativité dans un espace à n dimensions se confond avec le problème de la Représentation conforme dans un espace à* $(n+1)$ *dimensions* (dont l'une est hyperbolique).

Comme le problème de la Représentation conforme, dans l'espace à deux dimensions, possède une infinité de solutions dépendant d'une fonction arbitraire, il en résulte qu'on pourra construire une Cinématique à *une* dimension, basée sur le Principe de Relativité.

Mais *il n'en est plus de même pour la Mécanique à deux ou à trois dimensions*. Car, dans l'espace à trois ou à quatre dimensions, il n'existe que trois sortes de représentations conformes :

1° L'inversion ;
2° L'homothétie ;
3° Le changement d'axes.

Il est d'abord clair que l'inversion, définie par des formules telles que

$$x = \frac{kX}{X^2+Y^2+Z^2-T^2}, \qquad y = \frac{kY}{X^2+Y^2+Z^2-T^2},$$
$$z = \frac{kZ}{X^2+Y^2+Z^2-T^2}, \qquad t = \frac{kT}{X^2+Y^2+Z^2-T^2},$$

ne peut pas convenir au problème qui nous occupe, puisqu'aux points à l'infini de l'espace (X, Y, Z) correspondraient les points de l'espace (x, y, z) voisins de l'origine.

(¹) Sur cette Géométrie hyperbolique spéciale à quatre dimensions, *voir* E. Borel, *Introduction géométrique à quelques théories physiques*, Chap. IV.

De même, nous ne pouvons évidemment rien tirer de l'homothétie, définie par les formules

$$x = kX, \qquad y = kY, \qquad z = kZ, \qquad t = kT.$$

Il ne reste plus à examiner que le changement d'axes, défini par des formules telles que (¹) :

$$(3) \quad \begin{cases} x = a\ X + b\ Y + c\ Z + d\ T, \\ y = a'\ X + b'\ Y + c'\ Z + d'\ T, \\ z = a''\ X + b''\ Y + c''\ Z + d''\ T, \\ t = a'''X + b'''Y + c'''Z + d'''T, \end{cases}$$

où les seize coefficients *constants* a, b, c, ..., d''' sont reliés par les conditions d'orthogonalité (au nombre de dix indépendantes) :

$$a^2 + a'^2 + a''^2 - a'''^2 = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$ab + a'b' + a''b'' - a'''b''' = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce changement d'axes correspond précisément à la tranformation de Lorentz (²) qui nous apparaît ainsi comme LE SEUL changement de variables qui soit compatible avec le Principe de Relativité.

Or, une transformation de Lorentz correspond à un *mouvement d'entraînement rectiligne et uniforme* des deux sys-

(¹) Dans ces formules, nous ne mettons pas de constantes additives qui correspondraient simplement à un changement d'origine pour les coordonnées et le temps. *Voir* E. BOREL, *loc. cit.*, p. 40.

(²) Il est, en effet, facile de transformer les formules (3) dans les suivantes :

$$t = X \operatorname{sh}\alpha + T \operatorname{ch}\alpha,$$
$$x = X \operatorname{ch}\alpha + T \operatorname{sh}\alpha,$$
$$y = Y,$$
$$z = Z,$$

identiques aux formules (1). Il suffit, pour cela, d'effectuer un simple changement d'axes dans l'espace euclidien (X, Y, Z) et dans l'espace euclidien (x, y, z), *sans toucher aux variables t et* T. Ces changements d'axes consistent à placer l'axe des X et l'axe des x tous deux dans la direction même du mouvement d'entraînement (*voir* M. LAUE, *Das Relativitätsprinzip*, p. 61-64).

tèmes OXYZ et $oxyz$ l'un par rapport à l'autre ([1]). Tout autre mouvement d'entraînement, par exemple une rotation, est incompatible avec le Principe de Relativité.

7. Quelles conclusions pouvons-nous tirer de la discussion qui précède? La question est embarrassante, et je me contente, en terminant, de signaler l'angoissante alternative à laquelle nous nous heurtons.

D'une part, si l'on admet la doctrine du *temps absolu*, on doit pouvoir, par des observations très précises, mettre en évidence le mouvement absolu de la Terre, c'est-à-dire son mouvement par rapport à l'éther. Or, les expériences si soignées de Michelson et d'autres physiciens semblent bien nous interdire l'espoir d'une pareille mise en évidence.

D'autre part, si l'on admet la doctrine si tentante, et qui s'est déjà montrée féconde, du *temps relatif* (ou temps propre), sur laquelle est basé le Principe de Relativité, on explique bien le résultat négatif des expériences de Michelson, mais nous venons de voir que cette doctrine est incompatible avec tout mouvement d'entraînement qui n'est pas rectiligne et uniforme; on doit nier, par exemple, la possibilité d'un mouvement d'entraînement de rotation. Or, nous avons tous vu tourner des chevaux de bois.

Faut-il alors révoquer en doute les résultats des expériences de Michelson, sous prétexte qu'elles ont la prétention de mettre en évidence une variation de l'ordre du cent-millionième? Il semble pourtant bien que cette prétention soit légitime.

Ou bien faut-il conclure que le Principe de Relativité, qui attribue à la lumière une vitesse de propagation constante et indépendante du système de référence, n'est qu'un principe approximatif? Mais alors, s'il n'a plus son caractère de vérité *rigoureuse*, le Principe de Relativité ne perd-il pas par là même ce qui faisait sa beauté?

([1]) Remarquons que le mouvement rectiligne et uniforme rentre dans la Mécanique à *une seule* dimension qui est compatible, nous l'avons vu, avec le Principe de Relativité.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

FORD (L.-R.). — AN INTRODUCTION TO THE THEORY OF AUTOMORPHIC FUNCTIONS. 1 vol. in-8°, VIII-96 pages et 32 figures. London, G. Bell and Sons, 1915.

Cet élégant Opuscule fait partie, sous le n° 6, des *Edinburgh Mathematical Tracts*. Son sujet semble d'abord moins élémentaire que ceux des cinq Volumes précédents, et cependant il est exposé avec un bonheur, avec une facilité qui semblent presque déconcertants. Il est encore assez courant d'admettre qu'on ne verra bien la théorie des fonctions fuchsiennes que si l'on prend d'abord le cas spécial des fonctions modulaires, lequel suppose une étude des fonctions elliptiques. Or, je suis convaincu maintenant que ces travaux d'approche ne sont point indispensables; M. Ford va droit au but et avec un bagage bien mince.

Dans un premier Chapitre, il nous présente la transformation linéaire

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{1}$$

à laquelle, en posant $z' = z$, on reconnaît, en général, deux points fixes. Ceux-ci, ξ_1 et ξ_2, peuvent d'ailleurs être mis en évidence en remplaçant la relation (1) par

$$\frac{z' - \xi_1}{z' - \xi_2} = K\frac{z - \xi_1}{z - \xi_2}.$$

Dans cette nouvelle égalité, K est une constante, complexe en général, qui peut être représentée par $Ae^{i\theta}$.

Si $K = A$, la transformation est dite *hyperbolique;*

Si $K = e^{i\theta}$, elle est dite *elliptique;*

Si $K = Ae^{i\theta}$, elle est dite *loxodromique*.

La propriété fondamentale de toutes ces transformations est de changer des cercles en des cercles qui, dans chacun des trois cas précédents, se présentent de manière différente par rapport aux points fixes de la transformation; l'examen détaillé de ces

différents cas a conduit l'Auteur à des figures très explicites et élégantes.

Le Chapitre suivant est plus spécialement consacré au *groupe* des transformations (1). La réitération de telles transformations est une transformation de même nature; par définition du mot, elles forment un *groupe*. Ce groupe est *discontinu*, car il ne permet pas à un point quelconque du plan et à son transformé d'être rapprochés indéfiniment l'un de l'autre.

Là encore il n'y a que la généralisation des conceptions les plus élémentaires. Ainsi les relations $z' = z + m\omega$ et $z' = z + m\omega + m'\omega'$ forment des groupes discontinus auxquels correspondent les fonctions simplement et doublement périodiques. Dans ce dernier cas, le plan est divisé en parallélogrammes; toutes les transformations du groupe nous portent d'un point situé dans un tel parallélogramme en un point situé de la même manière dans un autre. Il y a quelque chose d'absolument analogue pour le groupe des transformations (1); il y a *une région fondamentale*, d'un aspect bien connu, bande de plan parallèle à l'axe imaginaire et limitée en bas par un arc de cercle, région que toutes les transformations du groupe transformeront en des régions triangulaires limitées par des arcs de cercle normaux à l'axe réel, régions qui ne peuvent empiéter les unes sur les autres et qui couvrent tout un demi-plan. Henri Poincaré et M. Émile Picard ont d'ailleurs réussi à généraliser de telles transformations dans l'espace à trois dimensions.

Avec le Chapitre III, nous construisons les fonctions automorphes proprement dites. Il ne suffit pas de concevoir un réseau de parallélogrammes pour que les fonctions doublement périodiques s'y engendrent spontanément; cependant, sur ce terrain préparé, le développement de leur théorie est rapide. Nous allons assister à quelque chose d'analogue, dans notre champ de triangles à côtés circulaires, pour la génération des fonctions définies par l'égalité fondamentale

$$F(z) = F\left(\frac{az + b}{cz + d}\right).$$

Les singularités de telles fonctions sont à rechercher uniquement dans la région fondamentale; à cet égard, constatons que l'étude du nombre des pôles (ou des zéros) repose, de la manière la plus simple et la plus naturelle, sur un théorème général dû à Cauchy.

Après avoir conçu très simplement ce fait, à peu près évident, qu'une fonction automorphe sans singularité ne saurait être qu'une constante, nous voyons que certaines combinaisons algébriques de fonctions automorphes de même groupe pourraient être affranchies de singularités. Ces combinaisons sont donc des constantes, et c'est sur cette simple remarque que repose l'existence de relations algébriques entre fonctions automorphes ou l'expression de variables liées algébriquement au moyen de ces mêmes fonctions.

Puis vient ce théorème capital : *Si $x(z)$ est une fonction automorphe de z, z peut s'exprimer en x par le quotient de deux solutions de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = R(w, x)y \qquad \text{où} \qquad \Phi(w, x) = 0,$$

R *étant rationnel, en w et x, et Φ étant un polynome.*

La démonstration n'est guère qu'une combinaison de dérivations si les résultats précédents ont été bien compris. Ainsi donc les fonctions automorphes, après avoir satisfait à des relations algébriques, satisfont maintenant à des équations différentielles. Il ne reste plus qu'à les exprimer pour elles-mêmes par des développements en série ; c'est ce que fit Henri Poincaré avec ses séries thêtafuchsiennes, généralisations de celles formées pour la représentation des fonctions Θ de la théorie des fonctions elliptiques.

Les trois Chapitres dont je viens de parler occupent exactement 49 pages; il est merveilleux d'avoir utilisé ainsi un espace aussi restreint. En somme, l'essentiel est déjà fait et je serai plus bref quant à la suite de l'Ouvrage.

Le Chapitre IV est consacré aux fonctions triangulaires de Riemann-Schwarz; ces fonctions sont attachées à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = 0;$$

là encore les triangles à côtés circulaires, qui sont des représentations conformes les uns des autres, peuvent former des figures éminemment symétriques et élégantes, mais il y a mieux. Certaines transformations spatiales telles que la projection stéréographique transportent sur la sphère des symétries planes qui deviennent ainsi plus frappantes encore. De là la théorie des polyèdres réguliers

qui, pour Klein, fournissait une interprétation géométrique particulièrement naturelle.

Le Chapitre V est consacré à la Géométrie non euclidienne. Soit une conique appelée *absolu*. Deux points P, Q déterminent une droite coupant l'absolu en U et V. La *distance* PQ est proportionnelle au logarithme du rapport anharmonique des quatre points U, P, Q, V ; si par un point O passent deux droites OL, OM et deux tangentes à l'absolu OS, OT, l'*angle* LOM est proportionnel au logarithme du rapport anharmonique du faisceau O.SLMT.

Ce sont là des *définitions* des distances et des angles qui permettent de construire une géométrie analogue à la géométrie élémentaire, ayant, plus précisément, les mêmes postulats, exception faite pour celui d'Euclide. Ces géométries non euclidiennes se présentent sous des aspects notablement différents suivant que l'absolu est une conique réelle ou imaginaire, indécomposable ou décomposable; mais, toujours, dans ces géométries, les lignes qui jouent le rôle de droites sont analogues aux cercles de la géométrie ordinaire; on peut même leur faire correspondre de véritables cercles dans la géométrie riemannienne, qui a des formules complètement analogues à celles de la géométrie sphérique. Dès lors, on comprendra sans peine que les fonctions automorphes qui naissent et se transforment à l'envi dans des champs de triangles à côtés circulaires, soient les fonctions naturellement associées à la géométrie non euclidienne. Les êtres intelligents d'un monde non euclidien useraient naturellement des fonctions fuchsiennes comme nous usons des fonctions trigonométriques.

Passons au Chapitre VI consacré à l'uniformisation.

On sait que la relation $\Phi(w, x) = 0$, où Φ est un polynome, définit une fonction w de x, uniforme sur une surface (dite *surface de Riemann*) formée de plans superposés et convenablement soudés le long de certaines lignes permettant de passer de l'un à l'autre. Mais comme les fonctions automorphes, que nous savons susceptibles d'être liées par des relations algébriques, peuvent, inversement, servir à exprimer x et w en fonction uniforme d'un paramètre, il y a là un problème d'uniformisation étroitement apparenté à celui que résout l'emploi de la surface de Riemann. Le sujet est vaste et il est encore fort remarquable que l'Auteur ait pu l'esquisser en quelques pages.

En résumé, il y a, dans cet Ouvrage, une condensation excellente, se présentant sous une apparence élémentaire presque inattendue. Les géomètres français y verront un éclatant hommage à l'une des plus géniales créations dues à Henri Poincaré.

Nous ne méconnaissons point Riemann, Fuchs, Klein et d'autres géomètres allemands auxquels le sujet doit beaucoup, mais nous persistons à le considérer au travers des travaux de l'école française; il semble que l'esprit de Cauchy et d'Hermite y ait été apporté par Poincaré et nous ne voyons aucun bénéfice à changer de tels points de vue. Il ne nous déplaît pas non plus de le voir présenté par un géomètre appartenant à une nation amie ; de tels hommages sont indubitablement sincères et ne sauraient être entraînés par aucune considération étrangère à la Science et particulière au moment.

Le Volume est terminé par une abondante bibliographie; les travaux de M. Émile Picard, à partir de 1881, avoisinent ceux de Poincaré. J'ai été un peu étonné de n'y point trouver d'indication relative à ceux de M. P. Appell; il me semble que les travaux de ce dernier sur les fonctions à multiplicateurs et sur les séries hypergéométriques, pour ne citer que ceux-là, constituent une voie d'accès vers les fonctions automorphes. Ici, j'ajouterais volontiers trois ou quatre lignes à la bibliographie de M. Ford, ce en quoi mon éminent collègue anglais ne pourra certainement voir une critique. Je ne puis que réinsister encore sur tout le bien que je pense de l'œuvre; l'un des meilleurs souhaits que je forme pour elle est qu'elle soit rapidement traduite en français.

A. Buhl.

LECORNU (Léon). — Cours de Mécanique, professé à l'École Polytechnique. Tome II : 1 vol. in-8, VI-538 pages, avec figures. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1915.

Les lecteurs du *Bulletin* connaissent déjà le premier Tome de l'Ouvrage de M. Lecornu, par la belle analyse qu'en a faite G. Cotty; notre regretté collègue y montrait brillamment le but poursuivi par M. Lecornu et la façon dont il l'a réalisé. Les mêmes tendances se retrouvent dans le second Tome, qui vient de paraître : il nous suffira donc de les rappeler rapidement.

Actuellement, il existe un courant assez accentué contre l'enseignement classique de la Mécanique rationnelle; on lui reproche volontiers d'être trop théorique, trop éloigné des applications. Lagrange aurait fait la part trop belle à l'Analyse; avec trois axes coordonnés et quelques dérivations, l'élève obtient sans effort, presque automatiquement, des formules qui lui masquent la réalité profonde du phénomène. Ces critiques, qu'il serait aisé de préciser et de multiplier, sont assurément justifiées : elles le sont déjà pour l'étudiant qui aspire au professorat; elles le sont *a fortiori* pour le futur ingénieur. Faut-il donc transformer radicalement l'enseignement de la Mécanique, et le réduire à un ensemble, plus ou moins bien coordonné, de résultats empiriques? Dans la préface du Tome I, M. Lecornu répond hardiment par la négative : la Mécanique classique doit survivre, au moins dans ses grandes lignes. Et cela pour deux raisons : d'abord, elle est nécessaire pour la formation intellectuelle de l'ingénieur; en second lieu, elle est indispensable pour l'exécution des divers travaux que soulève la pratique. De là résulte le caractère éminemment original du Cours de M. Lecornu : sa Mécanique renferme bien le développement des principaux théorèmes classiques; mais, une proposition est-elle susceptible d'une application pratique? aussitôt apparaissent toutes les explications techniques nécessaires, sans aucune exagération, ni détails superflus. Cet accord permanent entre la théorie et la pratique, nous allons le retrouver dans le second Tome de Mécanique de M. Lecornu.

Ce Tome est divisé en cinq Livres : Dynamique générale, Dynamique des solides invariables, Dynamique des solides naturels, Élasticité, Mécanique des fluides; l'ensemble des deux premiers Tomes de l'Ouvrage comprend ainsi, en neuf Livres, le développement complet du Cours classique de Licence.

La Dynamique générale, cinquième Livre du Traité, forme le début du Tome II. Elle a pour objet « l'étude du mouvement des systèmes de points matériels, soit libres, soit assujettis à des liaisons ». Après la distinction entre les forces extérieures et les forces intérieures, l'Auteur établit le théorème des quantités de mouvement, le théorème du mouvement du centre de gravité et le théorème de Résal. Viennent ensuite l'interprétation géométrique du moment cinétique et le théorème des forces vives; puis l'Auteur

démontre le théorème de Kœnig et étend le théorème des forces vives au mouvement relatif. Prenant alors trois axes coordonnés, il énonce sous forme analytique les propositions précédentes. Le premier Chapitre contient encore la définition du viriel, le théorème de Clausius sur la moyenne de la force vive, des considérations générales sur la stabilité et la définition de la masse au moyen de la gravitation. Le Chapitre II est consacré à l'énergie; le principe de la conservation de l'énergie y est exposé en détail, et l'Auteur termine par une application au calcul de la puissance balistique de la poudre.

Avec le Chapitre III nous voyons apparaître la théorie des liaisons; en chaque point d'un système matériel soumis à des liaisons, l'Auteur distingue la force *active* (ou donnée); la force de liaison; leur résultante : la force *effective;* et, enfin, la force d'inertie, égale et opposée à cette dernière. L'énoncé du principe de d'Alembert est alors immédiat. L'Auteur insiste longuement sur ce principe; il multiplie les exemples pour laisser une impression absolument nette dans l'esprit du lecteur. Le principe de d'Alembert permet d'étendre à la Dynamique le théorème du travail virtuel : M. Lecornu montre avec précision ce qu'il faut entendre par *déplacement virtuel;* il indique les confusions à éviter et donne des applications où les liaisons varient avec le temps. L'ensemble des résultats acquis permet déjà de traiter un problème intéressant : il s'agit de montrer comment « un homme, debout sur une glace absolument polie, a la faculté de faire un tour complet sur lui-même »; des considérations analogues s'appliquent aux mouvements oscillatoires des locomotives. L'énoncé dynamique du théorème du travail virtuel conduit au principe de la moindre contrainte; et, pour que ce dernier principe ne semble pas trop abstrait, l'Auteur reprend deux problèmes précédemment étudiés et les résout à nouveau au moyen du principe de Gauss. Enfin, après quelques indications sur la mécanique de Herz, l'Auteur développe la théorie analytique du mouvement des systèmes liés et l'applique à divers exemples.

Le Chapitre suivant est consacré aux percussions. Beaucoup d'élèves rencontrent des difficultés sérieuses dans cette étude; il faut louer M. Lecornu du soin qu'il a mis à les aplanir. Tout d'abord, l'étude du choc est séparée de celle des percussions :

nous la retrouverons au Livre VII; puis l'Auteur expose avec précision et clarté le passage à la limite qui est fondamental dans la théorie. Pour dissiper toute obscurité, rien ne vaut un exemple adroitement choisi : celui du pendule brusquement variable nous paraît excellent; et, lorsqu'il s'agira de traiter d'autres problèmes, le lecteur ne renouvellera pas « l'erreur de Delaunay ». Dans le problème actuel, cette erreur revient à appliquer le théorème des quantités de mouvement à la projection horizontale du mouvement sans remarquer qu'au moment du passage à la verticale la tension devient *infinie* et que, par suite, sa projection horizontale n'est pas nécessairement nulle. La méthode de M. Lecornu consiste à appliquer le théorème des moments dans le mouvement autour du point de suspension; « le moment de la tension par rapport à ce point est rigoureusement nul, quelle que soit la grandeur de la tension ». A vrai dire, cette assertion pourrait éveiller quelques doutes, la suspension d'un pendule n'ayant jamais la perfection rigoureuse que l'on paraît exiger. Mais, en remplaçant le point de suspension par une poulie, de rayon très petit ε, sur laquelle passe le fil, et en appliquant la méthode même de M. Lecornu, on trouvera que sa conclusion reste toujours valable, à une erreur près de l'ordre de ε.

Le Chapitre V contient la théorie des équations de Lagrange avec plusieurs exemples, leur application aux percussions et à la démonstration du principe d'Hamilton. Le cas des systèmes non holonomes est étudié en détail; après avoir démontré d'une façon générale l'impossibilité d'appliquer les équations de Lagrange à un tel système, M. Lecornu étudie un exemple très simple : mouvement sur un plan horizontal d'un solide analogue à un haltère, l'une des boules glissant sans frottement et l'autre roulant sans glisser. Enfin, dans le Chapitre VII qui termine le Livre, il développe la théorie des petits mouvements; s'appuyant sur les propriétés des formes quadratiques, il établit d'une façon très élégante la réalité des racines de l'équation en s.

Abordons maintenant le Livre VI : Dynamique des systèmes invariables. Le premier Chapitre renferme la théorie classique des moments d'inertie; le Chapitre suivant traite de la rotation d'un solide autour d'un axe fixe. Signalons notamment dans ce Chapitre : la discussion du mouvement du métronome, la définition

du centre de percussion au moyen de la composition des forces d'inertie, l'étude du fusil-pendule, une analyse très complète de la machine d'Atwood, le poids des fils n'étant pas considéré comme négligeable. Dans le Chapitre III, l'Auteur étudie le mouvement d'un cylindre pesant, glissant ou roulant sur un plan horizontal; dans le cas du roulement, et lorsqu'on se borne aux petites oscillations, la formule de Savary permet une vérification remarquable des résultats. Choisissons un cylindre circulaire, convenablement lesté; nous aurons réalisé, dans ses grandes lignes, l'appareil Desdouits qui permet de mesurer l'accélération d'un train.

Le Chapitre suivant, le plus important de tout le Volume, est consacré au mouvement d'un solide autour d'un point fixe. M. Lecornu établit d'abord directement les équations d'Euler et les retrouve comme conséquences des équations de Lagrange; puis il arrive au mouvement à la Poinsot qu'il étudie analytiquement au moyen des fonctions de Jacobi. Passant à la représentation géométrique, l'Auteur établit par une méthode extrêmement simple que l'herpolhodie n'a ni inflexions, ni rebroussements. Viennent ensuite l'étude de la stabilité du mouvement, la discussion des cas particuliers et, comme généralisation, l'étude du roulement d'un ellipsoïde quelconque sur un plan fixe; par une habile discussion, M. Lecornu obtient des cas très étendus où le mouvement suit la loi de Poinsot. La théorie suivante se rapporte au solide pesant de révolution suspendu par un point de son axe; l'Auteur s'arrête un instant sur la théorie du chemin de fer monorail; puis il étudie en détail l'effet gyroscopique et ses principales applications : applications au monorail lui-même, aux navires, aux aéroplanes, aux torpilles. Le gyroscope de Foucault, le barogyroscope de Gilbert, et l'hélice d'aéroplane sont traités par des méthodes synthétiques élémentaires. Nous arrivons maintenant au pendule sphérique composé; cette fois, l'intégration par un nombre fini de fonctions élémentaires est généralement impossible; M. Lecornu se limite donc aux petits mouvements; le système différentiel qui leur correspond possède trois solutions privilégiées où l'axe instantané est fixe. L'Auteur étudie complètement ces mouvements par une méthode des plus élégantes et qui mériterait de rester classique. Enfin, le Chapitre se termine par des considérations sur l'effet des percussions; l'Auteur signale notamment une circonstance para-

doxale à propos de l'application sur un gyroscope d'une percussion normale à l'axe. La solution du paradoxe exige l'introduction d'une hypothèse supplémentaire; cet exemple montrera au lecteur qu'il doit se méfier des solutions toutes faites et qu'un problème de Mécanique ne se résout pas seulement grâce à la juxtaposition automatique de quelques formules.

Le Chapitre V donne quelques détails sur le mouvement de la toupie; quant au Chapitre suivant, il étudie le mouvement d'un solide entièrement libre. Après quelques détails sur la méthode générale, l'Auteur envisage deux cas particulièrement remarquables : le mouvement de la terre et celui d'un projectile. Le globe terrestre peut être considéré comme provenant de la réunion de deux solides : l'un d'eux serait exactement sphérique; l'autre, le renflement équatorial, pourrait être assimilé à un tore. Cet artifice permet d'étudier aisément l'action du soleil sur le renflement; il suffit alors d'un calcul très simple pour établir l'existence de la précession des équinoxes. Suivant la parole de M. Lecornu, « ce phénomène constitue à lui seul une preuve décisive de la rotation terrestre »; et l'on pourrait ajouter que son explication rationnelle est un des plus beaux fleurons de la Mécanique. Bornons-nous à constater que l'apparition de cette démonstration dans un cours destiné à de futurs techniciens constitue la plus belle réponse que l'on puisse faire aux partisans de l'enseignement utilitaire et « pratique ». Le second phénomène étudié par M. Lecornu possède, hélas! un caractère beaucoup moins philosophique : il s'agit du tir des projectiles oblongs; une discussion très simple permet de retrouver les principaux faits expérimentaux et, notamment, d'expliquer la dérivation des projectiles à gauche, ou à droite (suivant le sens des rayures du canon).

Le Chapitre VII est le dernier du Livre; il se rapporte au mouvement d'un système déformable. L'Auteur traite deux exemples : la cage d'écureuil et l'escarpolette. La discussion de la seconde question est particulièrement délicate; elle repose essentiellement sur une formule qui permet de calculer l'accroissement de l'énergie totale du système formé par l'escarpolette et l'acrobate; il est intéressant de constater que l'expérience justifie pleinement les conséquences de la formule.

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que des solides abstraits;

or une question se pose, qu'il est impossible d'éluder : les résultats acquis peuvent-ils s'appliquer — et moyennant quelles modifications — aux solides réels? La réponse résultera du Livre VII. Ce Livre est divisé en deux Chapitres : le premier consacré au frottement, roulement et pivotement; le second, au choc de deux solides.

Au point de vue analytique, la caractéristique du frottement est d'introduire des discontinuités dans les équations du mouvement et, par suite, dans la discussion : c'est ce qui ressort pleinement de l'étude du mouvement d'un cylindre pesant sur un plan incliné dépoli. L'Auteur traite encore d'autres problèmes classiques : celui du cerceau, de la bicyclette et de la bille de billard. L'étude de la rotation rapide d'un corps de révolution qui glisse sur un plan dépoli met en évidence, une fois de plus, les propriétés paradoxales de l'effet gyroscopique. Le frottement, lui-même, obéit à une loi remarquable, en vertu de laquelle « les systèmes matériels cherchent à échapper au frottement ». L'étude des réactions mutuelles d'un ensemble de sphères rugueuses conduit l'Auteur à énoncer le résultat précédent sous la forme précise que voici : « L'état final est tel que le travail de frottement dans l'unité de temps soit le plus petit possible. » Enfin M. Lecornu termine cette étude sur le frottement par diverses applications à des problèmes usuels : les mouvements louvoyants, la résistance au roulement, le tirage d'un véhicule et le démarrage d'une locomotive. Dans chaque cas, les conclusions obtenues admettent une vérification expérimentale complète.

Le second Chapitre, avons-nous dit, se rapporte au choc de deux corps solides. L'Auteur analyse d'abord en détail le choc, direct ou non, de deux sphères, molles ou élastiques, polies ou rugueuses; il met en pleine lumière le rôle important du frottement dans la percussion, puis il étend les résultats obtenus aux solides de formes quelconques, et il traite divers problèmes pratiques, comme le choc d'une roue contre un obstacle, le battage des pieux de fondation. Toute cette théorie repose d'ailleurs sur une hypothèse implicite : « un corps solide qui vient d'éprouver une percussion quelconque se meut en conservant les propriétés d'un corps solide » ; et, suivant la remarque de l'Auteur, cette hypothèse

ne serait plus valable si certaines dimensions des solides devenaient très grandes.

Mais il peut se présenter d'autres difficultés, encore plus profondes; proposons-nous, par exemple, d'étudier le mouvement d'un disque circulaire non homogène, lancé sans rotation initiale, dans un plan vertical, au contact d'une planche horizontale. Si l'on admet que les deux solides sont absolument rigides, on arrive à cette conclusion que la loi de Coulomb est en contradiction avec les préceptes de la Mécanique rationnelle. On pourrait tourner la difficulté en remplaçant la loi de Coulomb par d'autres lois, convenablement choisies; M. Lecornu procède différemment. D'après lui, le coefficient f n'atteindrait pas instantanément sa valeur maximum; il faudrait tenir compte des aspérités des solides; et l'on aurait au début du phénomène une période préparatoire très complexe, mais de durée extrêmement courte. On voit comment un exemple judicieusement choisi suffit à M. Lecornu pour prémunir son lecteur contre les dangers qu'offrirait une application abusive des lois de la Mécanique rationnelle; et c'est là une constatation importante pour le philosophe, le géomètre et l'ingénieur.

Et ainsi, par une transition graduelle, l'étude des solides naturels nous conduit à la théorie de l'élasticité qui forme l'objet du Livre VIII. Le premier Chapitre de ce Livre contient la théorie classique de la déformation d'un système continu. Le Chapitre suivant se rapporte à l'étude des tensions intérieures; M. Lecornu appelle *tension* ce que d'autres auteurs désignent sous le nom d'*effort;* suivant le signe de la tension, il distingue des *tractions* et des *pressions*. Il obtient les équations classiques par deux méthodes différentes : l'une repose sur l'emploi du parallélépipède et du tétraèdre élémentaires; l'autre utilise le théorème du travail virtuel dont la généralité et la puissance apparaîtront ainsi, de plus en plus, au lecteur. Indiquons à ce sujet une innovation intéressante de M. Lecornu : il introduit les notations

$$\int_2 f(x, y)\sigma \qquad \text{et} \qquad \int_3 f(x, y, z)\omega$$

pour remplacer respectivement

$$\int\int f(x, y)\,dx\,dy \qquad \text{et} \qquad \int\int\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Le principe de cette simplification nous semble très heureux; il correspond d'ailleurs à la simplification analogue que l'on emploie pour les différentielles d'ordres supérieurs. Pourtant, deux détails nous paraissent susceptibles d'être améliorés; tout d'abord, il nous paraît préférable de conserver à droite du signe intégral le symbole de la différentiation; de plus, l'indice semble mieux placé en haut de l'intégrale, afin d'éviter une confusion possible avec le champ d'intégration. Après ces légères modifications on écrirait donc

$$\int^{2} f(x, y)\, d\sigma, \qquad \int^{3} f(x, y, z)\, d\omega$$

et, d'une façon générale,

$$\int^{m} f(x_i)\, d\omega_m,$$

ou, si l'on préfère,

$$^{m}\!\!\int f(x_i)\, d\omega_m.$$

Le Chapitre III débute par la définition de l'état naturel et l'énoncé de la loi de Hooke; à l'aide d'une méthode analytique très simple, l'Auteur étudie le cas des corps isotropes; il introduit les coefficients λ et μ et donne quelques brèves indications sur leurs signes. Avec le Chapitre IV nous voyons apparaître les équations classiques de l'équilibre, les théorèmes généraux sur la superposition des états d'équilibre et l'unicité de la solution. Beaucoup d'élèves sont rebelles à la notion de potentiel élastique; M. Lecornu l'introduit d'une façon très heureuse; l'application au cas d'un ressort dissipera toute obscurité dans l'esprit du lecteur. Signalons encore un aperçu général sur la stabilité et une explication très intéressante d'une contradiction apparente dans l'application du théorème du travail virtuel.

Les Chapitres V et VI sont réservés aux applications. Dans le premier de ces deux Chapitres, l'Auteur étudie la compression normale et uniforme, l'extension longitudinale, l'équilibre d'une couche cylindrique ou sphérique, le frettage et la torsion. Il termine par une belle étude sur une solution approchée de l'équilibre d'une meule tournante. Quant au Chapitre VI, il se rapporte au problème de Barré de Saint-Venant dont l'Auteur passe en revue les six cas élémentaires et le cas général. L'étude de la courbe

élastique est ramenée au problème du mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

Enfin, dans le Chapitre VII, M. Lecornu aborde l'étude du mouvement des corps élastiques; se limitant plus spécialement au mouvement par ondes planes, il étudie le phénomène de la propagation de la lumière, d'abord dans un milieu isotrope, puis dans un cristal. Quelques formules suffisent à l'Auteur pour caractériser dans leurs grandes lignes les phénomènes de double réfraction et de polarisation; l'élève aura ainsi une base solide pour attaquer l'Optique supérieure.

Arrivons enfin au Livre IX, le dernier du Tome; il traite de la mécanique des fluides et débute par un Chapitre consacré à l'Hydrostatique. L'Auteur obtient l'équation fondamentale de cette théorie comme conséquence des équations générales de l'élasticité et de la définition du fluide; puis il retrouve ces équations par une méthode élémentaire fondée sur le théorème du travail virtuel; ces équations peuvent d'ailleurs se condenser en une seule, dont la forme présente une analogie curieuse avec une équation de la théorie des fils. Viennent ensuite le principe de Pascal, la formule barométrique, l'équilibre d'un liquide dans un vase tournant, le principe d'Archimède et une discussion complète de l'équilibre et de la stabilité des corps flottants.

Le Chapitre II se rapporte aux équations de Lagrange et d'Euler, ainsi qu'à leurs applications à la houle et au clapotis. L'Auteur aborde en outre d'autres questions, telles que la réversibilité du mouvement, la propagation des discontinuités, l'étude des conditions à réaliser pour que la force vive d'un liquide indéfini conserve une valeur finie. Avec le Chapitre suivant nous voyons apparaître la théorie classique des équations de Helmholtz, des tourbillons et des mouvements giratoires. Le cas d'un liquide soumis uniquement à la pesanteur donne lieu à une application élégante; l'étude du sens de rotation des cyclones établit un lien inattendu entre cette théorie et celle du pendule de Foucault.

Dans le Chapitre IV, l'Auteur s'occupe du mouvement permanent; il démontre, par trois méthodes distinctes, la relation $H = \text{const.}$; d'où résulte, pour les liquides, le théorème de Bernoulli. Le cas des fluides compressibles exige une discussion spé-

ciale; M. Lecornu donne les formules de Navier et de Zeuner, puis il étudie la vitesse d'un filet gazeux sortant d'un réservoir.

Le Chapitre V roule sur le paradoxe de d'Alembert; une méthode due à M. Painlevé permet d'établir que, pour un fluide incompressible, le régime permanent est atteint au bout d'un temps fini; l'explication du paradoxe se trouve ainsi affranchie de toute objection. Lorsque le solide en mouvement est une sphère, on peut obtenir, sous forme finie, les équations des trajectoires et l'expression de la masse apparente. En réalité, l'expérience ne confirme pas complètement tous les résultats de la théorie. C'est qu'il faut tenir compte de la viscosité dont l'étude remplit le dernier Chapitre du Tome. L'irréversibilité du mouvement résulte immédiatement des équations générales établies par l'Auteur; la détermination des nouveaux coefficients λ_1 et μ_1 qui figurent dans ces équations conduit à un problème intéressant, d'où résultent les lois de Poiseuille. Comme le remarque M. Lecornu, le rôle de la viscosité dans la nature est des plus importants; il permet d'expliquer un grand nombre de phénomènes qui, autrement, seraient incompatibles avec les lois générales de l'Hydrostatique.

Ainsi donc, nous retrouvons dans ce Tome, en plus accentué, tous les caractères distinctifs du premier Tome. A la lecture, une impression s'en dégage, très vivante. Peut-être pourrait-on souhaiter un choix d'exercices plus varié et une bibliographie plus étendue. Mais, pour être complet sous ce dernier rapport, M. Lecornu n'aurait eu qu'à se citer lui-même; aussi bien, un grand nombre des résultats élégants que nous avons mentionnés lui appartiennent en propre; ils font partie de ses brillants travaux. Et, ce qui augmente leur valeur, chacun de ces résultats a sa raison d'être; à chacun d'eux correspondent un ensemble de faits expérimentaux qui l'éclairent nettement et, en même temps, lui doivent leur coordination. Et, s'il fallait esquisser brièvement la physionomie caractéristique de la Mécanique de M. Lecornu, il nous semble qu'on pourrait la dépeindre comme un parallélisme constant entre les hypothèses physiques et les développements analytiques; comme un commerce incessant, une harmonie intime et profonde entre les faits et les nombres.

René Garnier.

BLUTEL (E.). — LEÇONS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES à l'usage des candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale supérieure et des étudiants des Facultés des Sciences. Tome I : *Algèbre, ligne droite et plan, Trigonométrie, Analyse, Applications géométriques.* Tome II : *Géométrie analytique des courbes et des surfaces.* 2 vol. in-8 : t. I, VII-635 ; t. II, IV-430. Paris, Hachette et Cie, 1914.

1. Les deux Volumes que nous avons l'honneur de présenter aux lecteurs du *Bulletin* sont la rédaction des leçons de Mathématiques spéciales, professées pendant de longues années au Lycée Saint-Louis, avec l'éclat et le succès qu'on sait, par M. Émile Blutel, actuellement Inspecteur général de l'Instruction publique.

La matière est naturellement celle du programme d'admission aux grandes Écoles, tel qu'il a été arrêté en 1903, par une Commission interministérielle dont M. Émile Blutel faisait lui-même partie.

Les instructions jointes au programme laissent au professeur toute latitude dans le choix de l'ordre des matières. M. Blutel a profité de cette latitude pour fondre les unes dans les autres des parties du programme séparées par leurs titres, mais qui se tiennent par le fond.

C'est ainsi que la Géométrie analytique de la ligne droite et du plan appartient à la théorie des formes linéaires, tandis que celle des coniques et des quadriques appartient par divers côtés à la théorie des formes quadratiques.

L'Auteur n'a donc pas divisé strictement son cours en Algèbre et en Géométrie; les questions de géométrie sont placées fort à propos après les théories d'algèbre auxquelles elles servent d'illustration. Outre que cette pratique atténue l'aridité des questions d'algèbre par la vie que la géométrie leur donne, les élèves y trouvent l'avantage de voir se révéler à eux les étroites connexités qui relient entre elles des notions mathématiques en apparence très distantes. Par ce moyen, les connaissances des élèves, au lieu de se cantonner en leur cerveau dans des alvéoles séparées par des cloisons étanches, défaut que les examens manifestent trop, se trouvent au contraire mises au contact les unes avec les autres. L'élève apprend ainsi à savoir profiter pour chaque question spé-

ciale, de tous les concours que l'ensemble de ses connaissances peut lui donner.

2. Nous ne pouvons songer ici à parcourir point par point la chaîne si serrée des matières traitées. Nous devons nous borner aux questions les plus essentielles ou les plus saillantes.

Mais il nous semble nécessaire auparavant de mettre en relief les qualités générales, qui se trouvent en facteur commun de chaque question particulière, et qui contribuent à donner à cet Ouvrage sa haute valeur scientifique aussi bien que professorale.

La grande difficulté de cet enseignement, c'est d'arriver à y réaliser à la fois ces trois vertus, aux tendances contradictoires : rigueur logique, clarté, concision.

3. La rigueur logique, cela va de soi. Car cet enseignement n'est pas encore tombé, dieu merci !, dans ce courant d'utilitarisme conciliant, indulgent aux solécismes de logique. Tolérance bien trompeuse d'ailleurs, car les habitudes de précision qui accompagnent l'esprit de rigueur sont au moins aussi nécessaires au technicien, qui a besoin d'un nombre exact, qu'au théoricien qui désire avoir une preuve correcte.

4. La clarté aussi est une vertu essentielle, surtout devant un jeune auditoire; sans elle il n'est pas d'enseignement qui puisse porter.

Il est banal de dire que telle manière, excusable dans un Mémoire académique, destiné à être lu à tête reposée par des savants de profession, serait détestable dans l'enseignement.

Et cependant il n'est pas banal de dire qu'il ne suffit pas, pour édifier un bon enseignement, d'entasser pendant des pages des ε, des $\frac{\varepsilon'}{2}$, des θ, pour arriver à conclure que $|f(\lambda)| < \varepsilon$. Ce mécanisme d'inégalités qu'on fait jouer automatiquement, sans qu'il y ait rien à reprendre, mais où chaque passage d'un maillon à l'autre n'assujettit l'esprit qu'à une constatation passive, force en quelque sorte l'adhésion sans la rendre spontanée.

On doit procéder d'autre sorte : prévenir d'abord de la route qu'on veut suivre; en jalonner les étapes; marquer les points saillants et éclairer les abords. La vérité qu'on veut atteindre se trouve

alors exactement située dans l'ensemble des circonstances qui sont sa raison d'être et elle apparaît à cet instant avec clarté.

Rien n'aide mieux à ce but que de savoir mettre adroitement en relief l'instant où intervient chacune des hypothèses qui servent de base à la proposition et le rôle exact qu'elle joue dans la démonstration.

Nous avons dit adroitement, c'est-à-dire non lourdement; il suffira souvent d'une proposition incidente ou d'un mot judicieusement choisi. C'est là qu'on s'aperçoit bien que les Mathématiques ont leur style et que *le style c'est l'homme*, c'est-à-dire ici, la caractéristique du professeur.

5. La nécessité des mots exacts et des termes propres est encore imposée par l'obligation où se trouve le maître de renfermer en un temps limité l'exposition d'un programme étendu et qui ne laisse pas cependant d'être assez profond.

Aussi, même si un goût affiné n'engendrait pas naturellement l'élégance du style, la sveltesse des procédés, ces qualités devraient résulter de la recherche réfléchie de la concision.

Malgré l'insuffisance de l'esquisse rapide que nous venons de tracer des qualités maîtresses qui rapprochent le plus un enseignement de sa perfection, on a dû juger que nous avions sous les yeux un modèle.

En parcourant l'Ouvrage de M. Blutel, plus d'un lecteur appréciera sans doute que nous avons laissé dans l'ombre encore bien des traits.

Certains détails en effet échappent à l'analyse; surtout à une analyse aussi réduite que celle qui nous est commandée par la place dont nous disposons ici.

6. Le premier Volume traite de l'Algèbre, de la Ligne droite, du Plan, de la Trigonométrie, puis de l'Analyse avec applications géométriques.

Signalons dès le début la légèreté de touche avec laquelle sont traitées les notions quelque peu ingrates de coupure, de nombre irrationnel. La rigueur y est, avec aussi un éveil d'intuition.

Dans la théorie des vecteurs, l'Auteur a eu soin de faire précéder par une exposition géométrique l'ensemble des formules qui tra-

duisent algébriquement cette théorie. C'est là une mesure excellente qui devrait être adoptée à propos de toutes les questions de Géométrie.

Rien n'est plus préjudiciable à une théorie géométrique que de la couler *prématurément* dans un moule d'Algèbre. Les notions essentielles deviennent du premier coup des entités numériques et les relations entre ces notions, au lieu de tirer leur raison d'être des circonstances propres à la Géométrie, ne sont que des résultats de combinaisons algébriques. Cet analyticisme universel serait mortel pour la Géométrie si des esprits mesurés n'en montraient l'écueil et, comme l'Auteur de cet Ouvrage, n'employaient leur autorité à prêcher par l'exemple.

C'est du reste en partie contre cet abus qu'a été opérée la réforme des programmes de 1903. Mais il n'appartient pas aux seuls auteurs des programmes de le faire disparaître. De bonnes traditions d'enseignement valent mieux que toutes les réformes.

7. A propos de la théorie des fonctions, où les découvertes modernes ont apporté des manières de voir et des notions à la fois si fines et si complexes, l'Auteur a su choisir judicieusement les conceptions qu'il pouvait utilement introduire sans rendre par trop compliquée et rebutante pour de jeunes élèves cette partie de son enseignement.

La notion d'ensemble qui s'est déjà rencontrée à propos des nombres incommensurables, se retrouve ici avec des attributs nouveaux. L'Auteur utilise en particulier celle d'ensemble *dense* au voisinage d'un point, qui sert de base à une exposition précise et, somme toute, assez simple de la théorie des fonctions.

8. Parmi les questions traitées dans le premier Volume il nous paraît nécessaire de nous arrêter spécialement sur les méthodes d'approximation, en particulier sur les méthodes graphiques et la méthode de Newton. M. Blutel étudie avec soin les conditions dans lesquelles la méthode de Newton fournit une valeur plus approchée que la valeur d'où l'on part, au lieu de se borner, comme on le fait souvent, à rechercher le sens de l'approximation.

L'Auteur va même plus loin, car, dans un de ses paragraphes,

écrits en caractères plus fins, destinés aux lecteurs de force plus avancée, il donne une très ingénieuse généralisation de la méthode de Newton. Cette méthode nouvelle, valable même dans le cas d'une racine multiple, offre l'avantage de fournir une suite qui converge plus rapidement vers la valeur désirée.

Mais c'est surtout à propos d'une question épineuse inaugurée par le nouveau programme, sur l'extension de la méthode de Newton au cas de deux équations à deux inconnues, que l'originalité du savant professeur s'est manifestée. Son procédé a du reste été déjà publié par lui-même aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences. Les lecteurs du Traité seront heureux de retrouver cette méthode mise en quelques pages à la portée des élèves.

La même méthode pourrait, ainsi que l'indique l'Auteur, être transportée au cas de n équations entre n inconnues.

9. Le second Volume de ces Leçons traite de la Géométrie analytique des courbes et des surfaces.

M. Blutel indique d'abord comment la considération des points à l'infini conduit naturellement à adopter le système des coordonnées homogènes, lequel est lié à la conception de la droite dite de l'infini ou du plan de l'infini. Après avoir défini le rapport anharmonique de quatre nombres, l'Auteur s'empresse de montrer quelle vie spéciale cette notion reçoit de la Géométrie. La considération de l'homographie et de l'involution donne toute sa valeur à cette importante notion, dont l'introduction en Géométrie a eu pour effet, entre les mains de l'illustre Chasles, de renouveler entièrement cette Science. C'est pourquoi les amis de la Géométrie, à commencer par Chasles lui-même, n'ont cessé de déplorer l'analyticisme insensé dans lequel certains maîtres font verser l'enseignement de ces questions. Les Ouvrages allemands, comme celui de Clebsch par exemple, ont porté au plus haut point l'abus de ce système. Les résultats auprès des élèves sont trop flagrants pour pouvoir être niés. A l'examen ceux-ci sont impuissants à sortir du nombre et j'en ai vu qui, après avoir disserté algébriquement sur ces questions, étaient incapables de montrer que les quatre sommets d'une ellipse sont en relation harmonique.

On pense bien que, si je signale ici ces travers, c'est parce que

M. Blutel, que ses travaux scientifiques classent parmi nos fins géomètres, est trop averti pour s'y laisser aller. Le bon oreiller qu'est, pour certains, l'Algèbre ne saurait suffire à sa haute et délicate conscience d'éducateur. Parlant Géométrie, c'est l'esprit géométrique qu'il prétend enseigner et non pas un automatique déroulement de films algébriques. On lira avec plaisir et avec profit les leçons où il traite des applications géométriques du rapport anharmonique; des enveloppes de seconde classe dans le plan et dans l'espace, des génératrices des quadriques, du rapport anharmonique sur une conique. Dans cette dernière question, on remarquera le soin avec lequel l'Auteur, ayant pris comme point de départ la représentation paramétrique de la conique, s'empresse de bien montrer que la notion est, en fait, indépendante du choix de cette représentation, lequel peut être varié à l'infini, de façon à s'adapter à toutes les interprétations géométriques.

10. Signalons, pour terminer, une intéressante étude sur l'intersection de deux quadriques et sur les cas particuliers que cette intersection peut présenter.

Il convient d'ajouter que de nombreux exercices, avec indication sommaire de solutions pour quelques-uns, terminent chaque leçon et qu'en outre le second Volume contient la longue série des problèmes proposés aux concours des grandes Écoles et à celui de l'Agrégation des Sciences mathématiques.

Tous ceux qui liront ce bel Ouvrage, fruit mûr d'une carrière toute de labeur savant et réfléchi et de consciencieuse expérience, comprendront les sentiments de regrets avec lesquels le Lycée Saint-Louis a vu s'éloigner, pour des fonctions plus hautes, un maître dont le zèle et le talent ont si puissamment contribué à maintenir le succès et le renom de cette ancienne et illustre maison.

G. Koenigs.

MÉLANGES.

LES ÉTUDES EXPÉRIMENTALES SUR LA RÉSISTANCE DE L'AIR. LES TRAVAUX FRANÇAIS;

Par M. L. MARCHIS,
Professeur d'Aviation à la Sorbonne.

CHAPITRE I.

Les méthodes expérimentales.

I. — Réactions exercées par l'air sur un corps en mouvement relatif par rapport a lui.

Lorsqu'un corps est en mouvement relatif par rapport à l'air dans lequel il est plongé, il est soumis à un ensemble de forces, auxquelles on donne le nom de *réactions exercées sur le corps par cet air*. Ces réactions sont éminemment variables *suivant la forme du corps; suivant la position qu'il occupe par rapport au fluide environnant; suivant les diverses circonstances de son mouvement* (temps écoulé entre l'origine du mouvement et l'état actuel; vitesse relative par rapport à l'air); *suivant enfin la masse du fluide qui environne le corps en mouvement.*

Nous ne nous étendrons pas sur les difficultés que présente chacun de ces problèmes, dont quelques-uns n'ont reçu que des solutions très imparfaites.

Nous ne considérons, dans ce qui va suivre, que *le cas d'un corps environné de toutes parts d'une grande masse d'air, par rapport à laquelle il est animé, depuis un temps assez long, d'un mouvement dont, à tout instant, la vitesse et la direction sont constantes et faciles à déterminer.*

Les réactions exercées par l'air sur le corps en mouvement relatif par rapport à lui se réduisent à une force et à un couple. Nous admettrons que le corps en expérience possède au moins un

plan de symétrie, de manière à annuler le couple des réactions de l'air et à réduire les réactions à une force unique, à laquelle nous donnerons le nom de *résistance de l'air sur le corps en mouvement relatif par rapport à lui.*

Quand nous considérons le mouvement relatif d'un corps par rapport à l'air qui l'environne, nous n'avons pas seulement en vue un mouvement de translation, mais encore un mouvement de rotation seul, et un mouvement de rotation combiné avec un mouvement de translation. En d'autres termes, nous étudierons ici le problème des hélices en même temps que celui des ailes d'aéroplanes.

II. — Comment on produit le mouvement relatif d'un corps par rapport a l'air environnant. Corps mobile.

Divers modes expérimentaux peuvent être mis en œuvre pour produire le mouvement d'un corps par rapport à l'air ambiant.

Dans une *grande masse d'air immobile* dans son ensemble, on donne au corps :

a. Soit un mouvement de translation rectiligne ;

b. Soit un mouvement de rotation autour de l'axe d'un manège ;

c. Soit un mouvement pendulaire.

Les méthodes du manège et du pendule ont été peu employées en France ; nous les laisserons de côté.

La méthode du *mouvement de translation* peut être appliquée sous deux formes :

1° *Ou bien on produit la chute libre du corps dans un air aussi calme que possible ;*

2° *Ou bien on fait porter le corps par un chariot, qui se déplace dans l'air calme.*

a. En France, la méthode de la *chute libre* a donné lieu à des expériences importantes faites par MM. Cailletet et Colardeau et surtout par M. G. Eiffel.

Les premiers expérimentateurs ont déterminé la vitesse du

mouvement uniforme qui succède au mouvement varié; à cette vitesse correspond une résistance de l'air égale au poids du corps.

M. Eiffel enregistre les valeurs de la vitesse de chute et de la résistance de l'air à chaque instant de cette chute.

La surface étudiée, un plan par exemple, tombe en chute libre en restant horizontale; elle est supportée par un ressort dont les déplacements sont inscrits sur un cylindre tournant avec une vitesse proportionnelle à la vitesse de chute du système étudié. La compression du ressort par l'effet de la résistance de l'air donne naissance à une force qu'un tarage convenable permet de connaître en fonction des déplacements de ce ressort. Cette force fait équilibre :

1° Au poids du système;
2° Aux forces d'inertie qui agissent sur lui;
3° A la résistance de l'air.

Il est donc possible de calculer cette dernière force lorsque l'on connaît l'accélération du système à chaque instant de sa chute. Il suffit pour cela d'inscrire, au moyen d'un diapason, les durées de la chute sur le cylindre même où se trouvent repérées les compressions du ressort.

b. La *méthode du chariot* est utilisée actuellement à l'Institut aérotechnique de Saint-Cyr, au Laboratoire d'Aérostation militaire de Chalais-Meudon, et chez M. le duc de Guiche.

A Saint-Cyr et à Chalais-Meudon, le chariot porteur est constitué par un wagon, qui se meut sur rails. M. de Guiche emploie comme chariot porteur une automobile.

Le chariot de Saint-Cyr employé pour les *essais de voilures et d'aéroplanes* est un tracteur électrique de 5 tonnes muni d'un moteur de 130 chevaux. Il roule sur une voie ferrée (écartement normal) de 1350^{m} de longueur avec une vitesse maxima de 20 m : sec.

Le chariot a été muni d'un montage spécial articulé permettant d'enregistrer :

1° La composante verticale de la résistance de l'air ou *poussée;*
2° La composante horizontale ou *traînée* (l'ensemble définit la résistance de l'air en grandeur);

3° Un couple de rotation duquel on déduit par une épure la position de la résistance de l'air.

La vitesse relative du corps en essais par rapport à l'air est déterminée en mesurant la vitesse absolue du chariot par rapport au sol et en ajoutant ou retranchant de cette vitesse la vitesse du vent suivant la direction de la ligne sur laquelle se déplace le chariot.

Dans ce même laboratoire de Saint-Cyr, un chariot spécial sert pour l'étude des *hélices*. Celles-ci, montées en grandeur normale, servent à propulser le chariot. La rotation des hélices est obtenue au moyen d'un moteur électrique de 80 chevaux. Des appareils convenables (dynamomètres et wattmètres) permettent de mesurer, pendant la marche, la traction de l'hélice et la puissance absorbée.

Le chariot à hélices du laboratoire de Chalais-Meudon est analogue à celui de Saint-Cyr.

Sur la voiture automobile du laboratoire de Guiche, deux montants verticaux portent à leurs extrémités supérieures un axe horizontal, sur lequel sont installées les diverses plaques mises en expérience. Pour soustraire les corps en essais à l'influence des remous produits par la carrosserie, les supports sont élevés et ramenés vers l'arrière.

c. Une variante de la méthode du chariot a été installée au Laboratoire d'Aviation militaire de Vincennes. Sur un câble tendu roule un petit véhicule, qui porte accrochés au-dessous de lui les appareils en essais avec les instruments de mesure.

Les dimensions des corps, sur lesquels se font les essais que nous venons d'indiquer, peuvent être de l'ordre de celles qui sont utilisées en Aviation. En d'autres termes, on peut opérer sur des appareils d'aviation véritables, ou présentant du moins des dimensions peu différentes de certains appareils de la pratique.

A ce point de vue, la méthode du déplacement dans l'air, que nous avons caractérisée, a un champ d'investigation plus étendu que la méthode du *courant d'air artificiel*.

III. — Comment on produit le mouvement relatif d'un corps par rapport a l'air. Courant d'air artificiel.

On peut, en effet, réaliser d'une autre manière le mouvement relatif d'un corps dans l'air.

Au lieu de mouvoir le corps en expérience, on lui donne une *position fixe* et on le place dans *un courant d'air artificiel.*

A. Le corps est disposé, à l'air libre, devant la buse de sortie du courant d'air régularisé au moyen d'artifices convenables. Cette méthode est celle qui a été employée par M. Rateau.

B. Le corps à étudier est enfermé dans une enceinte faisant partie intégrante de l'appareil de régularisation du courant d'air. Il est placé, par exemple, dans la partie d'un gros tuyau cylindrique recevant un courant d'air produit par un ventilateur, et dont la vitesse, à une certaine distance des parois, a été rendue sensiblement parallèle à l'axe du tuyau.

Cette méthode subit d'ailleurs des variantes.

a. Le corps en expérience seul se trouve dans l'enceinte à l'intérieur de laquelle circule le courant d'air artificiel; les appareils de mesure des réactions de l'air sont à l'extérieur de cette enceinte; leurs commandes traversent la paroi solide qui la limite.

Cette méthode est connue sous le nom de *méthode du tunnel;* elle a été peu appliquée en France. Il existe actuellement, à l'Institut aérodynamique de Saint-Cyr, un tunnel dont la mise au point a été interrompue par la guerre.

b. L'appareil à circulation d'air s'élargit en une grande chambre, traversée entre deux de ses parois parallèles par un cylindre d'air. A l'extérieur de celui-ci et à l'intérieur de la chambre se trouvent les appareils de mesure et les expérimentateurs.

Nous proposons de donner à cette méthode le nom de *méthode de M. Eiffel.*

La méthode du courant d'air artificiel, qui a donné des résultats très importants, doit être appliquée avec certaines précautions sur lesquelles nous allons insister.

1° *Il faut que le modèle soit plongé dans une masse d'air théoriquement indéfinie, pratiquement très grande, et de vitesse constante en grandeur et en direction.*

La section du cylindre d'air doit être assez grande pour que, à la périphérie, la vitesse de l'air soit sensiblement la même, en grandeur et en direction, que celle de l'air qui n'a pas encore approché de l'obstacle. Dans cette méthode, il est donc nécessaire de réaliser d'abord un *courant cylindrique*, puis d'introduire dans ce courant un corps de dimensions assez faibles pour que sa présence ne trouble pas d'une manière sensible la périphérie du courant. L'expérience a démontré que le rapport de la plus grande dimension des modèles au diamètre du courant cylindrique ne devait pas dépasser 45 pour 100.

2° *Il faut en outre que le modèle à étudier soit pratiquement isolé dans le vent*, c'est-à-dire que le support du modèle ne joue qu'un rôle négligeable et n'introduise qu'une perturbation de peu d'importance.

3° *Il importe que le modèle adopté ne soit pas trop petit si l'on veut pouvoir étendre, dans une certaine mesure, aux appareils en vraie grandeur, les résultats obtenus avec les petits modèles.*

En effet quand on étudie la répartition des pressions en divers points d'une plaque par exemple, soit sur la face soumise directement à l'action du vent, soit sur la face opposée, on voit que cette répartition n'est régulière qu'à une certaine distance des bords. Il existe, soit à l'avant, soit à l'arrière, toute une zone centrale dans laquelle s'établit un régime régulier, qui se manifeste par des isobares parallèles au bord d'attaque. Pour qu'on puisse étudier cette zone centrale, il est nécessaire que les dimensions de la plaque en essais soient suffisantes. En effet, l'épaisseur de la zone marginale, dans laquelle les pressions sont irrégulièrement distribuées, ne varie pas proportionnellement aux dimensions de la plaque. Les expériences de M. de Guiche montrent que cette épaisseur varie peu avec les dimensions de la plaque. En opérant sur des plans peu épais, rectangulaires, à bord d'attaque perpendiculaire à la vitesse, M. de Guiche a trouvé que les bandes marginales troublées avaient une largeur sensiblement constante, égale à $0^m,20$ pour l'avant, à $0^m,40$ ou $0^m,50$ pour l'arrière; il en conclut qu'il est

bon de n'opérer qu'avec des plans d'envergure au moins égale à 1^m. En étudiant les surfaces courbes, M. de Guiche a trouvé des bandes marginales troublées, dont la largeur assez uniforme ne dépasse guère $0^m,20$ sur les deux faces; il convient donc de n'opérer qu'avec des surfaces dont l'envergure est supérieure à $0^m,40$. Quand on opère avec des envergures moindres, les résultats obtenus avec les petits modèles ne renseignent pas d'une manière suffisamment précise sur les résultats que donneraient des ailes d'aéroplane de grandeur normale; sur les trop petits modèles le mode de répartition des pressions n'a qu'un rapport très éloigné avec ce qu'on observerait sur des ailes véritables.

Cette condition de n'expérimenter que des modèles de dimensions suffisantes conduit, dans la méthode du courant d'air artificiel, à employer de grandes sections de cylindres d'air. On ne peut en effet étudier les plans de 1^m d'envergure que dans un cylindre d'air dont le diamètre est supérieur à $\frac{100}{0,45} = 200^{cm}$ environ; quant aux surfaces courbes, il suffit d'un cylindre d'air d'un diamètre supérieur à $\frac{40}{0,45} = 89^{cm}$ environ.

L'appareil Eiffel réalise actuellement le mieux les conditions précédentes. Il se compose :

1° D'une buse, d'où sort un courant cylindrique d'air;

2° D'une chambre d'expérience où l'air est en dépression et où se trouvent les expérimentateurs et les appareils de mesure;

3° D'un diffuseur;

4° D'un ventilateur placé à l'extrémité du diffuseur.

Le courant d'air régulier, qui entre par une paroi de la chambre d'expérience (buse) et qui sort par l'ouverture du diffuseur pratiquée dans la paroi située en face et parallèle à la première, est un courant d'air *aspiré* et non refoulé. L'aspiration ôte toute influence aux remous du ventilateur; une boîte de régularisation du courant d'air avant la buse n'est pas nécessaire. Toutefois des grillages, placés dans les ajutages d'entrée et de sortie de la chambre, jouent le rôle de régulateurs du courant d'air.

Dans le laboratoire installé à Auteuil, le cylindre d'air du grand appareil a 2^m de diamètre; on peut y réaliser des vitesses de cou-

rant d'air depuis 2 m : sec jusqu'à 30 m : sec. Un second cylindre d'air plus petit de 1^{m} de diamètre, parallèle au premier, permet de réaliser des vitesses de courant d'air allant de 2 m : sec à 40 m : sec.

Dans le grand appareil la puissance absorbée est égale à 60 chevaux, avec un débit d'air de 90 m^3 : sec, correspondant à la section circulaire de 2^{m} de diamètre et à la vitesse de 100^{km} à l'heure (28 m : sec).

La mesure globale de la résistance de l'air se fait dans la chambre d'expérience au moyen d'une balance spéciale.

Au point de vue de la commodité des expériences et du nombre de celles-ci, la méthode du courant d'air artificiel est supérieure à la méthode du déplacement dans l'air libre. Celle-ci exige, en effet, que l'air extérieur soit aussi calme que possible; cette condition ne peut être réalisée qu'à certains jours et même à certaines heures d'une même journée. Si, le long de la trajectoire rectiligne du corps en expérience, le vent avait partout la même intensité et la même direction, on pourrait tenir compte de son existence. Mais diverses expériences, notamment celles de M. Maurain à l'Institut aérotechnique de Saint-Cyr, montrent que, en un point déterminé de l'atmosphère, le vent subit souvent des variations continuelles en grandeur et en intensité.

Mais, si elle permet à l'expérimentateur de régler les conditions d'une expérience, la méthode du courant d'air artificiel ne peut, comme nous l'avons vu plus haut, être appliquée qu'à des *modèles réduits* par rapport aux appareils utilisés en aviation.

Une question se pose alors :

Comment les résultats obtenus dans l'étude des modèles réduits doivent-ils être transformés pour s'appliquer aux appareils en vraie grandeur d'exécution? Quelle est la loi de similitude qui permet de passer d'un essai en petit à un essai en grand? C'est un point sur lequel nous insisterons plus particulièrement, lorsque nous exposerons les résultats obtenus.

Une autre question se pose.

La méthode du déplacement du solide en expériences et la méthode du courant d'air artificiel conduisent-elles aux mêmes résultats? — Oui, affirme M. Eiffel, en s'appuyant sur l'intangibilité du principe du mouvement relatif. — Non, répond M. de Guiche,

tant qu'on ne réalise pas, par la méthode du tunnel, les conditions que nécessite l'application d'un tel principe.

Nous reviendrons également plus loin sur cette question.

IV. — Étude sur les aéroplanes en plein vol.

Les méthodes que nous venons de caractériser exigent que les corps en expériences soient solidaires d'un support. Celui-ci a, dans les bonnes expériences, des dimensions aussi réduites que possible; il est éloigné autant que possible du corps en essais, de manière que son voisinage apporte le minimum de perturbations. Il n'en est pas moins vrai que l'aéroplane ainsi étudié n'est pas dans les conditions exactes de son évolution dans l'atmosphère.

C'est pourquoi des expériences ont été entreprises sur des aéroplanes pendant leur circulation dans l'air. Malheureusement le champ des essais est limité; il ne peut être parcouru au gré de l'expérimentateur, c'est-à-dire du pilote, qui doit tendre avant tout à éviter la chute. Ces expériences donnent des résultats complexes et souvent difficiles à analyser. Cependant on ne peut nier que ces recherches ne soient d'une grande portée pratique.

Elles ont été inaugurées vers 1910 par MM. Gaudart et Legrand, avec un biplan Voisin. Trop peu systématiques et trop peu nombreux, ces essais n'ont pas conduit à des résultats bien intéressants.

Tout autres sont les recherches faites par le commandant Dorand à Villacoublay, sur un biplan de sa construction piloté par M. Labouchère. A l'Institut de Saint-Cyr, MM. Toussaint et Lepère, Toussaint et le lieutenant-aviateur Gouin ont fait des essais importants sur un biplan Maurice Farman et sur un monoplan Blériot. Des appareils ingénieux, capables d'enregistrer les mouvements du pilote, ont été étudiés; ils sont appelés à fournir des indications importantes sur le fonctionnement des appareils d'aviation.

V. — La mesure globale de la résistance de l'air et la détermination des pressions en chaque point de la surface du corps en essais.

La balance permet, nous venons de le voir, de déterminer en une seule fois la résistance de l'air sur un corps en mouvement relatif par rapport à lui.

Mais on peut aussi faire l'étude, en quelque sorte topographique, des pressions partielles que l'air exerce en chaque point de la surface de ce corps. Il suffit pour cela de faire affleurer, en divers points de la surface étudiée, des ajutages reliés à des manomètres. La composition géométrique des forces résultant de la connaissance de ces pressions permet de connaître la résistance de l'air.

Cette analyse a l'avantage de mettre en évidence l'état de la surface du corps en mouvement dans l'air.

Elle est appliquée par M. Eiffel en mesurant séparément la pression donnée par un des ajutages et déterminant chaque fois la vitesse du courant d'air. Comme cette vitesse est légèrement variable, on ramène les pressions à ce qu'elles seraient si la vitesse était constamment égale à 10 m : sec.

Or, en opérant ainsi par des observations successives, on risque d'avoir entre les déterminations des discordances assez marquées.

Aussi M. de Guiche détermine-t-il à la fois par une seule expérience les pressions en des points choisis en plus grand nombre possible. A cet effet, les plaques devant servir pour les expériences sont percées chacune de trous formant deux séries de lignes se coupant à angle droit (pour les plans, lignes de plus grande pente et lignes horizontales). Dans une même expérience, *on mesure d'un seul coup, à un même instant*, les pressions en tous les points de plusieurs lignes.

A cet effet, vingt ajutages, aboutissant aux trous de diverses lignes, sont en relation avec vingt petits manomètres. Ceux-ci sont montés les uns à côté des autres, dans un cadre, devant une glace munie d'une division transversale en demi-millimètres.

On inscrit, à un instant donné, les indications de tous ces manomètres en les plaçant dans une chambre photographique, où règne la pression atmosphérique s'exerçant sur leurs extrémités ouvertes. En éclairant l'intérieur de la chambre avec des lampes électriques, on reproduit facilement sur une plaque photographique les niveaux du liquide dans les différents manomètres.

On peut se demander si la pression atmosphérique règne véritablement à l'intérieur de la chambre photographique. Celle-ci ne peut en effet être étanche, si l'on ne veut pas qu'elle fonctionne comme thermomètre à air. Il est donc possible que, pendant la marche de l'automobile, le courant d'air, passant par les étroites

fissures de la chambre photographique, vienne provoquer une variation de pression à son intérieur. M. de Guiche s'est assuré, par des essais multiples, qu'il n'en est rien et que la pression atmosphérique règne bien à l'intérieur de la boîte photographique.

Les pressions ainsi déterminées directement sont ramenées aux valeurs qu'elles auraient à la vitesse de 10 m : sec. On trace alors des courbes d'égales pressions, qui figurent l'état de la surface du corps en essais et montrent la répartition des pressions.

D'autre part, on partage la surface du corps en bandes d'une certaine largeur. Par un calcul de moyennes, on détermine la pression moyenne sur chaque bande; en la multipliant par la surface de cette bande, on a la résistance exercée par l'air sur la bande considérée. Comme la surface du corps en essais est supposée parfaitement polie, on néglige le frottement de l'air sur la surface; la force déterminée est alors normale à la surface de ce corps. En composant ces forces par les méthodes de la Statique graphique, on obtient en grandeur et en position la résistance de l'air sur la plaque étudiée.

VI. — Les essais dynamiques du commandant Lafay.

Le commandant Lafay s'est proposé de résoudre un problème très important au point de vue de la pratique de l'aviation.

Les essais exécutés sur des modèles d'ailes ou d'aéroplanes sont en général exclusivement statiques; le vent de la soufflerie, dont on utilise l'action dans la méthode du courant d'air artificiel, est maintenu à l'état de régime permanent pendant la durée de chaque mesure. Or, quand un aéroplane navigue dans l'air, il est soumis de la part de l'air à des actions qui varient assez rapidement non seulement en intensité, mais en direction. Bien que l'inertie d'un appareil l'empêche d'obéir à toutes les actions instantanées, on peut se demander si les essais statiques du laboratoire peuvent être appliqués sans restriction aux appareils dans la pratique. M. Lafay s'est efforcé de donner quelques indications sur cette question. Il a tenté *quelques essais dynamiques*, c'est-à-dire qu'il s'est efforcé d'étudier les efforts variables produits par un vent dont la direction ou l'intensité change rapidement.

L'étude expérimentale de cette question présente de grandes difficultés dues principalement aux actions perturbatrices de l'inertie. Pour les éviter, on se trouve conduit à réaliser des modèles aussi légers que possible, reliés à des organes élastiques, et à utiliser les déformations de ces derniers pour mesurer les efforts. Mais si ces déformations doivent être très faibles pour que la force vive acquise par le système soit négligeable, il faut cependant qu'elles soient assez grandes et assez régulières pour qu'une amplification optique appropriée conduise à une évaluation correcte des forces qui les produisent. Les résultats de cette amplification doivent d'ailleurs pouvoir être enregistrés photographiquement en raison de la rapidité d'évolution des phénomènes étudiés. Enfin le modèle et son support élastique ne manqueraient pas de prendre un mouvement vibratoire sous l'action des irrégularités inévitables de la soufflerie, si l'on ne prenait la précaution d'adjoindre des dispositifs amortisseurs juste suffisants pour rendre l'appareil pratiquement apériodique, sans cependant ralentir par trop ses indications dynamiques.

M. Lafay a réalisé un aérodynamomètre capable de satisfaire à ces conditions contradictoires.

Il paraît résulter des expériences faites actuellement que :

Pour des changements de vitesse et de direction ayant le degré de rapidité de ceux qui peuvent normalement se produire en aviation, la résistance de l'air à un instant quelconque a une valeur peu différente ($\frac{1}{10}$ au plus) *de celle qu'on obtiendrait en régime permanent en maintenant invariables les conditions qui caractérisent à l'instant considéré, le mouvement relatif de l'avion par rapport à l'air.*

On peut par suite déduire d'essais *statiques* convenablement dirigés les éléments nécessaires au calcul des efforts supportés par un appareil dans des circonstances déterminées, telles, par exemple, que celles qui accompagnent son redressement rapide après un vol piqué, ou son entrée dans un courant ascendant ou descendant.

CHAPITRE II.

Les diagrammes logarithmiques de M. Eiffel.

I. — Étude du mouvement horizontal d'un aéroplane. La polaire logarithmique.

Pour étudier le mouvement horizontal d'un aéroplane, M. Eiffel a indiqué un mode de représentation très ingénieux, auquel il a donné le nom de *polaire logarithmique*.

Considérons un modèle d'aéroplane. Soient :

λ, le rapport de deux dimensions linéaires homologues prises dans l'aéroplane et son modèle;

i, le plus petit angle que fait, avec la direction du vent relatif, une droite de référence intimement liée à l'appareil; par exemple la droite doublement tangente à la partie inférieure de la voilure principale, immédiatement auprès du fuselage. A cette valeur de l'angle i, l'expérience sur le modèle permet de faire correspondre une résistance de l'air, dont les projections sur la direction du vent et sur la direction perpendiculaire sont $r_x V^2$ et $r_y V^2$ (V, vitesse du vent relatif).

A ces grandeurs déterminées expérimentalement on fait correspondre des grandeurs R_X et R_Y relatives à un aéroplane de grandeur normale, au moyen des équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} R_X &= r_x \left(\frac{\lambda}{10}\right)^2, \\ R_Y &= r_y \left(\frac{\lambda}{10}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Soient, d'autre part :

Q, le poids de l'aéroplane réel;

P, la puissance utile qu'il faut dépenser pour le faire voler horizontalement à la vitesse relative V.

Les équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= R_X V^3, \\ Q &= R_Y V^2 \end{aligned} \right.$$

définissent les valeurs corrélatives de P, Q, V (R_x et R_y) et par suite de l'angle i, qui conviennent au *vol horizontal d'un aéroplane de forme déterminée* (*en particulier d'un aéroplane dans lequel le gouvernail de profondeur occupe une position déterminée*) *lorsque l'axe de l'hélice est parallèle à la trajectoire.*

Considérons un tel aéroplane.

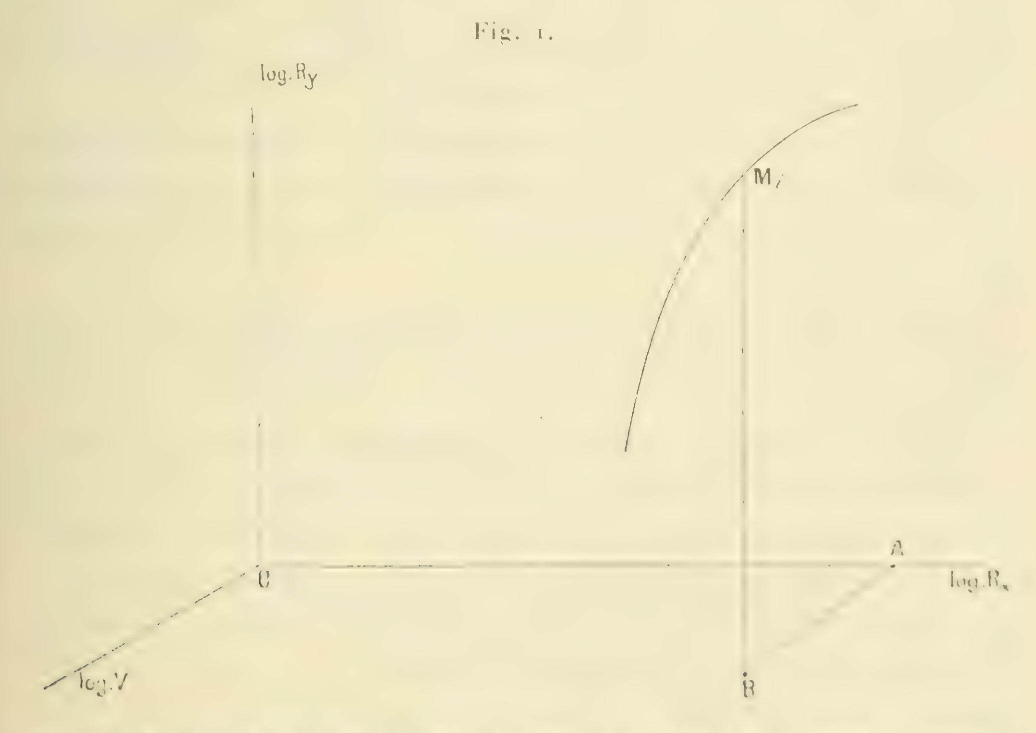
Les équations (2) donnent

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \log R_x &= \log P - \frac{3}{\sqrt{13}}\sqrt{13} \times \log V, \\ \log R_y &= \log Q - \frac{2}{\sqrt{13}}\sqrt{13} \times \log V. \end{aligned} \right.$$

Les expériences sur un modèle permettent, pour diverses valeurs de l'angle i, de déterminer les valeurs correspondantes de R_x et de R_y.

Sur deux axes rectangulaires portons, à la même échelle, sur l'axe des abscisses des longueurs proportionnelles aux diverses

Fig. 1.



valeurs de $\log R_x$, sur l'axe des ordonnées des longueurs proportionnelles aux diverses valeurs de $\log R_y$. Nous obtenons ainsi, dans le plan ($\log R_x$, $\log R_y$), une courbe à laquelle M. Eiffel a

donné le nom de *polaire logarithmique*. Chaque point de cette courbe correspond à une valeur déterminée de l'angle i, qui est inscrite sur la courbe.

Considérons un vecteur OM_i allant de l'origine O à un point M_i de la courbe. Ce vecteur a pour projections sur les axes de coordonnées $\log R_x$ et $\log R_y$. Mais les équations (3) montrent que ce vecteur est la résultante d'une ligne brisée dont les vecteurs sont :

$\log P$, vecteur dirigé suivant l'axe des $\log R_x$;

$\log Q$, vecteur dirigé suivant l'axe des $\log R_y$;

$\sqrt{13} \times \log V$, vecteur dirigé suivant l'axe $O \log V$ situé dans le troisième angle des coordonnées, et faisant avec l'axe des $\log R_x$ un angle dont le cosinus est égal à $-\frac{3}{\sqrt{13}}$ (voir *fig.* 1).

Si l'on conserve les deux extrémités O et M_i de la ligne brisée, on peut en parcourir les segments dans un ordre quelconque.

On sait que, partant du point O, on doit, en suivant la ligne brisée, aboutir en un point M_i de la polaire logarithmique. On connaît, d'autre part, les directions des vecteurs. Si l'on se donne deux des vecteurs de la ligne brisée, le tracé de cette ligne permet immédiatement de connaître le troisième.

On peut ainsi résoudre graphiquement, au moyen de la polaire logarithmique, une série de problèmes sur *le vol horizontal d'un aéroplane, lorsque l'axe de l'hélice est parallèle à la trajectoire.*

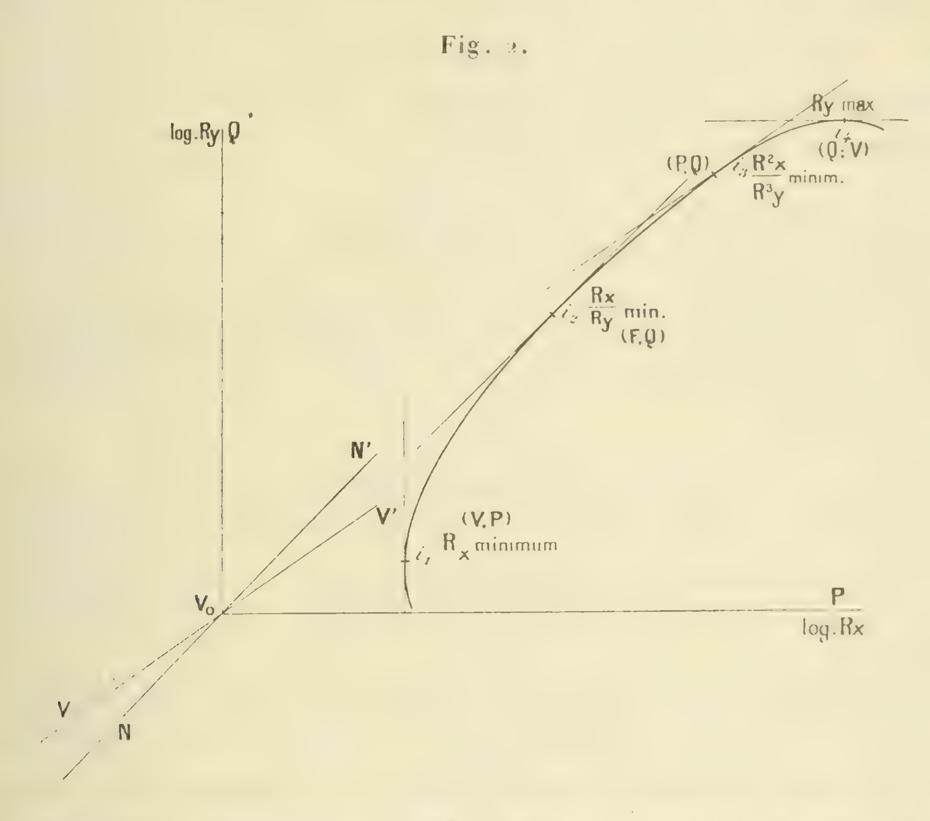
On peut, par exemple, se demander quel poids il convient de donner à l'appareil pour obtenir une vitesse donnée avec une puissance donnée.

Dans ce problème, on connaît les vecteurs $\log P$ et $\sqrt{13} \times \log V$ en grandeur et en direction; il est facile de les tracer. De l'extrémité du vecteur $\sqrt{13} \times \log V$ on trace alors une droite parallèle à l'axe des $\log R_y$ jusqu'à la rencontre de la polaire logarithmique. Le vecteur $\log Q$ est ainsi construit; il donne le poids Q cherché. En même temps, le point de rencontre de ce vecteur avec la polaire détermine l'angle i du vol.

L'importance de la considération de ce diagramme logarithmique résulte d'ailleurs du résumé suivant des résultats auxquels conduit son étude.

Pour tous les appareils étudiés par M. Eiffel les polaires logarithmiques présentent toujours une même allure, celle de la figure 2. Si l'on part des faibles incidences, on rencontre les

Fig. 2.



angles de vol horizontal dont les propriétés sont les suivantes :

1° *Angle i_1 pour lequel* R_x *est minimum.* — Cet angle est donné par le point de contact de la tangente à la polaire parallèle à l'axe des ordonnées.

Le vol horizontal sous cet angle correspond au *maximum de la vitesse* pour une *puissance donnée* ou au *minimum de la puissance utile* pour une *vitesse donnée*.

2° *Angle i_2 pour lequel* $\frac{R_x}{R_y}$ *est minimum.* — Cet angle est donné par le point de contact de la tangente à la polaire parallèle à la bissectrice N'N de l'angle des axes de coordonnées.

Le vol horizontal sous cet angle correspond au *minimum de l'effort de traction* pour un *poids donné* ou au *maximum du poids* pour un *effort de traction donné*.

3° *Angle i_3 pour lequel $\frac{R_X^2}{R_Y^3}$ est minimum.* — Cet angle est donné par le point de contact de la tangente à la polaire parallèle à l'axe des logV (axe V′V sur lequel est porté le vecteur $\sqrt{13} \times \log V$).

Le vol horizontal sous cet angle correspond au *minimum de puissance utile* pour un *poids donné* ou au *maximum de poids* pour une *puissance utile donnée.*

4° *Angle i_4 pour lequel* R_Y *est maximum.* — Cet angle est donné par le point de contact de la tangente à la polaire parallèle à l'axe des abscisses.

Le vol horizontal sous cet angle correspond au *maximum de poids* pour une *vitesse donnée* ou au *minimum de vitesse* pour un *poids donné.*

On voit qu'à chacun des angles d'incidence i_1, i_2, i_3, i_4 on peut faire correspondre deux grandeurs, dont l'une est maximum ou minimum quand l'autre est donnée. Chacun de ces angles est l'angle le plus favorable au point de vue des deux grandeurs correspondantes.

Comme les polaires, dans leur partie utile, n'ont pas de point d'inflexion, on se trouve dans des conditions d'autant meilleures par rapport à un groupe de grandeurs que l'angle de vol horizontal est plus voisin de l'un des angles i_1, i_2, i_3, i_4 qui convient à ce groupe de grandeurs.

Prenons un exemple.

On juge *trop faible le poids porté par un aéroplane.* On veut *gagner du poids*, en consentant à *perdre de la vitesse*, mais en conservant la *même dépense de puissance utile.* Il convient de se rapprocher du point pour lequel le poids sera maximum pour une puissance donnée. Il est bon de donner à l'appareil une construction telle que le vol horizontal (avec axe de l'hélice dans la direction de la trajectoire) se fasse sous un angle aussi voisin que possible de l'angle i_3.

II. — Les coefficients caractéristiques des hélices et le diagramme logarithmique.

L'étude expérimentale d'un propulseur comporte la mesure :

1° De la *poussée* H ;

2° De la *puissance effective* $\mathfrak{P}_e$ dépensée sur l'arbre de l'hélice;

3° Du *nombre n de tours* par unité de temps;

4° De la *vitesse de propulsion* V.

Ces données expérimentales permettent de connaître :

a. La *puissance utile* dépensée pour la propulsion,

(4) $$\mathfrak{P}_u = \mathrm{H} \times \mathrm{V};$$

b. La *vitesse angulaire*, $2\pi n$; *la vitesse de rotation à l'extrémité de la pale d'hélice*, $\pi n \mathrm{D}$ (D, diamètre de l'hélice);

c. Le *moment du couple de rotation*,

(5) $$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{P}_e}{2\pi n};$$

d. Le *rendement de l'hélice*,

(6) $$\rho = \frac{\mathfrak{P}_u}{\mathfrak{P}_e} = \frac{\mathrm{H}}{\mathfrak{C}} \times \frac{\mathrm{V}}{2\pi n}.$$

Dans l'étude d'une hélice, on considère plus particulièrement :

1° La *direction* $\frac{\mathrm{V}}{\pi n \mathrm{D}}$ *de la vitesse relative à l'extrémité d'une pale;*

2° Les *grandeurs* (de la nature d'une densité)

$$\frac{\mathfrak{P}_e}{n^3 \mathrm{D}^5}, \quad \frac{\mathfrak{P}_u}{n^3 \mathrm{D}^5}.$$

Admettons, *comme première approximation, que ces grandeurs soient des fonctions du seul rapport* $\frac{\mathrm{V}}{n\mathrm{D}}$.

Représentons-les en prenant comme abscisses $\log \frac{\mathrm{V}}{n\mathrm{D}}$ et comme ordonnées $\log \frac{\mathfrak{P}_e}{n^3 \mathrm{D}^5}$ et $\log \frac{\mathfrak{P}_u}{n^3 \mathrm{D}^5}$.

Nous obtenons ce que M. Eiffel appelle les *diagrammes logarithmiques des hélices*.

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Darboux (Gaston). — *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces et les Applications géométriques du Calcul infinitésimal.* (Cours de Géométrie de la Faculté des Sciences de Paris.) Deuxième Partie : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. Les lignes tracées sur les surfaces.* Seconde édition revue et augmentée. 1 vol. gr. in-8 (25-16), VII-579 pages avec 43 figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1915 Prix : 20^fr^.

Goursat (Édouard). — *Cours d'Analyse mathématique.* (Cours de la Faculté des Sciences de Paris.) Tome III : *Intégrales infiniment voisines. Équations aux dérivées partielles du second ordre. Équations intégrales. Calcul des variations.* Deuxième édition entièrement refondue. 1 vol. in-8 (25-16), VI-668 pages avec 23 figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1915.

Jordan (Camille). — *Cours d'Analyse* de l'École Polytechnique. Tome III : *Calcul intégral (équations différentielles).* Troisième édition, revue et corrigée. 1 vol. in-8 (23-14), 631 pages avec 14 figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1915. Prix : 15^fr^.

Fubini (Guido). — *Lezioni di Analisi matematica.* (*Grande biblioteca tecnica :* 9.) Seconda edizione interamente refusa. Torino, S. T. E. N. vià Nizza, 149, 1915. Prix, broché 14^fr^, relié 16^fr^.

Napier *tercentenary Memorial* edited by *Cargill Gilston Knott.* 1 vol. in-4, XI-441 pages et 15 planches. London; Longmans, Green and Co; 1915. Price, S. 21.

Richardson (Robert P.) and Landis (Edward H.). — *Fundamental conceptions of modern Mathematics.* Variables and Quantities. 1 vol. in-8, XXI-216 pages. Chicago and London, The Open Court, 1916. Price, S. 1,25.

Miller (G. A.). — *Historical Introduction to mathematical Literature.* 1 vol. petit in-8, XIII-302 pages. New-York, the Macmillan Company, January 1916. Price, S. 1,60.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DARBOUX (GASTON). — LEÇONS SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES ET LES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL. Deuxième Partie. Deuxième édition revue et augmentée. 1 vol. gr. in-8 (25-17), II-579 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1915.

Tous ceux qui s'intéressent aux Mathématiques connaissent le grand Traité de M. Darboux sur la théorie des surfaces. Cet Ouvrage donne une vue d'ensemble de la Géométrie infinitésimale actuelle ; les résultats sont groupés habilement et présentés de façon à bien mettre en évidence les pénétrations réciproques des diverses branches de cette science ; il s'adresse à la fois aux maîtres et aux étudiants. L'étudiant qui veut s'initier à l'étude de la Géométrie trouve dans cet Ouvrage un guide sûr ; mais, de plus, s'il le lit attentivement, il sera frappé par l'élégance des méthodes et des résultats, il finira par aimer la Géométrie. Combien de vocations géométriques ont été déterminées par la lecture de ce Livre ! Le maître y trouve une foule de renseignements précieux ; dès qu'il veut faire des recherches sur un sujet, il n'a qu'à ouvrir le Livre au bon endroit et tout de suite il voit quel est l'état actuel de la question. Aussi ce Traité de Géométrie eut-il un réel succès ; la première édition se trouve épuisée ; une nouvelle édition était nécessaire. Nous avons signalé l'apparition de la deuxième édition de la Première Partie [1] ; la deuxième édition de la Deuxième Partie vient de paraître.

Comme dans la première édition, la Deuxième Partie du Traité de Géométrie se compose de deux Livres.

Le Livre IV traite des *Congruences* et *Équations linéaires aux dérivées partielles*. Les équations aux dérivées partielles de Laplace, dont l'importance au point de vue géométrique s'accroît à chaque instant, y sont étudiées d'une façon complète. Le Livre contient aussi de nombreuses applications de cette théorie analy-

---

[1] Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXXVIII, p. 33.

tique aux congruences de droites, de cercles, de sphères, à l'Optique géométrique, aux surfaces dont les plans principaux sont conjugués par rapport à une quadrique, etc.

Le Livre V traite des *Lignes tracées sur les surfaces*. Il contient, en particulier, la démonstration des belles formules de M. Codazzi; une étude des géodésiques; l'exposition de la méthode de Jacobi en Mécanique analytique.

Une analyse de la première édition de la Deuxième Partie ayant paru dans ce Bulletin ([1]), je me borne à signaler les changements et additions qui figurent dans cette nouvelle édition.

Au Chapitre IV, Livre IV, l'Auteur applique la méthode de Riemann à l'équation E (β, β'), c'est-à-dire à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} - \frac{\beta'}{x-y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\beta}{x-y}\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Dans le cas où $\beta = \beta'$, Poisson a donné, sous forme de quadrature, une intégrale de cette équation qui contient deux fonctions arbitraires d'une variable. Ce résultat a été étendu par M. Appell au cas où β et β' sont quelconques. Pour montrer que l'intégrale ainsi obtenue est bien l'intégrale générale, c'est-à-dire satisfait aux fonctions aux limites de Cauchy, M. Darboux se sert d'une solution particulière $u(x, y, x_0, y_0)$ de l'équation adjointe de Riemann. Or, par une transformation simple, l'équation E(β) se ramène à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\beta(\beta-1)}{(\beta-x-y)^2}z.$$

Pour β infini elle se réduit à

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = z,$$

qui est une transformée de l'équation *des télégraphistes*. La méthode de Riemann peut donc s'appliquer à cette équation. L'Auteur étudie aussi l'équation des télégraphistes sous la forme même où elle se présente en Physique mathématique, c'est-à-dire à l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \alpha\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \alpha\beta\frac{\partial U}{\partial t},$$

([1]) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIII, 1889, p. 241-252.

qui, par une transformation simple, se ramène à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u = 0.$$

Dans le même Chapitre, l'Auteur démontre la propriété générale suivante :

Étant donnée l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

dont les coefficients a, b, c sont développables en séries entières par rapport à $x - x_0$, $y - y_0$, il existe une solution de l'équation aux dérivées partielles se réduisant pour $y = y_0$ à une fonction $\varphi(x)$, développable suivant les puissances de $x - x_0$, et pour $x = x_0$ à une fonction $\psi(y)$ développable suivant les puissances de $y - y_0$.

On doit évidemment avoir $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$.

Ce théorème est démontré de deux manières différentes. D'une part, comme dans la première édition, par l'emploi de développements en séries et la considération des fonctions majorantes. D'autre part, la seconde édition contient une démonstration nouvelle, en faisant usage de la méthode des approximations successives de M. Émile Picard. Cette méthode permet même d'étendre le théorème aux équations, plus générales, de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Je signale enfin (Livre V, Chap. III, § 106) une étude sur le pinceau formé par les normales à une surface qui sont infiniment voisines d'une normale donnée. Une représentation géométrique élégante permet de voir facilement tous les résultats.

La Deuxième Partie se termine par trois Notes qui ont été ajoutées dans la nouvelle édition.

La Note I est intitulée : *Sur différentes propriétés des trajectoires orthogonales d'une congruence de courbes.* L'Auteur considère une congruence de courbes définies par les équations différentielles

$$\frac{dx}{c} = \frac{dy}{c'} = \frac{dz}{c''},$$

où c, c', c'' sont des fonctions de x, y, z qui satisfont à la relation

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1.$$

Par un point M de l'espace passe une courbe de la congruence, la tangente en M à cette courbe est la droite D qui a pour cosinus directeurs c, c', c''.

Les trajectoires orthogonales de ces courbes satisfont à l'unique équation différentielle

$$c\,dx + c'\,dy + c''\,dz = 0,$$

qui est une équation de Pfaff.

Si la quantité I

$$I = c\left(\frac{\partial c'}{\partial z} - \frac{\partial c''}{\partial y}\right) + c'\left(\frac{\partial c''}{\partial x} - \frac{\partial c}{\partial z}\right) + c''\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial c'}{\partial x}\right)$$

est nulle, l'intégrale générale de l'équation différentielle est de la forme

$$f(x, y, z) = \mathrm{C^{te}},$$

de sorte que, dans ce cas, les courbes cherchées sont situées sur une surface de la famille $f = \mathrm{C^{te}}$.

Dans le cas contraire, les courbes satisfaisantes dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable. On peut, par exemple, se donner arbitrairement y en fonction de x ; en substituant dans l'équation de Pfaff, on aura une équation différentielle ordinaire pour déterminer z en fonction de x. Soit Φ l'ensemble de ces courbes. Une courbe Φ passant par M a pour tangente une droite MT normale à D ; il y a une infinité de courbes Φ tangentes à MT ; pour toutes ces courbes le rapport $\frac{dy}{dx}$ est le même.

Pour étudier les propriétés infinitésimales de ces courbes, M. Darboux fait correspondre à chaque point M de l'espace un trièdre trirectangle dont l'axe des z est la droite D, l'axe des x est choisi arbitrairement dans un plan perpendiculaire à D. Soient alors : ω l'angle que fait la tangente MT avec l'axe des x du trièdre; ϖ l'angle que fait la normale principale à la courbe Φ avec l'axe des z ; ρ le rayon de courbure; τ le rayon de torsion de la courbe. On trouve que les expressions $\frac{\cos\varpi}{\rho}$ et $\frac{1}{\tau} + \frac{d\varpi}{ds}$ sont les mêmes pour

toutes les courbes Φ ayant la même tangente au point M. Par analogie avec ce qui se passe pour les courbes tracées sur une surface, on donne à ces expressions les noms de *courbure normale* et de *torsion normale*. (Correspond à la torsion géodésique des courbes d'une surface.) L'Auteur rattache à cette question les propriétés infinitésimales d'un pinceau de droites établies par Hamilton et Kummer.

La Note II est consacrée au *mouvement des corps pesants et au principe de la moindre action*.

On sait combien sont délicates toutes les questions qui se rattachent au calcul des variations; la question du minimum absolu surtout. L'Auteur a pris le cas simple du mouvement parabolique des points pesants; question que M. J. Hadamard a examinée dans son Traité du *Calcul des variations*. On sait que si l'on considère toutes les trajectoires issues d'un point A avec la même vitesse initiale, ces trajectoires ont une enveloppe qu'on appelle la *parabole de sûreté*. Le sommet O de la parabole de sûreté est sur la verticale du point A, la tangente au sommet est une horizontale Ox. Cette droite Ox est le lieu des points où un mobile libre ou gêné arrive avec une vitesse nulle; c'est aussi la directrice de toutes les paraboles trajectoires. Par un point B situé à l'intérieur de la parabole de sûreté passent deux trajectoires. Considérons l'une de ces trajectoires qui touche la parabole de sûreté en B'; si le point B est placé sur l'arc AB', l'action pour l'arc AB est un minimum relatif; si le point B est au delà de B', l'action cesse d'être un minimum, même si l'on se borne à la comparer aux chemins infiniment voisins. Mais sur l'arc AB' le minimum absolu cesse avant d'arriver au point B'. Supposons que le fait se produise pour un point B et soit O' la projection de B sur Ox, le chemin qui réalise le minimum absolu de l'action est composé de la verticale AO, de l'horizontale OO' et de la verticale O'B. La position limite des points B est fixée par une courbe du huitième degré, tangente en O à Ox et située tout entière à l'intérieur de la parabole de sûreté. Cette courbe coupe la trajectoire en deux points au moins, ceux qui sont le plus rapprochés de A, à droite et à gauche sont ceux pour lesquels l'action à partir de A cesse d'être minimum.

La Note III est consacrée à la *Recherche des équations de*

Laplace qui admettent des solutions particulières liées par une relation quadratique à coefficients constants.

L'Auteur montre comment, en partant d'une équation de Laplace, qui admet p solutions $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ liées par la relation

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_p^2 = 0,$$

on peut en déduire une nouvelle équation, ayant la même propriété, seulement p est remplacé par $p+1$ ou $p+2$. On forme ainsi, de proche en proche, les systèmes cherchés, en partant d'un réseau plan orthogonal qui correspond au cas de $p=4$.

Cette rapide analyse suffit à montrer tout l'intérêt que présente ce second Volume ; je suis persuadé qu'il trouvera auprès du public géomètre le même bon accueil que le Volume analogue de la première édition.

C. GUICHARD.

GIBB (DAVID). — A COURSE IN INTERPOLATION AND NUMERICAL INTEGRATION, *for the mathematical Laboratory.* (Edinburgh mathematical Tracts, n° 2). 1 vol. in-8, VIII-90 pages. London, G. Bell and Sons, 1915.

CARSE (G.-A.) and SHEARER (G.). — A COURSE IN FOURIER'S ANALYSIS AND PERIODOGRAM ANALYSIS, *for the mathematical Laboratory.* (Edinburgh mathematical Tracts, n° 4). 1 vol. in-8, VIII-66 pages, 1 planche. London, G. Bell and Sons, 1915.

Ces petits Volumes appartiennent tous deux à la série des *Edinburgh mathematical Tracts;* ils traitent principalement, le premier de l'interpolation parabolique, le second de l'interpolation périodique. Ainsi le second est la suite naturelle du premier et nous en rendrons compte en même temps.

Voici la liste des titres des Chapitres qui donnera une idée suffisamment exacte du contenu des deux Ouvrages. Pour le premier : *Théorèmes sur le calcul des différences finies, Formules d'interpolation, Construction et usage des Tables mathématiques, Intégration numérique;* pour le second : *Théorème de Fourier, Évaluation pratique des coefficients, Périodogrammes, Fonctions sphériques.*

Il y a de plus, dans le premier, une introduction relative aux

tables et instruments dont on recommande l'usage, au choix du papier à employer, etc. Une grande partie du texte est en applications et exemples numériques, de sorte qu'il reste à peu près 90 pages de fond; dimensions peut-être un peu restreintes.

Évidemment, ces Ouvrages, d'un caractère pratique, ne pourraient que perdre à des développements par trop exagérés, mais nous aimerions cependant à y trouver un peu plus de renseignements sur la validité des formules employées, soit au point de vue mathématique (conditions de grandeurs relatives aux dérivées, etc.), soit au point de vue expérimental (accord des résultats calculés avec ceux observés). Il ne faudrait pas que l'étudiant s'imaginât que, connaissant les valeurs d'une fonction pour certaines valeurs de la variable, et *rien de plus*, il connaît cette fonction. En tout cas, ce n'est qu'en introduisant des considérations de ce genre qu'on peut se rendre compte de l'approximation, ou de la probabilité des résultats obtenus. Et quel intérêt a un résultat si l'on ne sait rien sur son approximation ou sur sa probabilité?

E. Cahen.

MILHAUD (Georges) et POUGET (Édouard). — Cours de Géométrie analytique. II : *Géométrie à trois dimensions*. 1 vol. gr. in-8°, 164 figures dans le texte, III-421 pages. Paris, Félix Alcan, 1915.

Le IIe Volume de la Géométrie analytique de MM. Milhaud et Pouget est consacré à la Géométrie de l'espace. Il est rédigé conformément aux programmes de la classe de Mathématiques spéciales : à vrai dire, il n'en dépasse pas le cadre : peut-être, pourrait-on objecter que l'étude des surfaces réglées et développables, celle des lieux géométriques et des enveloppes, ne figurent pas explicitement dans ces programmes. Mais ces théories donnent lieu à des applications si importantes et si nombreuses, qu'il n'est guère possible de les passer sous silence; les Auteurs se sont d'ailleurs bornés à en indiquer les éléments indispensables. Systématiquement, ils ont évité, dans leur Livre, tous les développements peu utiles; dans les questions d'ordre général, ils se sont bornés à mentionner les cas exceptionnels. La rédaction est conçue dans le même esprit de

clarté et de simplicité que celle du précédent Volume, et la rigueur n'en souffre aucunement. Aussi, à tous points de vue, l'Ouvrage de MM. Milhaud et Pouget a-t-il une haute valeur pédagogique : il n'est pas écrit pour des professeurs désireux de compléter leurs connaissances, mais bien pour des jeunes gens qui, préparant un concours difficile, doivent s'épargner tout labeur peu profitable. C'est donc à juste titre que M. Émile Borel a écrit dans la Préface du premier Volume : « Les élèves se trouveront rapidement en confiance auprès de jeunes maîtres qui, les connaissant bien, savent comment il faut leur parler pour être écouté et compris; leurs professeurs pourront garantir d'ailleurs que cette confiance est justifiée par la méthode sûre et la probité scientifique des Auteurs. » Passons maintenant en revue quelques points importants de l'Ouvrage.

Le Chapitre I traite des systèmes de coordonnées, des formules donnant en axes quelconques la distance d'un point à l'origine et l'angle de deux demi-droites, puis du changement d'axes : à ce propos, mention a été faite de la théorie des substitutions orthogonales, qui jouent, dans nombre de doctrines mathématiques, un rôle prépondérant. Pour terminer, quelques généralités sur la représentation analytique des surfaces et des courbes.

Le Chapitre II est consacré au plan et à la droite. Les Auteurs démontrent que l'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

représente un plan, en prouvant qu'elle définit le lieu d'une droite de direction fixe et s'appuyant sur une droite fixe. La condition de parallélisme de deux plans est d'abord obtenue en écrivant que leurs traces sur deux plans de coordonnées sont parallèles, puis se retrouve dans l'étude des intersections de plans. Signalons aussi les expressions, en fonction de trois paramètres homogènes, des coordonnées d'un point d'un plan donné par trois points et la résolution géométrique de l'inégalité du premier degré à trois inconnues. Le calcul des coordonnées d'un point d'une droite en fonction d'un paramètre conduit, comme application, à la recherche du centre des distances proportionnelles et à la définition des coordonnées barycentriques d'un point. L'étude des intersections de droites et de plans, faite d'abord par une méthode directe, est

reprise ensuite au moyen des coordonnées homogènes, qui, par l'introduction des éléments à l'infini, permettent de donner aux énoncés une forme tout à fait générale. Les formules d'angles et de distances ne sont établies qu'en axes rectangulaires : toutes les questions de doubles signes qu'elles soulèvent ont été élucidées avec grand soin ; de plus, là comme ailleurs, les Auteurs ne craignent pas de donner à l'élève des conseils pratiques, en lui indiquant, parmi les méthodes de calcul, celles qui sont les plus rapides. Des notions sur les éléments imaginaires et sur les faisceaux homographiques de plans complètent cette étude.

Rien de particulier à dire de la sphère, qui fait l'objet du Chapitre suivant et dont la théorie n'est que la généralisation de celle du cercle. Les Chapitres IV et V roulent sur les courbes : l'étude en est présentée d'une manière fort remarquable, et il y aurait beaucoup à dire à ce sujet. Nous ne pouvons que mentionner ici quelques points particulièrement intéressants : après avoir défini la tangente et le plan osculateur, les Auteurs insistent sur une propriété caractéristique de ces éléments : « Si l'on mène par un point M_0 d'une courbe un plan arbitraire P, la distance à ce plan d'un point M_1 de la courbe, infiniment voisin de M_0, est infiniment petite avec M_0M_1 et en général du même ordre que M_0M_1 ; elle sera au moins du second ordre si le plan P contient la tangente à la courbe et seulement dans ce cas; pour qu'elle soit du troisième ordre, il faut et il suffit que le plan P soit le plan osculateur. » La disposition de la courbe par rapport au plan osculateur est étudiée avec quelque détail. Chemin faisant, est résolue une question importante pour les applications : reconnaître dans quelles conditions les équations

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t)$$

représentent une courbe plane. Démonstration est donnée du fait qu'il en est ainsi lorsque le plan osculateur passe par un point fixe. Quelques mots sur l'étude d'une courbe définie comme intersection de deux surfaces et nous passons aux propriétés intrinsèques des courbes gauches : la courbe se définit par l'indicatrice sphérique; on obtient le centre de courbure, en portant sur la normale principale, *dans le sens positif*, une longueur égale à $\frac{ds}{dz}$.

Cette définition pouvant sembler arbitraire, les Auteurs la légitiment en montrant :

1° Qu'elle concorde bien avec les définitions relatives aux courbes planes;

2° Que le centre de courbure en un point M d'une courbe gauche coïncide avec le centre de courbure en M de la projection de la courbe sur le plan osculateur en ce point [1].

Une étude de l'hélice circulaire et des notions sur les hélices quelconques fournissent l'illustration tout indiquée de cette théorie.

Les Chapitres suivants (VI, VII, VIII, IX) ont pour objet principal les propriétés des surfaces. Là encore, les Auteurs ne perdent pas de vue les applications : ils indiquent sur des exemples numériques la marche à suivre pour étudier, par des sections planes, la forme d'une surface dont on donne l'équation. Comme cas particuliers de surfaces définies paramétriquement, ils mentionnent les surfaces de translation et étudient les plans tangents aux surfaces réglées. Parmi les surfaces algébriques, ils réservent une large place à celles qui sont unicursales, faisant voir par des exemples la différence entre une représentation normale et une représentation anormale, et mettant en garde l'élève tenté de faire des généralisations hâtives, en lui montrant les difficultés que soulève la détermination du degré. L'étude des courbes algébriques est une question non moins délicate : les Auteurs se bornent à quelques indications, ayant trait surtout aux courbes unicursales qui se présentent fréquemment dans les problèmes. Quant à la recherche de la courbure des sections planes d'une surface en un point simple, elle se trouve développée par deux méthodes :

1° On prend pour axe Oz la normale, et pour plan xOy le plan tangent au point O considéré. On établit ainsi l'existence d'une conique dite *indicatrice*, qui représente les variations de la cour-

[1] Me risquerais-je à demander s'il y aurait eu inconvénient à mentionner à cet égard la propriété suivante, qui donne un intérêt capital à la définition du centre de courbure : *la limite de l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins est une perpendiculaire au plan osculateur, menée par le centre de courbure.*

bure d'une section passant par Oz. Des propriétés de cette conique résulte la constance de la somme des courbures de deux sections normales rectangulaires.

2° On utilise les formules de Frenet et l'on obtient l'égalité classique

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

qui montre que deux courbes de la surface ayant le même plan osculateur en un de ses points ont aussi le même rayon de courbure.

Une part très large a été faite dans la suite aux applications de l'indicatrice, qui permet par exemple de construire les tangentes à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents coïncident. A noter aussi que la recherche des maxima et minima d'une fonction de deux variables est une question connexe des précédentes. Quelques éléments sur le calcul des aires et volumes terminent ces considérations.

En ce qui concerne les lieux géométriques, les développements purement théoriques ont été réduits au strict minimum, pour laisser place à de nombreux exemples numériques. La théorie des enveloppes, qui fait suite, est traitée dans le même esprit; les Auteurs ont étudié, avec quelque détail, l'enveloppe d'un plan, dépendant d'un ou de deux paramètres, en insistant sur la différence essentielle entre les plans tangents à une surface développable et les plans tangents à une surface qui ne l'est pas. Un mot seulement est dit des familles de courbes gauches à un paramètre pour montrer qu'en général elles n'admettent pas d'enveloppe. Enfin des notions sur la recherche des courbes satisfaisant à un système de deux équations différentielles terminent ce Chapitre. Là encore, quelques exemples bien choisis suffisent à donner l'idée d'une théorie, dont le développement eût dépassé le cadre de l'Ouvrage.

La fin du Volume (Chap. XI à XVIII inclus) est réservée aux surfaces du second ordre. Nul n'ignore que l'importance donnée à cette partie du Cours est aujourd'hui plus restreinte qu'autrefois. Avec juste raison, on a supprimé un grand nombre de questions relatives aux quadriques représentées par l'équation littérale la

plus générale, et aussi tout ce qui touche à la théorie des invariants des formes quadratiques. Mais, s'il importe de ne pas surcharger inutilement la mémoire des élèves, il serait tout aussi regrettable, tombant dans l'excès contraire, de rechercher, aux dépens de la rigueur, une apparente simplicité. A exposer sur des exemples numériques la réduction de l'équation du second degré, on risque fort de compromettre l'exposition d'une théorie vraiment indispensable. A ce point de vue, MM. Milhaud et Pouget sont restés, semble-t-il, dans un juste milieu. Sans encombrer la rédaction de formules pénibles et inutiles, ils n'ont pas craint d'exposer, dans leurs éléments essentiels, les théories générales importantes. Voici maintenant quelques détails.

Un premier mode de classification est obtenu par la recherche des points doubles : les quadriques décomposées étant mises à part, il correspond aussi à la division de ces surfaces en quadriques développables et non développables. L'étude des points à l'infini ou la décomposition en carrés [1] fournissent une deuxième classification : cette méthode présente en même temps l'avantage d'amener aux formes réduites sous lesquelles l'étude géométrique est immédiate. Ces formes donnent en particulier des modes simples de génération de la surface. Par exemple : « Un ellipsoïde est le lieu d'une ellipse variable qui demeure homothétique à une ellipse fixe, et dont les extrémités d'un diamètre décrivent une ellipse fixe. » Dans le même ordre d'idée, tout paraboloïde peut être considéré comme une surface de translation. De la théorie des pôles et polaires, qui fait suite, on peut déduire celle des centres et diamètres (n° 152). Celle-ci peut encore être traitée directement et c'est là l'objet du Chapitre XII : les discussions relatives à ces éléments n'ont été faites, comme l'indique le programme, que sur les équations réduites. Ayant prouvé l'existence d'une infinité de trièdres dont les arêtes ont des directions diamétrales conjuguées, et par rapport auxquels les termes rectangles s'évanouissent dans l'équation de la surface, nous apprenons maintenant que l'un au moins de ces trièdres est trirectangle. Ceci nous conduit à la méthode pratique de réduction d'une quadrique en axes rectangu-

---

[1] La théorie élémentaire de la décomposition en carrés est exposée dans le Tome I, n° 134.

laires : à ce propos, toutes considérations d'invariants ont été bannies; après une étude algébrique directe de l'équation en S, les résultats obtenus sont appliqués à la recherche des directions principales; celles-ci une fois connues, une translation d'axes conduit à la réduction demandée. Cette méthode permet également de rechercher les éléments de symétrie de la surface. A noter, à ce sujet, une propriété intéressante du paraboloïde équilatère : l'une des génératrices du sommet est axe de symétrie sans être pour cela un diamètre. Un paragraphe est ensuite consacré à l'équation

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x - \lambda x^2$$

qui constitue une forme réduite commune aux quadriques sans point double, et qui permet de considérer les paraboloïdes comme les limites d'ellipsoïdes ou d'hyperboloïdes. Ayant recherché les conditions d'homothétie de deux surfaces du second ordre, les Auteurs se bornent à une indication sur la recherche des sections homothétiques de deux quadriques quelconques, problème qui comprend, comme cas particulier, la détermination des sections circulaires.

Les Chapitres suivants (XIV, XV, XVI) étudient ces surfaces sur leurs équations réduites : d'abord, les cônes et cylindres qui jouent un rôle important dans la théorie de toute autre quadrique (un mot est dit des cônes supplémentaires et du cône équilatère), puis les quadriques à centre non développables, enfin les paraboloïdes. La théorie des génératrices rectilignes, importante pour la génération des quadriques réglées et leur représentation unicursale, fait l'objet d'une étude détaillée (Chap. XVII). Les Auteurs insistent, en particulier, sur la notion de rapport anharmonique de quatre génératrices d'un même système.

La détermination des quadriques et l'étude de l'intersection de deux quadriques ont été très sagement réduites à leurs éléments essentiels. En particulier, les faisceaux de quadriques ont été laissés de côté. En revanche, toutes les propriétés qui trouvent en Géométrie descriptive une application directe ont été étudiées avec quelque détail. Les Auteurs établissent en particulier deux propriétés importantes des biquadratiques :

1° La projection d'une telle courbe sur un plan possède en général deux points doubles;

2° Pour que l'intersection de deux quadriques (non développables) présente un point double, il faut et il suffit que ces deux surfaces soient tangentes. La biquadratique est alors unicursale.

Les cas où l'intersection se décompose font l'objet d'une étude spéciale.

Enfin, avec juste raison, les Auteurs ont réuni dans un dernier Chapitre, « un ensemble de notions générales » relatives aux transformations, qui « bien que ne figurant pas dans le programme de la classe de spéciales, doivent intéresser les bons élèves également soucieux de leur culture mathématique et de leur réussite aux concours ». Mention y est faite de l'importante notion de groupe. Les transformations homographiques y sont étudiées d'une manière assez complète. Quelques notions sur l'inversion et sur la transformation par dualité complètent ce Chapitre.

Il y aurait encore beaucoup à dire sur cet Ouvrage qui porte en lui-même les fruits de l'expérience acquise par plusieurs années d'enseignement. Il est superflu d'insister ici sur la manière avenante dont il est présenté : comme dans le premier Volume, deux sortes de caractères ont été adoptés, afin de permettre à l'élève de première année de laisser de côté les questions dont la connaissance est moins urgente. Le texte est illustré de nombreuses figures qui, par leur admirable clarté, parlent aux yeux du lecteur. Enfin et surtout, l'enseignement qui se dégage du Volume est complété par un choix d'exercices nombreux et variés, parmi lesquels beaucoup de questions d'examens; en particulier, les énoncés des problèmes proposés à l'École Polytechnique et à l'École Normale supérieure depuis 1904 sont recueillis à la fin du Traité.

Sous tous les rapports, l'Ouvrage de MM. Milhaud et Pouget est en parfait accord avec les programmes par lesquels l'enseignement des Mathématiques spéciales a été rendu plus moderne. Son exposé constitue, au point de vue de la Géométrie analytique, une mise au point vraiment définitive des matières de cet enseignement. C'est assez dire pour laisser entrevoir le profit que maîtres et élèves pourront tirer de sa lecture.

G. Bouligand.

MÉLANGES.

LES ÉTUDES EXPÉRIMENTALES SUR LA RÉSISTANCE DE L'AIR. LES TRAVAUX FRANÇAIS;

Par M. L. MARCHIS,
Professeur d'Aviation à la Sorbonne.

(*Suite.*)

Ces diagrammes font connaître en fonction de V, n, D les diverses valeurs des grandeurs Π, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{P}_e$, $\mathfrak{P}_u$, ρ qui caractérisent une hélice.

Considérons en particulier la polaire logarithmique

$$\left(\log\frac{V}{nD},\quad \log\frac{\mathfrak{P}_e}{n^3 D^5}\right) \ (fig.\ 3).$$

On a

$$(7)\quad \begin{cases} \log\dfrac{V}{nD} = \log V - \dfrac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{10}\log n - \dfrac{1}{\sqrt{26}}\sqrt{26}\log D, \\[2ex] \log\dfrac{\mathfrak{P}_e}{n^3 D^5} = \log\mathfrak{P}_e - \dfrac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{10}\log n - \dfrac{5}{\sqrt{26}}\sqrt{26}\log D. \end{cases}$$

Traçons les directions On et OD faisant avec la direction positive de l'axe des abscisses, la première l'angle α_1 et la seconde l'angle α_2, les angles α_1 et α_2 étant donnés par les relations

$$(8)\qquad \tang\alpha_1 = 3, \qquad \tang\alpha_2 = 5.$$

Les deux équations (7) expriment que, au contour OAB,

$$\left| \mathrm{OA} = \log\frac{V}{nD}, \qquad \mathrm{AB} = \log\frac{\mathfrak{P}_e}{n^3 D^5} \right|,$$

on peut substituer le contour $\mathrm{OA_1B_1C_1B}$, qui a même résultante que le précédent. Ce nouveau contour est tel que :

$\mathrm{OA_1}$ est parallèle à l'axe des $\dfrac{V}{nD}$ et a pour grandeur $\log V$;

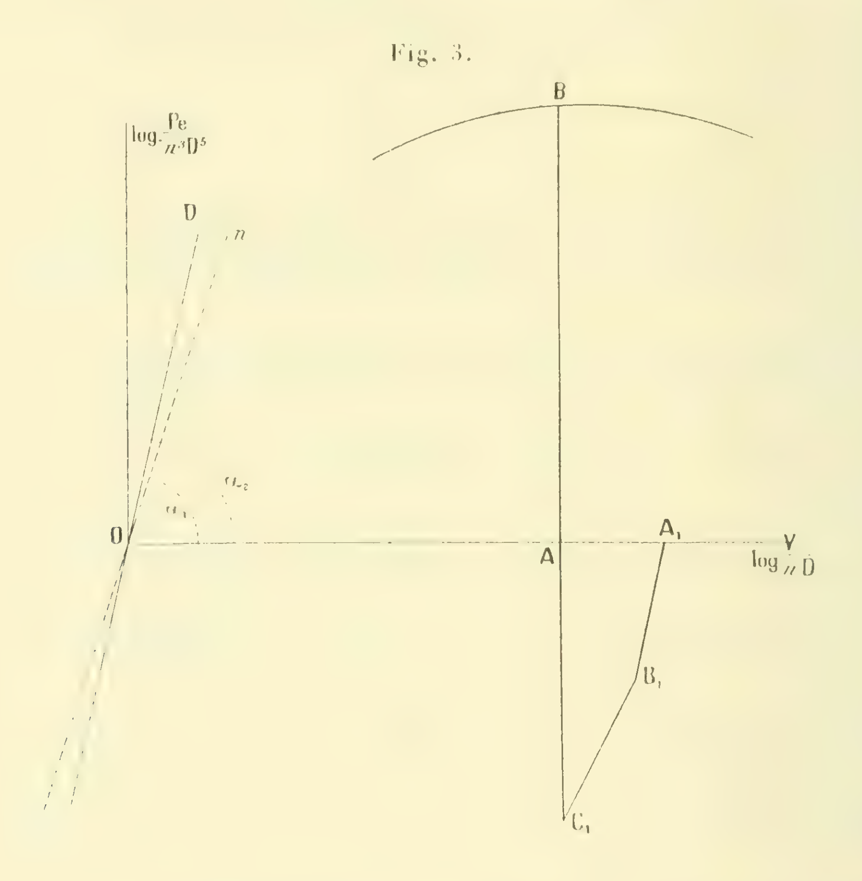
A_1B_1 est parallèle à la direction opposée à OD et a pour grandeur $\sqrt{26} \times \log D$;

B_1C_1 est parallèle à la direction opposée à On et a pour grandeur $\sqrt{10} \times \log n$;

C_1B est parallèle à l'axe des $\frac{\mathfrak{P}_e}{n^3 D^5}$ et a pour grandeur $\log \mathfrak{P}_e$.

Si des graduations convenables ont été faites sur les divers axes parallèles aux côtés de ce contour, il est facile, par la construction

Fig. 3.



de celui-ci, de déterminer l'un des vecteurs connaissant les grandeurs des autres. Il suffit de remarquer que le contour, partant du point O, doit toujours aboutir en un point de la polaire logarithmique.

Nous avons admis, à titre de première approximation, que $\log \frac{\mathfrak{P}_e}{n^3 D^5}$ est représenté par une *seule courbe* dans le plan

$$\left[\log \frac{V}{nD}, \quad \log \frac{\mathfrak{P}_e}{n^3 D^5}\right].$$

En réalité, à chaque valeur de $\log \frac{V}{nD}$ correspondent dans ce plan diverses valeurs de $\log \frac{\mathcal{P}_e}{n^3 D^5}$. Celles-ci se rapportent à des valeurs différentes de nD ou de $\pi n D$ (vitesse de rotation à l'extrémité de la pale). Au lieu d'avoir pour $\log \frac{\mathcal{P}_e}{n^3 D^5}$ une seule courbe représentative, il y a plusieurs courbes, dont chacune correspond à une valeur particulière de nD.

Toutefois, pour des valeurs de nD variant de 10 unités (D exprimé en mètres; n en tours par seconde) dans le champ des valeurs de nD comprises entre 25 et 50 (valeurs usitées actuellement dans la pratique), les courbes correspondant aux diverses valeurs de nD sont sensiblement confondues avec une courbe moyenne, qui est celle que nous considérons ici.

CHAPITRE III.

Les résultats des expériences.

I. — Dans quelles limites les résultats des expériences faites sur les modèles peuvent être applicables aux appareils de grandeur normale.

Nous avons vu, au Chapitre I, que les expérimentateurs avaient étudié la résistance de l'air, soit sur des modèles, soit sur des appareils de grandeur voisine de la normale, soit sur de véritables aéroplanes. Les résultats les plus complets et les plus importants ont été obtenus par M. Eiffel sur des modèles.

Une question se pose immédiatement. Tous ces résultats d'expériences sont-ils comparables? Dans quelle mesure peut-on utiliser, pour les appareils réels de la navigation aérienne, les résultats d'expériences exécutées à échelle réduite?

Considérons un corps plongé dans l'air et animé d'une vitesse de translation relative V. Si S est une surface convenablement choisie (surface de l'aile, surface du maître couple, etc.), la résistance de l'air a pour expression

$$R = KSV^2, \tag{9}$$

K étant une grandeur de la nature d'une densité.

On peut énoncer une première loi suffisamment approchée dans un grand nombre de cas, loi connue depuis le XVII[e] siècle et formulée par Huygens, Mariotte et Pardies :

Si la densité de l'air est la même (expériences faites dans un air sensiblement à la même température et à la même pression), *le coefficient* K *dépend uniquement de la forme du corps étudié.*

Pour des corps semblables, le coefficient K est constant, quelle que soit la valeur de la vitesse V. La réalisation d'une expérience en petit, *semblable* à une expérience en grand, est facile; *on peut choisir à volonté l'échelle du modèle et la vitesse de l'expérience.*

Nous avons admis que le corps était animé dans l'air d'une translation. Une telle restriction n'est que dans le langage. Le mouvement du corps dans l'air peut être plus complexe, accompagné par exemple de rotation. Tel est le cas d'une hélice. Toutefois, dans ce cas, *les vitesses périphériques doivent être,* pour le modèle et l'appareil en vraie grandeur, *dans le même rapport que les vitesses de translation ou d'avancement.*

Pour les *hélices sustentatrices,* les vitesses d'avancement sont nulles et cette condition est remplie. Si D est le diamètre de l'hélice et n le nombre de tours dans l'unité de temps, si S est la surface du cercle balayé par les pales; on tire facilement de la relation (9) les lois énoncées en 1903 par le colonel Charles Renard. Pour des *hélices semblables*, on a

$$\frac{\mathrm{H}}{n^2 \mathrm{D}^4} = \text{const.}, \qquad \frac{\mathfrak{P}_u}{n^3 \mathrm{D}^5} = \text{const.},$$

H, traction de l'hélice; $\mathfrak{P}_u$, puissance utile dépensée.

Il résulte immédiatement de ce que nous avons dit plus haut que ces formules s'étendent, avec des coefficients différents, aux *hélices propulsives*, quand la combinaison de la vitesse d'avancement et de la vitesse de rotation donne, pour les points homologues, des vitesses également inclinées sur l'axe. En d'autres termes, *pourvu que les valeurs de* $\frac{\mathrm{V}}{n\mathrm{D}}$ *soient les mêmes pour deux hélices géométriquement semblables*, les résultats des expériences faites sur l'une d'elles sont applicables à l'autre. On

peut déterminer la traction des hélices propulsives géométriquement semblables d'après la formule (9) en considérant que *le coefficient* K *est une fonction de* $\frac{V}{nD}$.

Pour des ailes d'aéroplanes et pour des aéroplanes entiers, M. Eiffel considère K *comme une simple fonction de la forme du corps étudié.*

M. Eiffel se fonde sur la comparaison des résultats d'essais faits, d'une part par le commandant Dorand sur un biplan en plein vol, d'autre part par lui-même au ventilateur sur un modèle de cet aéroplane construit à l'échelle de $\frac{1}{14,5}$.

La coïncidence des résultats obtenus à 1 pour 100 près conduit M. Eiffel à considérer la loi énoncée plus haut (loi de similitude supposant K constant) comme rigoureusement exacte.

Nous ne croyons pas, avec M. Maurain, que cette conclusion soit justifiée. Les mesures de M. Eiffel et celles du commandant Dorand n'ont pas été faites dans les mêmes conditions : dans celles de M. Eiffel, le modèle de l'hélice était fixe; dans celles du commandant Dorand, l'hélice tournait en avant des plans sustentateurs. Or, le vent de l'hélice a sur la voilure une action assez importante. Il semble résulter de là que l'accord à 1 pour 100 entre les résultats de M. Eiffel et ceux du commandant Dorand ait comme conséquence que, si les expériences avaient été faites dans des conditions réellement comparables, les résultats obtenus auraient présenté une certaine divergence.

Des expériences de comparaison sur des *surfaces* et leurs modèles réduits (modèles au $\frac{1}{10}$) ont d'ailleurs été faites, à la *même vitesse relative*, au laboratoire de Saint-Cyr (méthode du chariot) et au laboratoire Eiffel.

Elles n'ont pas montré une coïncidence aussi parfaite que les expériences de M. Eiffel comparées aux essais du commandant Dorand.

Elles ont seulement mis en évidence *une même allure dans l'ensemble des résultats, avec action verticale paraissant systématiquement un peu plus grande au chariot qu'au ventilateur.*

Enfin M. de Guiche déduit de ses expériences sur les voilures courbes la proposition suivante :

Deux voilures de même envergure, mais dont les profils sont homothétiques, ne sont pas comparables.

Ces résultats expérimentaux montrent que, *même pour les ailes et les aéroplanes, la loi de similitude fondée sur* K = const. *n'est pas rigoureusement exacte.*

Cependant nous pensons que *cette loi est suffisante pour renseigner les constructeurs sur les qualités aérodynamiques des ailes ou des appareils dont ils ont établi le projet.*

En ce qui concerne les *hélices*, cette loi n'est plus suffisante. Il ne suffit plus que les expériences sur une hélice de grandeur normale et sur son modèle soient faites de telle façon que $\frac{V}{nD}$ ait la même valeur. Il faut encore que *la vitesse d'avancement* V *et, par suite, la vitesse périphérique* $\pi n D$ *soient les mêmes.* La formule (9) est applicable à la traction des hélices, à la condition de considérer K comme une fonction non seulement de $\frac{V}{nD}$, mais de V, et par suite de nD.

On est ainsi conduit, afin d'avoir des vitesses de rotation du modèle qui ne dépassent pas 3600 tours : minute, à se limiter à une échelle de $\frac{1}{3}$ pour les modèles d'hélices.

Des considérations théoriques, développées par M. Jouguet dans la *Revue de Mécanique*, montrent que cette perturbation par rapport à la loi Huygens, Mariotte et Pardies est due à la *compressibilité de l'air*, qui prend de l'importance aux très grandes vitesses relatives du solide par rapport au fluide (30^m à 80^m par seconde) qui sont réalisées dans le fonctionnement des hélices.

Ces mêmes considérations théoriques montrent que, pour les vitesses d'avancement usitées en aviation (25^m à 30^m par seconde), on pourrait avoir une loi de similitude plus approchée de la loi précédente, en corrigeant la perturbation *due à la viscosité de l'air.* Il suffirait pour cela d'essayer le modèle à une vitesse qui serait égale à la vitesse de l'aéroplane multipliée par l'inverse de l'échelle ou par le rapport d'une longueur de l'aéroplane à la longueur homologue du modèle.

II. — Le déplacement dans l'air du corps d'expériences et le mouvement de l'air par rapport au corps immobile.

M. de Guiche a trouvé pour certaines surfaces, notamment pour les plans, des distributions de pressions différentes de celles qui ont été observées par M. Eiffel. Celui-ci n'a rencontré, sur la face opposée au vent, que des zones de dépressions; M. de Guiche, au contraire, pour des angles d'incidence inférieure à 20°, a trouvé des zones de pressions.

Or les expériences sont, dans les deux cas, très nombreuses et faites avec le plus grand soin. Les résultats différents sont donc dus à des phénomènes qui apparaissent dans un des modes d'expérimentation et ne se produisent pas dans l'autre.

Le principe du mouvement relatif n'est, en effet, pas en jeu. Ce qui peut être mis en doute, c'est la réalisation expérimentale par la méthode du tunnel des conditions que nécessite l'application d'un tel principe.

Considérons un solide qui se déplace d'un mouvement de translation de vitesse V dans un milieu indéfini primitivement calme. A un instant quelconque, éloigné de l'origine du mouvement, on peut distinguer deux régions dans l'espace environnant le corps étudié. L'une, formée de parties assez éloignées de ce solide, n'est pas troublée par le passage de celui-ci; chacun de ses points est animé, *par rapport au corps mobile*, d'une vitesse (— V) égale, parallèle et de sens contraire à la vitesse de translation V du corps. L'autre région, située au voisinage du corps, est troublée par le passage de celui-ci. Par rapport au corps mobile, tout point de cette région est animé d'une vitesse qui est la résultante :

a. D'une vitesse (— V) égale, parallèle et de sens contraire à la vitesse de translation du corps;

b. D'une vitesse (W), provoquée par le déplacement du solide en question.

Cette dernière vitesse est fonction du trouble apporté dans le milieu par ce solide. Elle dépend donc, non seulement de la forme de ce corps, de ses dimensions, de l'état de poli de sa surface; mais encore des propriétés du milieu, de sa viscosité, des conditions initiales du mouvement.

Laissons maintenant le solide fixe et déplaçons par rapport à lui le milieu environnant. Ce mode expérimental doit réaliser les conditions que nécessite l'application du mouvement relatif. Il faut pour cela que, à partir du moment où le régime permanent est établi, la vitesse de chaque point du milieu troublé par la présence du solide soit équipollente à la résultante des deux vitesses (— V) et W.

On admet, dans la méthode du tunnel, qu'un tel résultat est obtenu en donnant au fluide, dans la région non troublée, une vitesse (— V). En particulier, dans les expériences au sein de l'air, on admet qu'il suffit d'aspirer de l'air à l'une des extrémités du tunnel suffisamment éloignée du solide placé à l'intérieur. Or, ce fait n'implique pas que la vitesse, dans la partie troublée, est équipollente à la résultante des deux vitesses (— V) et W.

La viscosité du fluide peut intervenir pour faire dépendre l'état de la région troublée du mode de production du mouvement relatif du solide par rapport au fluide. L'expérience seule peut décider.

Or, *la comparaison des expériences de M. de Guiche et de M. Eiffel montre que les phénomènes observés dans la méthode du tunnel ne sont pas toujours identiques à ceux qui résultent du mouvement d'un solide au sein d'un fluide.*

Nous devons signaler toutefois que *l'étude des dépressions faites à l'Institut de Saint-Cyr* (méthode du chariot) *ne montre pas*, par rapport aux expériences de M. Eiffel, *les différences qu'a signalées M. de Guiche.* La question posée ici *ne nous semble pas complètement élucidée.*

Toutefois, la solution d'une telle question ne peut être intéressante qu'au point de vue de l'Aérodynamique. Elle ne présente pas un intérêt aussi grand au point de vue de la pratique de l'aviation. A ce point de vue, nous considérons comme *équivalentes les deux méthodes de production du mouvement relatif de l'air par rapport au corps étudié.*

III. — L'Aérodynamique du plan. Les plans orthogonaux.

Quand il s'agit d'un plan orthogonal *mince*, on peut, pour la pratique, prendre pour le coefficient K de la formule (9) la valeur $K_{90} = 0,080$. M. Eiffel a trouvé que le coefficient variait :

a. Avec l'étendue de la surface;

b. Pour une surface d'étendue déterminée, avec la forme du contour.

Il convient de remarquer que les surfaces, sur lesquelles Eiffel a opéré, sont en général trop petites. Les perturbations, causées par l'influence des bords, sont prépondérantes. Il faudrait pouvoir opérer sur des surfaces, dont l'un des côtés aurait une longueur supérieure à 1^m. Avec de telles surfaces le régime régulier, caractérisé par les isobares parallèles aux côtés de la plaque, serait établi et aurait la prépondérance. On aurait ainsi pour K_{90} une valeur caractérisant ce régime régulier, valeur qui serait indépendante de la surface de la plaque et de la forme de son contour.

Pour que l'*épaisseur* du disque normal à la vitesse relative ait de l'influence, il faut que cette épaisseur soit de l'ordre des dimensions transversales du disque. A partir du moment où l'épaisseur de la plaque est égale à l'une des dimensions transversales, le coefficient K_{90} va d'abord en diminuant pour augmenter ensuite à mesure que l'épaisseur augmente.

IV. — L'Aérodynamique du plan. Le plan incliné sur la vitesse relative. Plan isolé.

1. *Distribution des pressions et dépressions.*

1° Dès que le plan dépasse certaines dimensions, on constate, à l'avant et à l'arrière, toute une *zone centrale où un régime régulier s'établit*. L'existence de cette zone se traduit par des isobares parallèles au bord d'attaque. Dans toute cette zone, le phénomène est défini par la répartition des pressions le long d'une ligne de plus grande pente; l'étude de celle-ci suffit, dans bien des cas, pour caractériser une surface.

M. Eiffel a étudié seulement ce dernier mode de distribution des pressions et des dépressions. Les dimensions des côtés normaux au vent ont été parfois trop petites et l'expérimentateur n'a observé que les pressions et dépressions dans la région troublée par le voisinage des bords.

2° Les *bandes marginales troublées* ont une largeur sensible-

ment constante, qui est pour l'avant de $0^m,20$ environ et pour l'arrière de $0^m,40$ à $0^m,50$. En conséquence, pour que le régime régulier apparaisse, le plan doit avoir une envergure au moins double de la plus grande largeur des bandes troublées.

3° *Étude spéciale de l'avant du plan* (*incidences inférieures à* 20°). — Les pressions, mesurées le long d'une médiane de plus grande pente, vont en diminuant constamment depuis le bord antérieur; elles peuvent même devenir négatives au voisinage du bord postérieur. L'existence de ces dépressions se manifeste pour des angles d'incidence d'autant plus petits que l'allongement (rapport de la longueur du bord antérieur à la profondeur) est plus grand.

Les bandes latérales troublées sont le siège de pressions inférieures à celles que l'on constate dans la zone de régime à la même distance du bord d'attaque.

4° *Étude spéciale de l'avant du plan* (*incidences supérieures à* 20°). — Le maximum de pression n'est plus au bord antérieur; celui-ci devient, quand l'incidence augmente, un régime de moindre pression, comme les trois autres côtés.

5° *Étude spéciale de l'arrière du plan* (*incidences inférieures à* 20°). — Dans la zone régulière (isobares parallèles au bord d'attaque) pour des profondeurs suffisantes où l'influence des bords ne se fait pas sentir, la pression en un point paraît, à une incidence donnée, être fonction de sa seule distance au bord d'attaque.

M. Eiffel n'a pas observé de contre-pressions sur cette face dorsale des plans. Au contraire, M. de Guiche en a observé de très nettes. C'est une des différences entre les résultats obtenus par l'une ou l'autre des méthodes d'expérimentation.

6° *Étude spéciale de l'arrière du plan* (*incidences supérieures à* 20°). — Il n'y a plus de contre-pressions sur la face dorsale; la distribution des dépressions devient assez uniforme.

2. *La poussée totale.*

1° D'après M. Eiffel, la poussée totale passe par un maximum pour un angle d'incidence voisin de 37°.

D'après M. de Guiche, la poussée totale augmente jusqu'à une valeur de l'incidence égale à 45°. Au delà, elle reste sensiblement constante.

Pour des angles d'inclinaison compris entre 0° et 10°, ce sont les plaques les plus allongées dans le sens perpendiculaire à la vitesse relative qui supportent les plus fortes pressions.

2° Le *centre de poussée* (défini arbitrairement comme le point où la résistance de l'air coupe le plan mince) est au milieu de la plaque quand celle-ci est perpendiculaire à la vitesse relative. A mesure que l'inclinaison décroît, le centre de poussée se rapproche constamment du bord d'attaque jusqu'aux faibles inclinaisons.

3° La résultante des actions de l'air est, pour les inclinaisons assez fortes (supérieures à 10° environ) sensiblement perpendiculaire au plan. Pour les angles plus faibles, l'angle de la résultante avec la perpendiculaire à la vitesse relative est plus grand que l'inclinaison du plan; la résultante est inclinée sur la normale au plan en arrière de cette normale par rapport à la direction de la vitesse relative.

4° *Plaques épaisses.* — Si l'on augmente l'épaisseur d'une plaque plane en laissant ses extrémités planes et à angle droit sur les deux faces, on modifie peu l'allure des phénomènes décrits pour les plaques minces, sauf qu'on augmente la résistance à l'avancement d'une manière d'autant plus grande que l'épaisseur est plus grande.

5° *Plaque plane épaisse avec bord d'attaque ou bord de sortie muni d'un biseau.* — Avec biseau à l'arrière, le rapport

$$\frac{\text{traînée}}{\text{poussée}}$$

est notablement plus faible que sans biseau. Il y a plus d'avantages à fuseler l'arrière que l'avant.

Il est préférable de faire en sorte que le bord d'attaque soit en biseau vers le bas plutôt que vers le haut.

Enfin, la loi de variation du centre de poussée est toute différente de celle qui a été indiquée plus haut pour les plans.

V. — L'Aérodymamique des voilures courbes. Voilure isolée.

On a fait en France un nombre très considérable d'expériences sur les *voilures courbes isolées*.

M. Eiffel a opéré sur des *modèles;* un très grand nombre d'entre eux ont pour envergure $0^m,90$ et pour profondeur à la corde d'une section $0^m,15$ (allongement = 6). Il n'est pas descendu au-dessous des dimensions : $0^m,45$ (envergure); $0^m,15$ (profondeur à la corde). M. Eiffel considère la surface moyenne, c'est-à-dire la surface équidistante des deux faces de la voilure; la flèche de la voilure est le rapport, pour la surface moyenne, de la flèche maxima à la corde d'une section.

M. de Guiche a étudié des voilures dont l'envergure est égale à $1^m,70$ et dont la profondeur mesurée suivant la corde d'une section est égale à $1^m,20$ (allongement = 1,40). Toutefois, pour certaines d'entre elles, la profondeur est réduite à $0^m,60$.

A l'Institut de Saint-Cyr, on a étudié des voilures dont l'envergure varie de 5^m à 10^m, la profondeur variant de 2^m à $2^m,50$.

1. *Détermination des pressions et des dépressions.*

1° A partir d'une certaine envergure, il s'établit un *régime régulier* intéressant toute la surface, à l'exception de deux bandes latérales troublées; ce régime se traduit par des isobares parallèles au bord d'attaque.

Il semble que la largeur assez uniforme des bandes troublées ne dépasse pas $0^m,20$. Il convient donc de n'étudier que des voilures dont l'envergure est supérieure à $0^m,40$.

2° *Chacune des faces de la voilure concourt à la sustentation*, mais non pas également. Les *pressions*, supportées par la *face inférieure*, interviennent, aux incidences de vol, *moins efficacement* dans la poussée totale que les *dépressions du dos de l'aile*.

3° *La face inférieure subit l'influence de la face supérieure;* mais elle est *sans action* sur celle-ci.

4° *La courbure dorsale commande la distribution des dépressions;* elle dévie vers le haut les filets d'air.

Une hauteur exagérée de la flèche maxima de cette courbure a pour effet de produire sur le bord postérieur des contre-pressions nuisibles.

Les déplacements de cette flèche vers l'avant entraînent un déplacement corrélatif du maximum des dépressions et, par suite, une diminution de la traînée.

L'idéal serait de supprimer, dans une voilure, les pressions ou dépressions nuisibles (c'est-à-dire de n'avoir, sur la face supérieure, que des dépressions et des pressions sur la face inférieure) et de ne retrouver la pression atmosphérique qu'au bord postérieur où les filets d'air se rejoindraient sans choc. La clef du problème semble se trouver dans la hauteur et la position de la flèche maxima de la courbure dorsale.

5° Les dépressions ne sont pas modifiées par la *forme du bord d'attaque*. Celui-ci n'a qu'une action locale.

On a dit que ce bord devait être arrondi sous peine de diminuer la dépression du dos de l'aile. Il n'en est rien. Il vaut mieux le rendre tranchant pour faciliter sa pénétration.

6° En général, pour les angles qui intéressent l'aviation, les modes de variation des *pressions et des dépressions* sont analogues dans tous les résultats obtenus par divers expérimentateurs.

Les modes de variation des *dépressions sur le dos de l'aile* se rapportent à deux types principaux :

a. La dépression part d'une certaine valeur, souvent faible, au voisinage du bord d'attaque; elle va en augmentant à mesure qu'on s'éloigne de ce bord, passe par un maximum, puis décroît rapidement jusqu'au bord postérieur.

Cette distribution s'observe avec des ailes épaisses (type monoplan) de 80^{mm} à 100^{mm} d'épaisseur maxima.

b. La dépression a une grande valeur au voisinage du bord d'attaque. Quand on s'éloigne de ce bord vers le bord postérieur, elle va d'abord en diminuant, passe par un minimum, augmente, passe par un second maximum en général inférieur à la valeur voisine du bord d'attaque, enfin décroît régulièrement jusqu'au voisinage du bord de sortie.

M. Eiffel a trouvé de telles variations avec des ailes minces (type biplan) de 20mm à 35mm d'épaisseur.

7° Nous venons d'examiner le mode de distribution des dépressions sur le dos de l'aile. Si maintenant on considère la *face inférieure*, on ne trouve, en général, de dépressions qu'au voisinage du bord postérieur. Sur tout le reste de la face s'exercent des pressions. En général, quand on s'éloigne du bord d'attaque, la pression augmente d'abord un peu, passe par un maximum, puis décroît jusqu'au bord postérieur.

8° Deux voilures de même envergure, mais dont les profils sont homothétiques, ne sont pas comparables.

9° Toutefois, comme le remarque M. de Guiche, c'est la voilure la moins profonde (celle qui a le plus grand allongement) qui présente les avantages les plus marqués. Il convient de faire des expériences très étendues sur des voilures de profondeurs différentes avec même envergure, c'est-à-dire sur des voilures d'allongements différents et homothétiques pour savoir si, pour un profil donné, il y a un allongement optimum et quel est cet allongement.

Remarquons, d'ailleurs, que M. Eiffel considère l'allongement 6 comme cet allongement optimum.

2. *Résultante totale et centre de poussée.*

1° *La résultante totale augmente* constamment avec l'angle d'incidence (plus petit angle avec la vitesse relative de la corde du profil de la surface situé dans le plan de symétrie), tout au moins dans la région des angles intéressant l'aviation.

Quant au *centre de poussée* (défini arbitrairement comme l'intersection de la résultante totale avec la corde du profil de la surface situé dans le plan de symétrie), il se *rapproche* constamment du bord d'attaque quand l'angle d'incidence *augmente* à partir de zéro, dans la région des angles intéressant l'aviation (angles inférieurs à 10°). C'est l'inverse de ce qui se passe avec les plans.

Si l'on sort de la région des angles intéressant l'aviation, le centre de poussée *s'éloigne de nouveau* du bord d'attaque lorsque *l'incidence augmente*.

La détermination de la résultante, correspondant à une valeur

déterminée de l'angle d'incidence, exige la connaissance de la courbe à laquelle elle est tangente (courbe *métacentrique* située dans le plan de symétrie). Mais la forme de cette courbe particulière à chaque surface n'a pas de définition simple.

2° Si des ailes de différentes épaisseurs ont une *même surface de courbure moyenne*, elles sont d'autant *plus avantageuses* qu'elles sont *plus minces*.

Il résulte de là que, si l'on veut comparer les qualités des deux voilures, il faut ne considérer que des voilures de même épaisseur maxima et présentant le même allongement.

VI. — L'Aérodynamique des voilures courbes. Combinaisons de voilures courbes. Voilures en biplan.

M. Eiffel a déterminé les diverses valeurs de

$$R_X \quad \text{et} \quad R_Y$$

pour les diverses parties d'un biplan Dorand, ces parties étant expérimentées assemblées en appareil d'aviation ou séparées.

Le biplan Dorand est constitué par une grande cellule formée de deux ailes identiques de $14^{m},50 \times 2^{m},25$. Ces ailes sont écartées en hauteur de $1^{m},95$, c'est-à-dire d'une hauteur sensiblement égale à la profondeur; elles sont décalées d'arrière en avant (voilure supérieure avançant plus que la voilure inférieure) de $0^{m},85$ en profondeur; elles sont reliées par deux séries de dix montants obliques. Un équilibreur avant et un empennage formé par deux plans parallèles sont montés sur un fuselage entretoisé; ces deux appareils sont conjugués, constituant ainsi un empennage complètement mobile.

L'empennage forme avec les voilures de la grande cellule un V longitudinal très nettement accusé.

1° Dans un appareil ainsi constitué, la *sustentation de la cellule isolée* est notablement *supérieure* à celle du *biplan entier*.

L'empennage, loin d'être porteur, reçoit sur le dos l'air dévié par les ailes; il réduit ainsi la sustentation.

2° *L'influence des deux voilures parallèles*, dont la distance verticale est sensiblement égale à leur profondeur, se traduit par

une perte de sustentation d'environ 20 pour 100 de la sustentation de la cellule complète, mais isolée.

3° *L'aile supérieure*, malgré la présence de l'aile inférieure, se comporte comme si elle était *isolée*.

L'aile inférieure, influencée par l'aile supérieure, subit une *perte de sustentation* d'environ $\frac{1}{3}$ de la sustentation de l'aile isolée.

Dans un biplan, l'aile inférieure travaille donc mal au point de vue de la sustentation. On peut sans inconvénient la réduire, si cette réduction procure d'autre part des avantages.

4° Pour les angles d'incidence ordinaires du vol (plus petit angle avec la vitesse relative de la corde du profil de l'une des voilures), la *résistance à l'avancement* de toutes les parties en dehors de la cellule principale est environ les 7 pour 100 de la sustentation; la résistance à l'avancement de toutes les parties en dehors des voilures est environ les 10 pour 100 de la sustentation.

Ces valeurs sont applicables aux biplans.

5° Le *décalage* des voilures de la cellule sustentatrice n'améliore pas d'une manière appréciable ses qualités au point de vue de la sustentation et de la résistance à l'avancement, mais rend sa construction plus difficile.

Un tel décalage n'est pas, en général, à recommander.

VII. — L'Aérodynamique des voilures courbes. Combinaisons de voilures courbes. Voilures en tandem.

Considérons deux voilures d'envergures différentes situées l'une derrière l'autre (voilures en tandem). Si la voilure de moindre envergure est *en avant* de l'autre dans le sens du mouvement, on dit que les deux voilures forment un *type Canard;* si la voilure de moindre envergure est *en arrière* de l'autre, on dit qu'on se trouve en présence du type *monoplan ordinaire*.

L'angle que font les cordes des profils des voilures dans le plan de symétrie est l'*angle de décalage* ou simplement le *décalage* de l'une des voilures par rapport à l'autre.

Si, dans le plan de symétrie, le bord d'attaque de la voilure

arrière est sur le prolongement de la corde du profil d'avant, on dit que le *décalage en hauteur* des deux voilures est nul.

M. Eiffel a fait une série de recherches avec deux ailes de même type, dont l'une a pour allongement 6 ($90^{cm} \times 15^{cm}$) et l'autre un allongement 3 ($45^{cm} \times 15^{cm}$).

Le *type Canard* a été étudié (décalage en hauteur nul) avec des décalages variant de 2° à 6° et des écartements des voilures qui sont les $\frac{4}{3}$ et les $\frac{8}{3}$ de la largeur des ailes.

Le type *monoplan ordinaire* a été étudié avec un décalage de 4° et des écartements des voilures identiques aux précédents.

Enfin, M. Eiffel a étudié le type *tandem avec voilures égales*.

L'angle d'incidence de cet ensemble de voilures est le plus petit angle avec la direction de la vitesse relative de la corde du profil de la voilure d'avant par rapport au sens de la marche d'ensemble.

1° *Type Canard*. — Au point de vue de la sustentation et de la résistance à l'avancement, on a intérêt à augmenter l'écartement des voilures et à ne pas dépasser un certain décalage angulaire de celles-ci.

Supposons qu'on ait déterminé, pour divers angles d'incidence, les résultantes totales des actions de l'air sur l'ensemble des voilures. C'est ce que nous appelons déterminer le *faisceau des résultantes*.

En étudiant ce faisceau, on obtient les résultats suivants :

a. Le faisceau est toujours situé vers le milieu de l'intervalle qui sépare les deux voilures.

C'est donc dans cette région que doit passer la verticale du centre de gravité d'un aéroplane de ce type.

b. Pour une même distance des voilures, le faisceau est d'autant plus étalé que le décalage est plus grand.

c. Pour un même décalage angulaire des voilures, le faisceau est d'autant plus étalé (résultantes, correspondant à deux valeurs déterminées de l'angle d'incidence, plus séparées l'une de l'autre) que la distance des voilures est plus grande.

Ce plus ou moins grand étalage du faisceau des résultantes est en relation avec la stabilité longitudinale d'un aéroplane de ce type.

d. Pour une même distance des voilures, le faisceau des résul-

tantes se déplace vers la voilure avant, à mesure qu'augmente le décalage angulaire.

Dans un aéroplane du type Canard, si l'on augmente le décalage angulaire des voilures principales, il faut déplacer le centre de gravité vers l'avant de l'appareil.

Supposons que dans un tel appareil le centre de gravité soit sur l'axe de l'hélice. Pour l'équilibre sous un certain angle d'incidence, il est nécessaire que la résultante des actions de l'air correspondant à cet angle passe par le centre de gravité. De celui-ci abaissons des normales sur les autres résultantes du faisceau, résultantes des actions de l'air qui correspondent à divers angles d'incidence. Il est dès lors facile de calculer les moments de ces résultantes par rapport au centre de gravité. Ce sont les moments *stabilisateurs* pour une rotation autour d'un axe passant par le centre de gravité et normal au plan de symétrie de l'ensemble des voilures. Ils sont *positifs* quand ils tendent à faire tourner leur bras de levier en sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre; ils sont *négatifs* dans le cas contraire.

(*A suivre.*)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Dumont (E.). — *Théorie générale des nombres. Définitions fondamentales.* (Collection *Scientia.*) 1 vol. in-8 (20-13), 194 pages, avec figures. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1915. Prix : 2 fr.

Lecornu (Léon). — *Cours de Mécanique,* professé à l'École Polytechnique. Tome II. 1 vol. gr. in-8 (25-16), VI-538 pages, avec 110 figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1915. Prix : 18fr.

Morgan (A. de). — *A Budget of Paradoxes.* Reprinted, with the Author's Additions, from the Athenæum. 2d ed., edited by *D. E. Smith.* 2 vol. in-8, VIII-402 et II-387 pages. Chicago, the Open Court, 1915. Price : S. 7.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WHITTAKER (E.-T.) ET WATSON (G.-N.). — A COURSE OF MODERN ANALYSIS : *An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental function.* Second edition, completely revised. Un vol. gr. in-8° (26 × 17), VIII-560 pages. Cambridge, University Press, 1915.

La « Cambridge University Press » vient de publier une seconde édition du Traité de M. Whittaker [1] : *A Course of modern Analysis*. C'est un Ouvrage important, qui diffère sensiblement de son devancier ; un détail du titre suffirait à le faire pressentir : pour lui donner plus d'ampleur, et afin de mieux exposer des doctrines toutes récentes, l'Auteur s'est adjoint un collaborateur, M. Watson. De nouveaux Chapitres ont été ajoutés, tandis que les anciens ont été revus, modifiés, et souvent complètement transformés. Nous allons donc reprendre entièrement l'analyse de l'Ouvrage.

Observons tout d'abord que le plan primitif a été conservé ; nous retrouvons la division du Traité en deux parties : la première est réservée aux méthodes générales de l'Analyse, tandis que la seconde renferme les monographies des transcendantes usuelles [2].

C'est ainsi que le premier Chapitre débute par la théorie des nombres irrationnels (d'après Dedekind) et par celle des quantités complexes. Le Chapitre suivant est consacré à la « théorie de la convergence » ; les Auteurs introduisent les concepts de limite et de plus grande des limites, ainsi que les symboles O et o de M. Landau. Puis, après le théorème de Bolzano-Weierstrass, nous voyons apparaître la théorie classique des séries simples et doubles et des produits infinis, ainsi que de brèves indications sur les déterminants infinis. Peut-être pourrait-on faire quelques réserves au sujet de l'ordre des théorèmes de ce Chapitre que, parfois, l'on pourrait souhaiter plus logique. Mais, sans m'arrêter sur ce point,

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. XXVII, 1903, p. 127-131.

(2) Remarquons, en passant, que le numérotage des paragraphes a été effectué suivant la notation décimale de M. Peano.

j'insisterai plutôt sur les nombreux exemples qui permettent au lecteur de vérifier à chaque instant les théorèmes généraux : pour un novice, cette façon de procéder a d'incontestables avantages ; l'aridité de l'exposition s'atténue et la portée des propositions apparaît plus nettement.

Le Chapitre III traite des fonctions continues et de la convergence uniforme. Les Auteurs démontrent le théorème de Borel-Lebesgue, et l'appliquent ensuite pour établir que les fonctions continues sont uniformément continues. Il nous semble que cette démonstration aurait pu être exposée plus élégamment, à l'exemple de celle qu'on doit à M. Lebesgue lui-même ; mais, par contre, faisons cette constatation : les Auteurs n'attendent pas qu'une découverte date de plusieurs générations pour en faire bénéficier leur enseignement ; exemple qui devrait trouver de nombreux imitateurs....

Voici maintenant un Chapitre nouveau, dû à M. Watson : la théorie de l'intégrale de Riemann. Cette théorie est exposée suivant le Mémoire classique de M. Darboux ; elle est complétée par une discussion des intégrales impropres et « infinies » (suivant la terminologie de M. Hardy) et par l'étude de l'intégration dans le champ complexe.

Le Chapitre V, dédié aux fonctions analytiques, débute par la définition des fonctions monogènes et la démonstration du théorème fondamental de Cauchy ; les Auteurs emploient la méthode de M. Goursat, après l'avoir simplifiée par une application préliminaire du lemme de Borel-Lebesgue. Viennent ensuite l'intégrale de Cauchy, les théorèmes de Taylor, Laurent et Liouville, la notion du point à l'infini, et des aperçus sur le prolongement analytique. Les Auteurs étudient également quelques propriétés des fonctions multiformes ; par une analyse très simple, ils montrent quelle signification on doit ajouter à l'ensemble des points réels, de coordonnées $x (< o)$, et $y (= x^x)$, et pourquoi cet ensemble ne constitue pas une courbe ; et leurs explications sont autrement claires que celles d'un jeune géomètre allemand qui, à l'exemple de L. Fuchs, réclamait la peine capitale pour des erreurs de ce genre....

Le Chapitre VI contient un résumé succinct, mais très clair, sur l'évaluation des intégrales définies au moyen de la théorie des

résidus. Peut-être les Auteurs auraient-ils pu dire quelques mots sur l'application de cette théorie aux fonctions algébriques. — Observons encore que le procédé par lequel ils calculent l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{t}\, dt$$

ne repose aucunement sur la théorie des résidus, mais sur le théorème général de Cauchy.

Sous le titre de « développements de fonctions en séries infinies », le Chapitre suivant renferme une série de résultats appartenant à diverses branches de la théorie des fonctions analytiques. D'abord, la définition des nombres et des polynomes de Bernoulli, la formule sommatoire de M. Darboux et celle d'Euler-Mac Laurin; puis les théorèmes de M. Mittag-Leffler et de Weierstrass, l'intégrale de M. Borel et son application au problème du prolongement analytique, et, enfin, les développements en séries de factorielles inverses. On voit par là combien nous approchons des théories récentes.

La même remarque s'applique aux Chapitres suivants. Tout d'abord, le Chapitre VIII contient la théorie des séries asymptotiques de Poincaré et des séries sommables suivant les méthodes d'Euler, de Cesàro, de MM. Borel et M. Riesz, ainsi qu'un théorème dû à M. Hardy sur la convergence (classique) des séries sommables suivant la méthode de Cesàro ; ce théorème trouvera son application dans le prochain Chapitre consacré aux séries de Fourier. Pour exposer cette dernière théorie, les Auteurs emploient une méthode plutôt originale : après un historique, volontairement très bref (mais à la fin duquel on devrait trouver un nom français), le lecteur est immédiatement conduit au théorème de Fejer, et, de là, par le théorème de Hardy et par deux lemmes dus à Riemann et à M. Lebesgue, au théorème général de Dirichlet. Puis, MM. Whittaker et Watson examinent brièvement l'uniformité de la convergence ; ils démontrent le théorème de Hurwitz-Liapounoff et terminent par la théorie générale de Riemann sur les séries trigonométriques et par l'intégrale double de Fourier.

Les équations différentielles linéaires font l'objet du Chapitre suivant. Les Auteurs se bornent à étudier les solutions dans le domaine d'un point ordinaire et d'un point régulier ; puis ils

indiquent une curieuse remarque de MM. Klein et Bôcher : toutes les équations différentielles linéaires de la Physique mathématique sont des dégénérescences d'une équation régulière à quatre points singuliers, et pour laquelle la différence des exposants caractéristiques en chaque point serait $1:2$. Effectivement, on retrouve ainsi les équations de Lamé, Mathieu, Legendre, Bessel, Weber, Hermite et Stokes dont nous aborderons prochainement l'étude. Et l'on pourrait ajouter aussi l'équation de Gauss que les Auteurs donnent bientôt après, sous la forme généralisée de Papperitz.

La première Partie se termine par le Chapitre XI, rédigé entièrement par M. Watson et consacré aux équations intégrales. La méthode de Fredholm, exposée intuitivement, est ensuite analysée de très près ; puis l'Auteur étudie l'équation de Volterra et s'étend davantage sur les élégants résultats de M. Schmidt ; il termine enfin par la solution des équations d'Abel et de Schlömilch.

Et, maintenant, le lecteur pourra aborder la seconde Partie ; il sera parfaitement préparé à l'étude des transcendantes importantes qu'il va rencontrer. Ces fonctions se répartissent en trois groupes : groupe des transcendantes arithmétiques [fonctions Γ, $\zeta(s)$ et $\zeta(s, a)$]; groupe des transcendantes linéaires (fonctions de Gauss, de Legendre, de Bessel et de Mathieu) ; et groupe des transcendantes elliptiques (fonctions de Weierstrass, fonctions θ et fonctions de Jacobi).

La fonction Γ, qui ouvre cette série, fait l'objet d'un excellent Chapitre. Les Auteurs définissent cette transcendante au moyen de son développement en produit infini ; ils en déduisent aisément la formule limite d'Euler, l'équation fonctionnelle caractéristique, le théorème de multiplication et la représentation de la fonction sous forme d'intégrale définie et d'intégrale curviligne. Nous arrivons alors aux formules concernant la dérivée logarithmique : formule de Gauss, de Binet et série de Stirling. L'étude se termine par la définition des fonctions B et par le calcul d'une intégrale de Dirichlet.

Le Chapitre suivant, dû à M. Watson, se rapporte à la fonction ζ de Riemann. L'Auteur définit simultanément les fonctions $\zeta(s)$ et $\zeta(s, a)$; après quelques calculs il démontre la formule de Hurwitz pour $\zeta(s, a)$, d'où, comme conséquence, la relation célèbre de Riemann entre $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$. Ce Chapitre se termine par la

formule d'Hermite, l'intégrale de Riemann et une application au développement asymptotique de la fonction $\operatorname{Log}\Gamma(z+a)$. On pourrait reprocher à l'Auteur de n'avoir pas fait sentir suffisamment l'extrême difficulté du sujet abordé : aussi bien, la théorie de la fonction ζ exige le concours de toutes les branches de l'Analyse ; et parmi les théorèmes qu'elle met à contribution, ce sont souvent les plus récents, et les plus difficiles à établir. Or, c'est tout au plus si l'Auteur fait allusion à la célèbre hypothèse de Riemann...

L'étude de la fonction hypergéométrique remplit le Chapitre suivant (Chap. XIV). Les Auteurs énumèrent les 24 solutions classiques et, pour obtenir les relations linéaires entre ces fonctions, ils esquissent une méthode des plus élégantes, découverte récemment par M. Barnes. La représentation des solutions sous forme d'intégrales définies, et l'étude des relations entre les fonctions contiguës, terminent cette étude.

Le Chapitre XV traite des fonctions de Legendre ; il débute par l'étude des polynomes de Legendre et de leurs nombreuses relations, puis il roule sur les fonctions de Legendre générales des deux espèces et sur leurs expressions au moyen des intégrales de Laplace. Les Auteurs terminent par les développements en séries de polynomes de Legendre et par les théorèmes d'addition.

Dans l'équation hypergéométrique faisons tendre l'un vers l'autre deux points singuliers, les exposants caractéristiques croissant indéfiniment (en module) suivant une loi déterminée. On peut choisir cette loi de façon à obtenir une équation limite bien définie et irrégulière. Les solutions de ces équations limites sont appelées par les Auteurs des fonctions hypergéométriques *confluentes*; leur étude constitue les Chapitres XVI et XVII. Citons parmi ces équations la fonction des Erreurs, la fonction Gamma incomplète, le logarithme intégral et les fonctions du cylindre parabolique ; elles admettent des formules de récurrence et des représentations asymptotiques. Un autre cas particulier très important est celui des fonctions de Bessel, que MM. Whittaker et Watson étudient minutieusement ; ils commencent par les fonctions J_n (n entier ou non), arrivent aux fonctions Y_n de Hankel et terminent par les fonctions $I_n(z) = i^{-n} J_n(iz)$ de Basset.

Dans le Chapitre XVIII, les Auteurs abordent l'équation de Laplace et résolvent, à son sujet, des problèmes d'une importance

capitale en Physique mathématique : développement des intégrales au moyen des fonctions de Legendre et des fonctions de Bessel ; détermination des intégrales moyennant des conditions aux limites données sur la surface d'une sphère. Puis ils arrivent à l'équation de la propagation des ondes et en construisent d'importantes solutions au moyen des fonctions de Bessel.

Arrêtons-nous un peu plus sur les fonctions de Mathieu qui constituent l'objet du Chapitre XIX. On appelle *équation de Mathieu* l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -(a + 16q\cos 2z)u;$$

elle forme un cas particulier de l'équation obtenue par Hill dans l'étude du mouvement du périgée lunaire. Posons-nous la question suivante : peut-on choisir pour a une fonction de q telle que l'équation possède des solutions périodiques? Ces solutions, si elles existent, s'exprimeront linéairement au moyen de solutions périodiques paires et impaires que l'on appelle *fonctions de Mathieu*. Or M. Whittaker a montré récemment que les fonctions paires de Mathieu vérifient une équation intégrale homogène. Partant de là, on peut représenter formellement les fonctions de Mathieu sous forme de séries trigonométriques dont les coefficients sont fonctions de q ; toutefois, la convergence des séries reste incertaine par cette méthode. Avant d'approfondir cette question, M. Whittaker esquisse brièvement la théorie de M. Floquet, puis celle de Hill et de son déterminant infini ; il revient ensuite à l'équation de Mathieu qu'il étudie au moyen de la transformation $\cos^2 z = \zeta$ et des résultats de Lindemann et Stieltjes ; et, alors, la convergence des séries peut être mise hors de doute. Il serait à souhaiter que ce Chapitre, très intéressant, suscite de nouvelles recherches sur ce sujet difficile.

Les trois derniers Chapitres sont consacrés aux fonctions elliptiques. Le Chapitre XX renferme, sous forme condensée, l'exposé de toutes les propriétés fondamentales des fonctions de Weierstrass ; le Chapitre suivant, réservé aux fonctions θ, renferme une étude directe très remarquable du problème de l'inversion. Enfin, le dernier Chapitre se rapporte aux transcendantes de Jacobi et aux intégrales de Legendre.

L'Ouvrage se termine par un Appendice où se trouvent résumés

les points fondamentaux de la théorie classique des transcendantes élémentaires. Les Auteurs rejettent systématiquement toute démonstration d'origine géométrique : la périodicité des fonctions circulaires est déduite des développements tayloriens, et la notion d'argument est présentée sous forme exclusivement arithmétique.

Cette rapide analyse permettra, sans doute, d'apprécier toute l'ampleur du sujet abordé par MM. Whittaker et Watson. *A priori*, la simple énumération des titres de Chapitres pouvait soulever quelque appréhension : il semble impossible de condenser en quelques centaines de pages des théories aussi différentes et aussi vastes, d'en faire saisir la signification réelle et le sens profond. Mais il suffira de parcourir l'Ouvrage de MM. Whittaker et Watson pour dissiper cette objection. Tout d'abord, une bibliographie, sinon très complète, du moins fort judicieusement choisie, permettra au lecteur d'étendre ses connaissances sans perte de temps. Mais il y a plus; nous n'avons pas encore parlé d'une des caractéristiques les plus frappantes de l'Ouvrage : l'abondance vraiment extraordinaire des exercices ; l'ensemble de tous ceux qui terminent les Chapitres dépasse 500 et nous ne tenons pas compte de tous ceux, plus nombreux sans doute, qui sont intercalés dans le texte; et la plupart de ces exercices sont extraits des Mémoires originaux. Une telle richesse de documentation ne fait pas seulement honneur à l'étonnante érudition des Auteurs : elle constitue pour le lecteur studieux le gage assuré d'une excellente préparation aux problèmes les plus divers de la Physique mathématique.

RENÉ GARNIER.

ENRIQUES (FEDERIGO). — LEZIONI SULLA TEORIA GEOMETRICA DELLE EQUAZIONI E DELLE FUNZIONI ALGEBRICHE, pubblicate per cura del Dott. CHISINI. Volume I. 1 vol. in-8° de XIV + 397 pages Bologna, Nicolà Zanichelli, 1915.

L'Ouvrage dont M. Enriques publie le premier Volume est consacré à un genre d'étude particulièrement en faveur actuellement en Italie : l'*étude qualitative* des équations et des fonctions algébriques. Il comble une vraie lacune, car les Ouvrages de Salmon et de Clébsch, qui furent écrits dans le même ordre d'idées, sont aujourd'hui bien vieillis.

Le programme que s'est tracé M. Enriques comprend l'étude complète des fonctions algébriques de deux variables. On trouvera donc dans cet Ouvrage l'étude projective des courbes algébriques; celle des propriétés de ces courbes invariantes par rapport aux transformations birationnelles; la théorie des surfaces de Riemann; la théorie, si délicate, des points singuliers des courbes algébriques planes; enfin, les questions de continuité et de réalité de ces dernières courbes seront également abordées.

Le premier Volume a été divisé en deux Livres dont le premier sert d'introduction à l'Ouvrage.

Dans le Livre I, l'Auteur commence par exposer la théorie des fonctions $f(x) = 0$, algébriques, interprétées comme définissant des groupes de points sur une droite. C'est dans ce sens qu'est traitée la théorie des formes algébriques d'une variable, exposée d'une façon très complète. Une place spéciale est faite dans ce Chapitre aux quaternes de points d'une droite. M. Enriques déduit, de cette dernière théorie, la résolution des équations du troisième et du quatrième degré par radicaux.

Vient ensuite l'étude de l'équation algébrique $f(x, y) = 0$ à deux variables. Cette équation peut être interprétée de deux façons : soit comme courbe plane, soit comme correspondance entre deux formes de première espèce. L'Auteur examine successivement ces deux interprétations et donne les premiers éléments de la théorie des courbes planes (tangentes, points multiples, etc.), ainsi que des notions sur les courbes représentant des correspondances, le concept de points infiniment voisins en géométrie et l'hyperespace. Ces dernières questions sont traitées d'une manière particulièrement intéressante pour le commençant.

Le troisième Chapitre, qui termine le Livre I, est d'un grand intérêt : M. Enriques, partant des deux interprétations de l'équation $f(x, y) = 0$ qu'il a exposées au Chapitre précédent, remarque qu'une telle équation, qui peut être envisagée comme générale dans une interprétation, ne l'est pas dans l'autre; c'est pour lui l'occasion d'examiner la signification de l'expression *en général* et le principe du *compte des constantes*. Après quelques notions sur la théorie des ensembles, l'Auteur nous donne les définitions relatives aux variétés algébriques et démontre le principe du *compte des constantes* ou *principe de Plücker-Clebsch* qu'il énonce ainsi :

Si un système de n équations à n inconnues, dépendant de certains paramètres $a_1, a_2, \ldots$, *variables, est incompatible pour des valeurs génériques de ces paramètres; chaque fois qu'il devient compatible pour des valeurs particulières de* $a_1, a_2, \ldots$, *il devient indéterminé. On peut donc affirmer la compatibilité du système pour des valeurs génériques des paramètres, s'il est compatible et déterminé pour des valeurs particulières de ceux-ci.*

Géométriquement, ce principe s'énonce :

Si, entre deux variétés algébriques irréductibles V_n, V_m, *à n, m dimensions, existe une correspondance par laquelle à un point générique de* V_n *correspondent* ∞^r *points de* $V_m (r \geqq 0)$, *et si, réciproquement, les points de* V_n *qui correspondent à des points génériques de* V_m *correspondent à* ∞^s *points de cette variété* $(0 \leqq s \leqq n + r - m)$, *les points génériques de* V_m *correspondent effectivement à* ∞^{n+r-m} *points (non exceptionnels) de* V_n.

Des exemples font comprendre la portée exacte de ce principe et montrent comment on doit l'appliquer.

Le Livre II débute par un Chapitre consacré aux involutions. M. Enriques commence par exposer le *principe de correspondance de Chasles* et le théorème de M. Zeuthen sur la multiplicité des points de coïncidence. Ensuite, il définit les involutions de groupes de points sur une droite et démontre le théorème classique de Lüroth. Viennent alors la recherche des points doubles d'une involution et le théorème de M. Bertini sur les points multiples des courbes planes d'un système linéaire. La question de déterminer les involutions dont les points doubles sont donnés est traitée à fond, ainsi que les diverses questions relatives aux involutions cycliques. Enfin, l'Auteur donne la méthode de M. Klein pour déterminer les groupes finis de projectivité sur la droite en partant de la formule donnant le nombre de points doubles d'une involution.

Dans le deuxième Chapitre, M. Enriques expose d'une manière très complète les propriétés du groupe de points d'intersection de deux courbes planes et passe alors à la génération des courbes planes par deux faisceaux homographiques (méthode de Steiner).

Viennent ensuite la définition de la classe d'une courbe plane, les formules de Plücker et l'application de celles-ci aux cubiques planes. Les formules de Plücker donnent l'occasion à l'Auteur d'introduire le genre d'une courbe et de démontrer son invariance par rapport aux transformations quadratiques.

Après avoir exposé les travaux de Chasles, de Joncquières et Halphen sur les séries simplement infinies de courbes planes, M. Enriques fait une étude détaillée de la quartique plane dont il recherche les bitangentes et les systèmes de coniques quadritangentes.

Le troisième et dernier Chapitre contient l'exposé de la représentation des imaginaires et de la théorie des surfaces de Riemann.

Ce premier Volume, écrit avec beaucoup de clarté, contient en outre quelques aperçus sur l'histoire et la genèse des théories qui y sont exposées ; il nous fait désirer la prompte publication des deux autres Volumes qui doivent compléter l'Ouvrage. Comme M. Enriques le dit au début, il a voulu mettre à la disposition des jeunes mathématiciens l'exposé des leçons qu'il donne depuis plusieurs années à l'Université de Bologne. C'est là, croyons-nous, œuvre utile et qui évitera aux débutants bien des recherches dans le dédale des Mémoires publiés sur les questions traitées par M. Enriques, dédale où il est si facile de s'égarer.

LUCIEN GODEAUX.

THE PRINCETON COLLOQUIUM. LECTURES ON MATHEMATICS. 1 vol. gr. in-8 de II-107 + II-117 pages. New-York, published by the American Mathematical Society, 501 West 116th Street, 1913.

Ce Volume contient deux séries de Conférences données à Princeton en septembre 1909 sous les auspices de l'*American Mathematical Society*, par 1° M. BLISS (Gilbert Ames); 2° M. KASNER (Edward).

I.

BLISS (GILBERT AMES). — FUNDAMENTAL EXISTENCE THEOREMS (II-107 pages).

Les Conférences de M. Bliss sont consacrées à l'étude des théorèmes d'existence concernant les fonctions implicites et les fonctions définies par des équations différentielles : les fonctions envisagées sont des fonctions de variables réelles. Le but principal

poursuivi par l'Auteur est de libérer les énoncés, dans la mesure du possible, des restrictions qui s'expriment par les mots « dans le voisinage de » qu'on trouve dans les énoncés classiques.

Indiquons d'abord quelques notations relatives aux fonctions implicites. Les équations de définition de ces fonctions s'écriront en abrégé sous la forme

$$f_i(x;y)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n), \tag{1}$$

où x désigne l'ensemble des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et y l'ensemble des fonctions inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_n$. La notation $(x;y)$, ou p, désignera le point $(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de l'espace à $m+n$ dimensions constitué par l'ensemble des variables x et des variables y; la notation x désignera de même le point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de l'espace des variables x.

Après avoir donné les énoncés et les démonstrations classiques de M. Dini, puis de M. Goursat (approximations successives), l'Auteur étend ces énoncés, ainsi que l'a fait M. Bolza en vue du calcul des variations, de façon à définir une solution, non plus dans le voisinage d'un point a, mais dans le voisinage A_δ d'un certain ensemble de points a, le voisinage A_δ d'un ensemble étant défini ainsi qu'il suit : c'est l'ensemble des points x tels que l'on ait

$$(x_i - a_i) < \delta,$$

où a_i est un point quelconque de l'ensemble, *et où δ demeure le même pour tous les points a de l'ensemble.*

Mais le principal élément nouveau introduit par M. Bliss est ce qu'il appelle un feuillet (*sheet*) de solutions : c'est un ensemble S de points p de l'espace $(x;y)$ vérifiant les équations (1) et tel que, pour chacun des points de cet ensemble, il existe un domaine p_ε entourant le point et tel que deux points de S situés dans p_ε n'aient jamais la même projection dans l'espace x. De toute solution initiale $(a;b)$ des équations (1) part un feuillet unique de solutions dont les points frontières ne peuvent être que des points exceptionnels des fonctions f, c'est-à-dire des points où l'une des conditions bien connues imposées aux fonctions f par l'énoncé du théorème fondamental tombe en défaut.

A l'aide de cette notion de feuillet, l'Auteur étudie l'inversion

des transformations de la forme

$$x_i = \psi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il établit diverses propositions qui, sous certaines hypothèses relatives aux fonctions ψ, fournissent des catégories de domaines (x) et (y) se correspondant, par les formules précédentes, d'une façon univoque et réciproque.

M. Bliss arrive ensuite à l'étude des points singuliers des fonctions implicites. Ce sont les points où le déterminant fonctionnel des fonctions $f_i(x; y)$ par rapport aux y est nul. L'étude de ces points a donné lieu, depuis quelques années, à des recherches de M. Bliss lui-même et de divers autres auteurs publiées dans les *Transactions* ou dans le *Bulletin* de l'American Mathematical Society. L'Auteur s'occupe surtout ici des transformations à deux variables

$$x_1 = \psi_1(y_1, y_2), \qquad x_2 = \psi_2(y_1, y_2),$$

qu'il se propose d'étudier dans le domaine d'un point où le déterminant fonctionnel $D = \frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(y_1, y_2)}$ est nul, point qu'on peut supposer être l'origine des coordonnées. Sans traiter le sujet dans toute sa généralité, ce qui présenterait probablement d'assez grandes difficultés, il donne quelques propositions intéressantes pour le cas, relativement simple, où les courbes $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$ n'ont pas d'autre point commun dans le voisinage du point O que le point O lui-même et où D ne s'annule pas identiquement. Les diverses branches de la courbe $D = 0$ qui passent à l'origine déterminent, avec un cercle de centre O et de rayon suffisamment petit, un certain nombre de régions triangulaires; chacune de ces régions S est transformée d'une façon univoque et réciproque en un feuillet Σ du plan (x_1, x_2) et ces feuillets constituent, au point de vue réel, une sorte de surface de Riemann admettant l'origine comme point de ramification : si les signes de D dans deux régions S_1, S_2 adjacentes sont opposés, les images Σ_1, Σ_2 de ces régions se recouvrent le long de leur frontière commune tandis que, si les signes sont les mêmes, les images Σ_1, Σ_2 sont situées de part et d'autre de leur frontière commune.

La fin de l'étude de M. Bliss est consacrée au théorème d'exis-

tence des intégrales de l'équation différentielle

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

La méthode employée est la méthode classique de Cauchy qui consiste à définir la courbe intégrale qui passe par un point ξ, η comme limite d'une certaine ligne polygonale (polygone de Cauchy). M. Bliss, en reprenant l'étude de cette question, s'est proposé de définir la solution dans le domaine le plus étendu possible pour lequel les conditions imposées à la fonction $f(x, y)$ sont vérifiées. On sait que M. Picard et M. Painlevé ont établi que, si une solution continue de l'équation (2) existe dans un intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta$, les polygones d'approximation de Cauchy relatifs à cette solution sont définis et convergent uniformément vers la solution dans tout cet intervalle. M. Bliss va un peu plus loin : il considère un domaine R dans lequel $f(x, y)$ est continue et vérifie la condition de Lipschitz et il démontre, *a priori*, que les polygones de Cauchy issus d'un point (ξ, η) intérieur à R permettent de définir une courbe intégrale de l'équation différentielle qui, ou bien s'étend à l'infini, ou bien est définie jusqu'à la frontière de R.

La solution $\varphi(x, \xi, \eta)$ ainsi trouvée est continue par rapport à x; M. Bendixon a démontré qu'elle est aussi continue par rapport à ξ et à η et que, si f a dans R des dérivées partielles continues, la fonction $\varphi(x, \xi, \eta)$ a des dérivées partielles continues par rapport aux trois arguments x, ξ, η. M. Bliss reprend ici, à son point de vue, la démonstration de ce théorème de M. Bendixon. Il applique ensuite ces divers résultats à l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

sans faire l'hypothèse que F est analytique; il reprend pour cela la méthode classique des caractéristiques en ne faisant que des hypothèses relatives à la continuité de F et de ses dérivées premières et secondes. Ces caractéristiques étant définies par un système différentiel, on peut appliquer à ce système les résultats établis précédemment pour l'équation (2) et qui s'étendent sans difficulté aux systèmes différentiels.

II.

KASNER (Edward). — Differential-geometric aspects of Dynamics (II-117 pages).

Les trajectoires d'un point dans un champ de forces donné constituent une famille de courbes qu'on peut envisager à un point de vue purement géométrique. Ce sont les propriétés caractéristiques des familles de courbes de cette espèce que l'Auteur s'est proposé d'étudier.

Considérons d'abord le mouvement d'un point matériel dans un champ de forces du plan. Les trajectoires sont des courbes définies par un système différentiel de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(x, y), \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \psi(x, y).$$

Il suffit d'éliminer t entre les deux équations précédentes pour obtenir l'équation différentielle du système de toutes les trajectoires possibles, envisagées au point de vue purement géométrique et sans se préoccuper de la façon dont elles sont décrites. L'équation différentielle ainsi obtenue est l'équation du troisième ordre

$$(1) \qquad (\psi - y'\varphi)y''' = \left[\frac{\partial\psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)y' - \frac{\partial\varphi}{\partial y}y'^2\right]y'' - 3\varphi y''^2,$$

où y', y'', y''' désignent les dérivées de y *par rapport à* x. C'est là une équation *particulière* du troisième ordre et M. Kasner s'est proposé d'exprimer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation quelconque du troisième ordre

$$(2) \qquad y''' = f(x, y, y', y'')$$

soit de la forme (1), c'est-à-dire pour que les courbes intégrales de cette équation puissent constituer l'ensemble des trajectoires d'un point matériel dans un certain champ de forces. La recherche de ces conditions sous forme analytique ne présente aucune difficulté : on voit immédiatement que l'équation (2) doit être de la forme

$$(y' - \omega)y''' = (\lambda y'^2 + \mu y' + \nu)y'' + 3y''^2,$$

où ω, λ, μ, ν sont quatre fonctions de x et y, et l'on trouve aisé-

ment les deux équations aux dérivées partielles que doivent vérifier ces quatre fonctions pour que l'équation puisse se mettre sous la forme (1). Mais M. Kasner ne s'en tient pas là et il préfère exprimer ces mêmes conditions sous une forme géométrique. Sa méthode consiste en définitive à faire correspondre à l'élément du troisième ordre (x, y, y', y'', y'''), au sens de Lie, des éléments géométriques intrinsèques attachés à cet élément, par exemple le rayon de courbure, la dérivée du rayon de courbure par rapport à l'arc, la parabole qui admet cet élément, c'est-à-dire la parabole osculatrice à l'une quelconque des courbes intégrales au point (x, y) : les conditions analytiques qui caractérisent les équations du troisième ordre de la forme (1) se traduisent alors par des propriétés géométriques relatives aux éléments intrinsèques ainsi introduits. M. Kasner arrive à un système de cinq propriétés géométriques nécessaires et suffisantes dont l'ensemble est caractéristique des courbes intégrales de l'équation (1), quelles que soient les fonctions φ et ψ qui figurent dans cette équation. Parmi ces cinq propriétés, les deux suivantes sont relativement simples :

1° *Les directrices des paraboles osculatrices aux courbes intégrales et tangentes à un élément linéaire donné* (x, y, y') *passent par un même point* D;

2° *Quand l'élément linéaire tourne autour du point* (x, y), *le point* D *décrit une droite passant par ce point.*

Nous n'énoncerons pas les trois autres propriétés géométriques données par M. Kasner : elles sont d'ailleurs plus compliquées et il ne paraît pas y avoir un avantage essentiel à exprimer, sous une forme géométrique compliquée, des propriétés qui s'expriment d'une façon assez simple à l'aide de symboles algébriques.

M. Kasner traite le même problème pour les champs de forces de l'espace. Il donne ici quelques propriétés intéressantes du système des sphères osculatrices en un point M à toutes les trajectoires qui passent par M : *celles de ces trajectoires qui sont tangentes en* M *à une même direction* MT *admettent des sphères osculatrices dont les centres ont pour lieu une ligne droite* D *et, si l'on fait varier la direction* MT, *les droites* D *correspondant aux diverses directions* MT *forment une congruence de*

droites constituée par les sécantes d'une certaine cubique gauche. Ces conditions, jointes à quelques autres, analogues à celles qu'on obtenait dans le plan, donnent un système de conditions caractéristiques des familles de trajectoires de l'espace.

Lorsqu'une famille de courbes remplissant les conditions ainsi trouvées est donnée, on peut connaître à un facteur constant près le champ de forces qui lui a donné naissance, de sorte que, théoriquement, une photographie de l'ensemble des trajectoires permettrait d'obtenir le champ de forces, sans qu'il soit nécessaire de connaître la loi du mouvement d'un point matériel sur les trajectoires, sous l'action du champ inconnu ; un exemple de détermination d'un champ de forces par l'ensemble des trajectoires est celui où les trajectoires sont des coniques ayant un foyer donné : c'est le problème classique de Bertrand qui conduit, comme on sait, à la loi de Newton.

La méthode de M. Kasner donne des résultats particulièrement simples lorsque le champ de forces considéré dérive d'une fonction de forces et que l'on envisage l'ensemble des trajectoires correspondant à une même valeur de la constante des forces vives : cet ensemble constitue ce que l'Auteur appelle, avec M. Painlevé, une famille *naturelle* de trajectoires. Une pareille famille dépend, dans l'espace, de quatre paramètres et l'on peut se proposer de caractériser, par des propriétés géométriques, les familles de courbes à quatre paramètres susceptibles de constituer une famille naturelle. Ces familles de courbes peuvent aussi être définies comme les *extrémales* d'un problème de calcul des variations relatif à une intégrale quelconque de la forme

$$\int F(x, y, z)\, ds.$$

Les brachistochrones, ainsi que les figures d'équilibre d'un fil, dans un champ conservatif quelconque, appartiennent à cette catégorie de courbes; on peut aussi en donner une interprétation optique : ce sont les rayons de lumière dans un milieu optique où l'indice varie d'une façon continue d'un point à un autre du milieu considéré. Le résultat fort simple établi par M. Kasner au sujet de ces familles naturelles de courbes est le suivant :

Soit une famille de courbes à quatre paramètres telle qu'il

passe une et une seule de ces courbes par tout point de l'espace, tangentiellement à une droite donnée passant par ce point. Pour qu'une pareille famille constitue une famille naturelle, il faut et il suffit :

1° *Que les cercles osculateurs en un point* M *quelconque à celles de ces courbes qui passent par* M *aient un second point commun* M′;

2° *Que les trois cercles surosculateurs contenus dans cette famille de courbes soient orthogonaux deux à deux.*

A l'étude des familles naturelles de courbes se rattache *le théorème de Tait et Thomson :* ce théorème bien connu [1] fournit une propriété qui, jointe à la première des propriétés énoncées plus haut, donne une nouvelle forme des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une famille de courbes soit une famille naturelle.

La fin du travail de M. Kasner contient d'abord un Chapitre sur les transformations géométriques en Dynamique; les principales transformations envisagées sont la transformation projective, introduite en Dynamique par M. Appell, et la transformation conforme.

M. Kasner s'occupe ensuite de caractériser, dans un champ de forces plan quelconque (ne dérivant plus d'une fonction de forces), les brachistochrones, les figures d'équilibre d'un fil et diverses autres familles de courbes, de même qu'il avait caractérisé tout d'abord les trajectoires d'un point. Toutes les familles de courbes qu'il considère peuvent recevoir une définition commune, pour un champ de forces donné : ce sont les courbes telles que dans le mouvement d'un point matériel assujetti à se mouvoir sur l'une d'elles, sans frottement, on ait constamment

$$P = kN, \tag{3}$$

P étant la pression du point sur la courbe, N la composante normale de la force et k une constante; par exemple, pour $k = 0$,

---

[1] *Voir*, par exemple, APPELL, *Mécanique*, Chap. VI, ou DARBOUX, *Théorie des surfaces*, Livre V, Chap. VI.

on a le système des trajectoires d'un point libre dans le champ; pour $k=2$, on a les brachistochrones (théorème d'Euler); pour $k=1$, on a les figures d'équilibre d'un fil dans le champ considéré. L'Auteur caractérise complètement la famille S_k des courbes définies par la relation (3) et en particulier les familles S_{-2} et S_1.

Enfin, dans un dernier Chapitre, l'Auteur généralise dans diverses voies les résultats précédents. Il envisage d'abord un milieu résistant, puis un point mobile sur une surface donnée dans un champ de forces; il étudie aussi le cas d'un système de points mobiles dans un plan sous l'action de forces ne dépendant que de la position de ce système de points; enfin, il considère le cas où les forces agissant sur un point dépendent de la position du point *et du temps*. Dans ces divers cas, il étudie encore les caractères géométriques des systèmes de trajectoires.

Comme on le voit, tous les problèmes généraux de la Dynamique peuvent donner lieu à des développements géométriques dans la voie suivie par M. Kasner. L'Auteur avait développé son point de vue depuis quelques années dans une série de Mémoires dont les Conférences de Princeton nous donnent une vue d'ensemble. Les résultats nouveaux qu'il a apportés sont surtout ceux relatifs aux propriétés différentielles qui caractérisent complètement les familles de trajectoires. Quant à l'idée de faire une étude purement géométrique des trajectoires de la Dynamique, on la trouve dans des travaux plus anciens dont quelques-uns sont aujourd'hui classiques. Il suffira de citer dans cet ordre d'idées les importants résultats donnés par Tait et Thomson et auxquels M. Kasner consacre, nous l'avons dit, quelques pages de son travail, ainsi que les trois beaux Chapitres de Dynamique introduits par M. Darboux dans le second Volume de ses *Leçons sur la théorie des surfaces*.

S. Lattès.

MÉLANGES.

LES ÉTUDES EXPÉRIMENTALES SUR LA RÉSISTANCE DE L'AIR. LES TRAVAUX FRANÇAIS;

Par M. L. MARCHIS,
Professeur d'Aviation à la Sorbonne.

(*Suite et fin.*)

Représentons les moments stabilisateurs en portant en abscisses les angles d'incidence et en ordonnées les longueurs proportionnelles à ces moments.

L'appareil est *longitudinalement stable* quand, pour des angles croissants, la courbe des moments va continuellement en *descendant de gauche à droite*, en coupant l'axe des incidences au point d'équilibre. Il est *instable* quand, pour des angles croissants, la courbe des moments *monte de gauche à droite*.

Quand on étudie de telles courbes pour un type Canard, on voit que, *au point de vue de la stabilité*, on n'a pas intérêt à réaliser un trop grand décalage angulaire des voilures.

La *maniabilité de l'appareil* exige aussi que le décalage angulaire ne soit pas trop grand et que la distance des voilures ne soit pas non plus trop considérable. Il convient que les moments stabilisateurs ne soit pas supérieurs à 50 kilogrammètres.

A ce point de vue de maniabilité et au point de vue de la mise en vol plané, il n'y a pas non plus intérêt à trop descendre le centre de gravité de l'appareil au-dessous de l'axe de l'hélice.

M. Eiffel a étudié un *décalage en hauteur* à peu près égal au $\frac{1}{7}$ de la profondeur des voilures. L'effet *d'un tel décalage* est assez peu sensible pour pouvoir être considéré comme *négligeable*.

2° *Type monoplan ordinaire.* — L'influence des voilures l'une sur l'autre se traduit par une diminution de la sustentation et par une augmentation de la résistance à l'avancement par rapport à la

sustentation et à la résistance à l'avancement de voilures sans action l'une sur l'autre.

La diminution relative de la sustentation est indépendante de l'écartement des voilures.

Les résultantes se groupent sur l'aile avant. C'est dans cette région que doit passer la verticale du centre de gravité d'un appareil muni d'ailes semblables.

Le faisceau des résultantes s'étale beaucoup quand la distance des voilures est doublée.

3° *Tandem à voilures égales.* — Ce type est, au point de vue de la sustentation et de la résistance à l'avancement, nettement inférieur au type monoplan ordinaire.

Dans ce dernier type on n'a donc pas intérêt à accroître au delà d'une certaine limite l'envergure de l'empennage.

Le dispositif biplan est aussi préférable au type tandem à voilures égales.

On peut dire que ce dispositif n'est pas à recommander dans la construction des appareils d'aviation.

4° Dans un tandem l'aile qui, dans le sens de la marche, se trouve en arrière est influencée par l'aile avant. M. Eiffel a étudié les conditions du fonctionnement d'une telle aile.

a. Si l'on désigne par i_a l'angle d'incidence de la voilure influencée sur la trajectoire de l'ensemble des voilures, la *poussée sur cette voilure* est égale à la poussée qui s'exercerait sur la *voilure isolée*, dont l'incidence serait égale à

$$i_r = i_a - \beta.$$

L'angle β dépend de tous les facteurs qui fixent les positions relatives des voilures, c'est-à-dire de la distance de ces voilures, de leur décalage en hauteur, de leur décalage angulaire ; des envergures relatives des deux voilures.

b. Quelles que soient les caractéristiques de l'ensemble des voilures, la traînée de l'aile influencée est pratiquement égale à ce que serait la traînée de l'aile isolée.

Au point de vue de la traînée, il n'y a pas lieu de distinguer entre l'angle d'incidence réel i_r et l'angle d'incidence apparent i_a.

c. Quelles que soient les caractéristiques de l'ensemble des voilures, l'aile avant d'un tandem se comporte comme une aile isolée.

d. *Cas des empennages.* — Quand on connaît la loi de variation des angles réels d'incidence i_r par rapport aux angles apparents i_a, et qu'on a déterminé pour l'empennage isolé les valeurs de la sustentation en fonction des angles d'incidence, il est possible de déterminer la poussée qui s'exerce sur un empennage placé à l'arrière d'un monoplan ordinaire.

Prenons un exemple. Considérons un monoplan ordinaire dont la voilure principale a pour dimensions $10^m \times 2^m$ et dont l'empennage est formé par un plan de $3^m \times 1^m$ placé à 5^m en arrière de la voilure principale, avec décalage en hauteur nul. Supposons que le décalage angulaire de l'empennage (décalage en V) par rapport à la voilure principale soit égal à 6°.

Si l'angle normal de vol horizontal est égal à 6° (angle de la corde du profil de la voilure principale avec la trajectoire horizontale), l'angle apparent de l'empennage faisant un V avec la voilure principale est égal à zéro.

Admettons que la loi de variation des angles réels d'incidence en fonction des angles apparents donne (— 5°,4) pour angle réel d'incidence de l'empennage plan. L'étude du plan donne alors pour valeur de la poussée sur l'empennage, la vitesse étant de 30^m par seconde,

$$\text{Coefficient de sustentation} \times \text{surface} \times (\text{vitesse})^2$$
$$= -0{,}02 \times 3 \times 900 = -54^{kg}.$$

Or, si l'empennage était isolé et faisait avec la trajectoire un angle nul, cette poussée serait nulle. Une telle poussée négative de 54^{kg} a une grande importance au point de vue de l'équilibrage de l'appareil.

VIII. — Les appareils d'aviation.

M. Eiffel a fait, au ventilateur, un grand nombre d'essais sur des modèles d'un certain nombre d'appareils. De ces essais on peut déduire quelques règles utiles pour l'établissement d'un avant-projet d'aéroplane.

Les expériences intéressantes faites à l'Institut aérotechnique de

Saint-Cyr sur un aéroplane entier (au chariot) ou sur un aéroplane en plein vol ne sont pas encore assez nombreuses pour donner lieu à des règles de construction des aéroplanes. Cependant ces résultats méritent d'être énoncés :

1° M. Eiffel a montré tout le parti qu'on pouvait tirer de l'étude du diagramme logarithmique pour les conditions du fonctionnement d'un aéroplane en marche horizontale.

C'est ainsi qu'il a étudié *le régime de vitesse maxima pour une puissance donnée et le régime économique.*

La vitesse maxima en vol horizontal dépend plus particulièrement de la puissance du moteur installé à bord de l'avion (voir *fig.* 2, point i_1).

Le *régime économique* ou *régime de puissance minima pour un poids donné* (voir *fig.* 2, point i_3) présente un grand intérêt. En effet lorsqu'un avion monte avec la vitesse verticale d'ascension maxima, son pilote le place dans des conditions telles que la puissance utile développée soit minima, l'excédent de puissance étant utilisé pour la montée de l'aéroplane à la plus grande hauteur possible.

Les *vitesses limites de planement* d'un aéroplane sont très importantes à connaître au point de vue de la sécurité de la descente en vol plané. On les définit :

a. La vitesse maxima du mouvement horizontal normal;

b. La vitesse correspondant au minimum de la pente. Ce minimum est défini par le minimum de $\frac{R_X}{R_Y}$. L'angle qui correspond à ce minimum est l'*angle optimum de planement* du colonel Ch. Renard.

2° *Monoplans ordinaires.* — Les coefficients suivants résultent des expériences de M. Eiffel.

a. Les *charges* par mètre carré de surface portante des ailes (définie comme la plus grande projection des ailes sur un plan horizontal) varient entre 25^{kg} et 35^{kg} par mètre carré.

b. Les *vitesses maxima* du mouvement horizontal, à une hau-

teur de 500^{m} environ, sont comprises entre 27^{m} et 35^{m} par seconde; soit $97^{km},2$ et 126^{km} à l'heure.

Les *vitesses* (*régime économique*), à une hauteur de 500^{m} environ, varient entre $19^{m},44$ et 25^{m} par seconde; soit 70^{km} et 90^{km} à l'heure.

c. Appelons *portance* de l'appareil le rapport

$$\frac{Q}{S} \times \frac{1}{V^2},$$

Q, poids total de l'appareil; S, surface portante; V, vitesse du mouvement relatif.

La surface portante ne comprend pas seulement la surface portante des ailes (plus grande projection de l'aile sur un plan horizontal), mais encore les projections sur un plan horizontal de l'empennage et du gouvernail de profondeur. Suivant la position de l'avion, suivant l'inclinaison de ces organes, les projections en question s'ajoutent à la surface portante des ailes ou s'en retranchent. Les coefficients actuels sont calculés en considérant seulement la surface des ailes définie comme nous venons de le faire.

Les portances (vitesses maxima du mouvement horizontal) varient entre 0,025 et 0,040.

Les portances (vitesses économiques) varient entre 0,040 et 0,070.

Les portances utilisées varient donc entre 0,025 et 0,070.

d. La *puissance utile maxima* (vitesse horizontale maxima) par 100^{kg} de poids transporté varie entre 8 et 11 chev : kg.

La *puissance utile minima* (régime économique) par 100^{kg} de poids transporté varie entre 5 et 6 chev : kg.

La *puissance utile dépensée pour élever* 100^{kg} avec la vitesse maximum d'ascension varie entre 1,5 et 6 chev : kg.

e. Les *vitesses maxima d'ascension* oscillent entre 2,30 m : sec. (690^{m} en 5 minutes) et 4,25 m : sec. (1275^{m} en 5 minutes).

f. Admettons pour le régime économique 6 chev : kg. Considérons, d'autre part, une dépense de 2 chev : kg pour la montée : elle permet de monter 100^{kg} à 450^{m} en 5 minutes.

Dans un avant-projet on peut donc admettre une puissance utile de 8 chevaux par 100^{kg} de poids transporté.

Si l'hélice a un rendement moyen égal à 0,70, la puissance développée sur l'arbre par le moteur est $\frac{8}{0,7} = 11,5$ chevaux par 100^{kg} de poids transporté.

Dans un avant-projet de monoplan, il faut compter sur 10 à 12 chevaux par 100^{kg} de poids total transporté, soit 120 chevaux pour un appareil dont le poids total en ordre de marche est égal à 1000^{kg} (*consommation par cheval-heure*, $0^{kg},32$ à $0^{kg},52$ d'essence et d'huile; poids par cheval du système moto-propulseur 2^{kg} à $3^{kg},2$).

Le poids total d'un appareil en ordre de marche varie donc entre $8^{kg},33$ et 10^{kg} par cheval.

g. Les valeurs minima de $\frac{R_x}{R_y}$ sont comprises entre 0,16 et 0,20.

Les angles optima de *planement* sont compris entre 9° et $11^o,3$ (angle moyen $= 10^o$).

Les rapports des vitesses limites de planement sont compris entre 1,27 et 1,48.

3° *Biplans*. — *a*. Les *charges* par mètre carré de surface portante des ailes oscillent eutre 15 et 30 kg : m².

b. Les *vitesses* maxima en mouvement horizontal, à une hauteur de 500^m environ, sont comprises entre $19^m,44$ et $27^m,8$ par seconde, 70^{km} et 100^{km} à l'heure.

Les *vitesses* économiques (hauteur de 500^m environ) varient entre $13^m,9$ et $22^m,2$ par seconde, 50^{km} et 80^{km} à l'heure.

c. Les portances (vitesses maxima) sont comprises entre 0,035 et 0,045.

Les portances (vitesses économiques) sont comprises entre 0,060 et 0,065.

Les portances utilisées sont comprises entre 0,035 et 0,065, c'est-à-dire dans des limites plus étroites que pour les monoplans.

d. La *puissance utile* maxima par 100^{kg} de poids transporté varie entre 5 et 7 chev : kg.

La puissance utile minima par 100^{kg} de poids transporté varie entre 4 et 5 chev : kg.

La puissance utile dépensée pour élever 100^{kg} avec la vitesse maxima de montée varie de 0,5 à 2,5 chev : kg.

e. Les *vitesses maxima d'ascension* oscillent entre $0^m,5$ par seconde (150^m en 5 minutes) et $1^m,6$ par seconde (480^m en 5 minutes).

f. Admettons 5 chev : kg pour puissance minima utile et 2 chev : kg pour puissance utile nécessaire à l'ascension, on voit que, pour 100^{kg} de poids transporté, il faut une puissance utile de 7 chevaux ou une puissance absorbée sur l'arbre de 10 chevaux, en comptant 0,70 pour rendement moyen de l'hélice. Cela fait 100 chevaux pour un appareil de 1000^{kg} ou 10^{kg} par cheval en ordre de marche.

On a donc besoin sur un biplan d'un moteur moins puissant que sur un monoplan, à égalité de poids total transporté.

g. Les valeurs minima de $\frac{R_X}{R_Y}$ sont comprises entre 0,142 et 0,228; les angles optima de *planement* entre 8° et 11°.

Les rapports des vitesses limites de planement sont compris entre 1,08 et 1,22.

4° *Hydravions.* — *a.* Les charges sont de 30^{kg} à 40^{kg} par mètre carré.

b. La puissance utile minima par 100^{kg} de poids transporté est de 5 à 6 chev : kg pour les hydravions à flotteurs et de 4 à 5 chev : kg pour les appareils à coque-fuselage.

Pour les premiers il convient de prévoir 12 à 13 chevaux (à cause du décollage à partir de la surface de l'eau) pour la puissance développée par le moteur sur l'arbre par 100^{kg} de poids transporté, soit 104 chevaux (un moteur de 120 chevaux) pour un appareil pesant 800^{kg}. Le poids des moteurs en ordre de marche représente environ 45 pour 100 du poids total de l'appareil. Le poids total de l'appareil en ordre de marche est $7^{kg},7$ à $8^{kg},33$ par cheval.

Pour des appareils à fuselage-coque, il faut compter 13 à 14 chevaux pour la puissance développée par le moteur sur l'arbre par 100^{kg} de poids transporté, soit 560 chevaux (deux moteurs de 300 chevaux) pour un appareil pesant 4000^{kg} (poids des

moteurs (5 pour 100 du poids total de l'appareil). Le poids total de l'appareil en ordre de marche varie entre $7^{kg},14$ et $7^{kg},70$ par cheval.

Il résulte de ce que nous venons de dire que 7^{kg} par cheval doit être considéré comme le *poids minimum par cheval* d'un aéroplane en ordre de marche.

5° *Expériences faites à l'Institut de Saint-Cyr sur un aéroplane Blériot.* — A l'Institut de Saint-Cyr on a étudié au chariot un biplace Blériot côte à côte. Cet aéroplane est à empennage plan horizontal en forme de V s'élargissant vers la queue.

Les expériences, faites sous diverses inclinaisons de l'appareil et avec diverses positions du gouvernail de profondeur, ont conduit aux résultats suivants :

a. La résistance à l'avancement de l'appareil est sensiblement indépendante de la position du gouvernail de profondeur.

b. Pour une incidence déterminée (angle avec l'horizontale de la corde du profil d'une aile, cette corde étant prise au voisinage du fuselage) la poussée va en augmentant continuellement quand on passe de la position de braquage du gouvernail vers le haut à la position de braquage vers le bas.

La surface du gouvernail de profondeur intervient donc dans la sustentation.

Aussi, comme nous l'avons remarqué plus haut, l'expression $\frac{Q}{SV^2}$ dans laquelle S est la surface portante des ailes ne représente que d'une manière approchée la portance de l'appareil; il faut en effet tenir compte des surfaces de l'empennage et du gouvernail de profondeur, qui, avec la variation de l'incidence, ont des incidences positives ou négatives par rapport à l'horizontale et interviennent d'une manière variable sur la valeur de la portance.

c. La position de la résultante des actions de l'air varie beaucoup avec l'*inclinaison du gouvernail* pour une même valeur de l'angle d'incidence.

Pour une valeur déterminée de cet angle, *la résultante s'éloigne* constamment du bord d'attaque des ailes, quand on

passe de la position de braquage du gouvernail vers le haut à la position de braquage vers le bas.

Pour une position donnée du gouvernail de profondeur, par exemple pour la position du gouvernail dans le plan de l'empennage et pour les positions voisines, *la résultante se déplace vers le bord d'attaque* d'une manière continue à mesure que l'incidence *décroît*, ou *s'éloigne* du bord d'attaque à mesure que l'incidence *croît*. C'est le contraire de ce qui se passe avec une voilure isolée. Ce mode de variation manifeste le rôle de l'empennage et du gouvernail de profondeur.

6° *Étude d'un aéroplane en plein vol.* — Des expériences ont été faites à l'Institut de Saint-Cyr avec un biplan Maurice Farman et sur un Blériot. Elles permettent d'énoncer les propositions suivantes :

a. La *portance* de tout l'avion en *vol plané* est *inférieure* à sa *portance en vol normal*, lorsque l'hélice souffle sur une partie portante de l'avion (ailes, empennage en queue portante).

Pour le Blériot cette différence s'est élevée à 15 pour 100.

b. Toutes les fois que *l'hélice au ralenti exerce une action de freinage*, la *résistance à l'avancement* de l'avion dans le vol plané est *supérieure* à la résistance à l'avancement de l'avion sans hélice. De cette action de freinage résulte une augmentation de l'angle de planement.

Pour le Blériot muni d'une hélice dite *intégrale* (diamètre égal à $2^{m},45$; pas $= 1^{m},53$) tournant à 400 ou 500 tours par minute, on a trouvé 20 à 25 pour 100 pour cette augmentation de la résistance à l'avancement par rapport à la résistance de l'avion sans l'hélice.

IX. — Les hélices propulsives.

1° Pour des hélices géométriquement semblables, les grandeurs

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{H}{n^2 D^4},\\ \beta &= \frac{\mathfrak{P}_c}{n^3 D^5},\\ \rho &= \frac{\alpha\gamma}{\beta}\end{aligned}\right.$$

sont des fonctions de $\gamma = \frac{V}{nD}$, $\varepsilon = nD$; c'est-à-dire des fonctions de la vitesse d'avancement V et de la vitesse périphérique $\pi n D$.

Si, sur deux axes rectangulaires, on porte en abscisses les valeurs de γ et en ordonnées les valeurs, soit de α, soit de β, soit de ρ, les points représentatifs des propriétés d'un type d'hélices sont distribués sur des courbes $nD =$ const. dans les plans (α, γ), (β, γ), (ρ, γ).

Toutefois, pour de grandes valeurs de V de l'ordre de 27^m à 28^m par seconde (100 km : heure) et de nD (de l'ordre de 25 à 30), les courbes $\varepsilon = nD$, correspondant à des variations de ε égales à 10 unités (mètre, seconde) sont sensiblement confondues. Comme ces conditions se trouvent dans le champ des valeurs utilisées dans la pratique, on peut dire que pratiquement α, β, ρ sont des fonctions de la seule direction γ de la vitesse relative à l'extrémité de l'hélice. Dans chacun des plans (α, γ), (β, γ), (ρ, γ) les propriétés d'un type d'hélices peuvent pratiquement être représentées par une seule courbe.

De même les recherches entreprises à l'Institut de Saint-Cyr ont montré que, dans un champ de valeurs assez étendues et comprenant les conditions de la pratique, les rapports

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\beta_0},$$

dans lesquels α_0 et β_0 sont des valeurs de α et de β lorsque *la vitesse d'avancement est nulle*, sont des fonctions de γ pour un type d'hélice.

2° *Le rapport $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ décroît régulièrement et assez vite à mesure que γ croît.*

Pour un nombre déterminé de tours de l'hélice, α_0 a une valeur bien déterminée.

Pour un même nombre de tours de l'hélice, la traction de l'hélice diminue donc quand la vitesse d'avancement va en augmentant.

3° Dans les expériences de Saint-Cyr, les valeurs de $\frac{V}{nD}$ n'ont pas dépassé 0,90, valeur pour laquelle $\frac{\alpha}{\alpha_0}$ n'est pas nul. Admettons

comme justifiée l'extrapolation qui consiste à prolonger la courbe $\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}, \gamma\right)$ jusqu'à sa rencontre avec l'axe des γ, et au-dessous de cet axe. Admettons d'autre part que α_0 ait une valeur constante, quel que soit le nombre de tours de l'hélice. Nous pouvons alors énoncer la proposition suivante qui n'est qu'approchée :

Au-dessus d'une certaine valeur de $\gamma = \frac{V}{nD}$, *l'hélice agit comme frein* (traction négative); *au-dessous de cette valeur, elle agit comme propulseur* (traction positive).

D'après cela le nombre de tours à partir duquel l'hélice devient propulsive est d'autant plus grand que la vitesse de translation est elle-même plus grande. Pour une hélice de $2^m,40$, on a trouvé que, si la vitesse d'avancement varie de 4^m par seconde (14,4 km : heure) à 12^m par seconde (43,2 km : heure), le nombre de tours par minute pour lequel la traction s'annule passe de 300 à 566.

4° Les valeurs $\frac{\beta}{\beta_0}$ sont, pour une partie des hélices étudiées, continuellement décroissantes quand γ croît; pour d'autres, $\frac{\beta}{\beta_0}$ augmente d'abord un peu avec γ, puis décroît.

En tout cas la décroissance de $\frac{\beta}{\beta_0}$ est moins rapide que celle de $\frac{\alpha}{\alpha_0}$.

En considérant comme ci-dessus ce qui se passe pour une vitesse de rotation donnée de l'hélice, on voit que la traction Π décroît plus rapidement que la puissance $\mathfrak{P}_e$. Celle-ci est, dans ces conditions, proportionnelle au couple transmis à l'arbre de l'hélice. La traction et le couple moteur sont donc loin d'être proportionnels.

Dans les expériences de Saint-Cyr, on n'a pas déterminé le point de l'axe des γ pour lequel $\frac{\beta}{\beta_0}$ s'annule. Comme plus haut, admettons comme justifiée l'extrapolation qui consiste à prolonger la courbe $\left(\frac{\beta}{\beta_0}, \gamma\right)$ jusqu'à sa rencontre avec l'axe des γ. Ce que nous venons de dire montre que ce point est plus éloigné de l'origine sur l'axe des γ que le point d'intersection de la courbe $\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}, \gamma\right)$ avec ce même axe. Lorsque la puissance motrice s'annule,

la traction est encore négative et l'hélice fonctionne comme un moulin à vent. Elle absorbe encore la puissance fournie par l'air, mais n'en transmet pas au moteur; cette puissance fournie par l'air est absorbée par la résistance propre de l'hélice; celle-ci tourne sans qu'aucune puissance motrice se manifeste sur l'arbre du moteur.

5° *Pour un même nombre de tours, la puissance absorbée par l'hélice au point fixe* (vitesse d'avancement nulle) *est en général plus grande que la puissance absorbée lorsque l'hélice se déplace dans la direction de son axe.* A égalité de nombre de tours, il est nécessaire de fournir au point fixe une puissance plus grande que lorsque l'hélice s'avance dans la direction de son axe.

A égalité de puissance absorbée par l'hélice, le nombre de tours de l'hélice au point fixe est en général inférieur au nombre de tours de l'hélice en marche suivant son axe.

Considérons une hélice mise en mouvement sur un aéroplane au repos; elle absorbe une certaine puissance égale à la puissance fournie par le moteur. Si l'aéroplane se met en mouvement et si le nombre de tours de l'hélice reste constant, la puissance absorbée par l'hélice diminue d'abord, tandis que la puissance fournie par le moteur reste constante. Pour que l'égalité se produise entre les deux puissances, il est nécessaire que le nombre des tours de l'hélice aille en augmentant. Ainsi, *pour une ouverture donnée de la vanne des gaz du moteur, le nombre des tours de l'hélice en vol est en général plus grand qu'au point fixe.* Cet accroissement du nombre des tours par minute est de 30 à 40; il peut même aller jusqu'à 100. Pour un moteur donné, certaines hélices, donnant au point fixe un nombre de tours convenable, peuvent même emballer en marche de manière à amener le moteur à un nombre de tours par minute trop supérieur à son régime normal pour qu'il soit possible de conserver de telles hélices.

Toutefois, il importe de remarquer qu'il y a certaines hélices qui absorbent en vol une puissance plus grande qu'au point fixe; au lieu d'emballer le moteur (ouverture déterminée des gaz), elles le ralentissent.

6° Le *rendement* ρ croît d'abord à peu près linéairement, passe par un maximum, décroît ensuite rapidement. Toutes les hélices ont donc un *rendement maximum* correspondant à une valeur déterminée de γ particulière à chaque type d'hélice. Cette valeur est à peu près indépendante de nD, tout au moins pour les valeurs de cette quantité comprises entre 30 et 40 (région de la pratique).

7° *Pour des hélices de même pas et de même diamètre, mais de largeurs de pales différentes, le rendement maximum passe par un maximum maximorum, lorsque le rapport entre la plus grande largeur de la pale et le diamètre est voisin de* $\frac{1}{10}$.

Ce rapport est devenu classique. On le retrouve à peu de choses près dans toutes les hélices.

8° Il y a intérêt à *utiliser une hélice dans le voisinage de son rendement maximum.*

En effet, pour les valeurs de γ voisines du rendement maximum, la courbe (ρ, γ) est en général aplatie. Il en résulte que, malgré les variations du régime du moteur et de la vitesse du navire aérien, le rendement ρ est toujours voisin du maximum. Une hélice qui ne remplit pas ces conditions donne des résultats médiocres.

Le résultat pratique de l'utilisation de l'hélice dans le voisinage de son rendement maximum est une économie de combustible dans le vol horizontal et la possibilité d'utiliser plus aisément et plus complètement, dans la montée et la traversée des remous, l'excédent de puissance du moteur.

Des courbes (ρ, γ) pointues au voisinage du maximum exposent à voir le rendement de l'hélice baisser rapidement si l'on vient à accélérer le moteur. La conséquence pratique est que, pour obtenir un accroissement de puissance effective assez faible, il faut dépenser beaucoup d'essence et d'huile et risquer de fatiguer le moteur.

9° Il convient, dans la pratique, afin d'avoir un rendement maximum suffisamment élevé (compris entre 0,70 et 0,80), que γ soit, pour ce maximum, normalement voisin de 1, égal à 0,90 par exemple.

Dans ce cas, si nD $=$ 40, la vitesse normale du vol horizontal

sera égale à 36^m par seconde (129,6 km : heure). Si $n = 16,66$ tours par seconde (1000 tours par minute), $D = 2^m,40$; si $n = 20$ tours par seconde (1200 tours par minute), $D = 2^m$; si $n = 8,35$ tours par seconde (500 tours par minute), $D = 4^m,80$.

10° Les hélices sont le plus souvent à *deux pales* ou à *quatre pales*.

Les hélices à *quatre pales* doivent être employées dans le cas suivant :

Supposons qu'une hélice doive absorber une puissance assez élevée.

Avec une hélice à deux pales, on peut être amené à employer soit une hélice de diamètre trop grand, soit une hélice ayant une vitesse de rotation trop considérable.

Dans ces deux cas, la force centrifuge aurait une trop grande valeur.

On aura intérêt à employer une hélice à quatre pales qui permettra de réduire soit le diamètre, soit le nombre de tours, c'est-à-dire de diminuer l'influence de la force centrifuge.

Il faut que les pales de l'hélice à quatre pales soient disposées de telle façon que les coefficients $\frac{\mathfrak{T}e}{n^3 D^5}$ et $\frac{\mathfrak{T}u}{n^3 D^5}$ soient aussi peu que possible inférieurs à la somme des valeurs de ces coefficients pour deux hélices à deux pales, fonctionnant chacune comme si elle était seule. C'est là une étude à faire dans chaque cas.

X. — Étude du milieu environnant une hélice propulsive.

M. Eiffel a étudié au ventilateur un certain nombre de modèles d'hélices. Il s'est demandé comment varient *les vitesses du courant d'air en avant et en arrière d'une hélice*.

Les mesures ont été déterminées à des distances de l'axe de rotation égales à $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ environ, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$ environ, un peu plus de la moitié du diamètre de l'hélice. L'avant-dernière position est voisine de l'extrémité de la pale; la dernière est un peu en dehors du cylindre de vent circonscrit à l'hélice.

1° Il y a *augmentation de la vitesse* du courant d'air, soit à *l'avant*, soit à *l'arrière* de l'hélice.

2° *L'accroissement de vitesse est plus grand à l'arrière qu'à l'avant.*

3° *L'accroissement de vitesse* va en *augmentant* depuis le moyeu jusqu'à une distance de l'axe comprise entre le $\frac{1}{3}$ et les $\frac{2}{3}$ du diamètre; elle va ensuite en *décroissant* quand on s'approche de *l'extrémité de la pale.*

Cette décroissance est plus rapide à l'arrière qu'à l'avant.

4° La valeur du maximum de l'*accroissement de la vitesse* dépend de la *vitesse relative* à l'extrémité de la pale.

Soit γ_m la valeur de γ pour laquelle le rendement est maximum.

Si l'on s'éloigne de γ_m dans le sens des γ croissants, la valeur maxima de l'augmentation de vitesse diminue; elle augmente au contraire si l'on s'éloigne de γ_m dans le sens des γ décroissants.

5° La *zone troublée* s'étend très peu au delà du cylindre ayant pour base le cercle balayé par l'hélice. Ce résultat montre que le rapport $\frac{1}{3}$ adopté entre les dimensions homologues d'un modèle et de son hélice suffit à envelopper le modèle d'un matelas d'air non influencé suffisamment épais, pour que le modèle semble tourner dans une masse d'air indéfinie.

6° Le rapport $\frac{1}{3}$ adopté par M. Eiffel pour les hélices d'aéroplanes semble une limite supérieure à adopter. Il conduit à faire tourner les modèles à des vitesses de 2400 à 3000 tours par minute, chiffre qu'il est prudent de ne pas trop dépasser.

Quand il s'agit d'étudier des hélices de dirigeables (diamètre $= 4^m,50$), ce rapport conduit à construire des modèles de $1^m,50$ de diamètre. Ces modèles semblent un peu grands pour un cylindre d'air, tel que celui de 2^m de diamètre employé à Auteuil par M. Eiffel. Dans ce cas il est préférable d'employer un modèle au $\frac{1}{4}$ (diamètre $= 1^m,125$) tournant à 2000 tours par minute (nombre de tours des hélices de dirigeables $=$ 500 tours par minute).

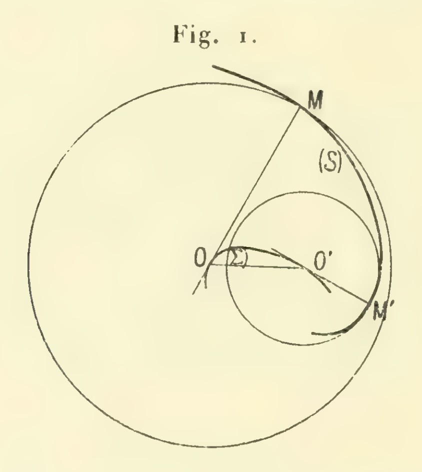
7° *L'accroissement de vitesse entre l'avant de l'hélice et l'arrière est accompagné d'une contraction légère de l'ensemble de la veine gazeuse.*

SUR UNE DÉFINITION QUALITATIVE DES CERCLES OSCULATEURS ET DES LIGNES DE COURBURE;

Par M. Paul MONTEL.

1. Soient (*fig.* 1) M et M′ deux points d'un arc de courbe (S) tels que la courbure varie toujours dans le même sens lorsqu'on se

Fig. 1.



déplace de M en M′ sur l'arc. Supposons que le rayon de courbure ρ au point M soit supérieur au rayon de courbure ρ' au point M′; l'arc OO′ de développée (Σ) compris entre les centres de courbure O et O′ en M et M′ est égal à $\rho - \rho'$ et, comme la corde OO′ est inférieure à l'arc, on a l'inégalité

$$OO' < \rho - \rho'.$$

Donc le second cercle osculateur (C′) est à l'intérieur du premier (C). En particulier, deux cercles osculateurs voisins ne se coupent jamais.

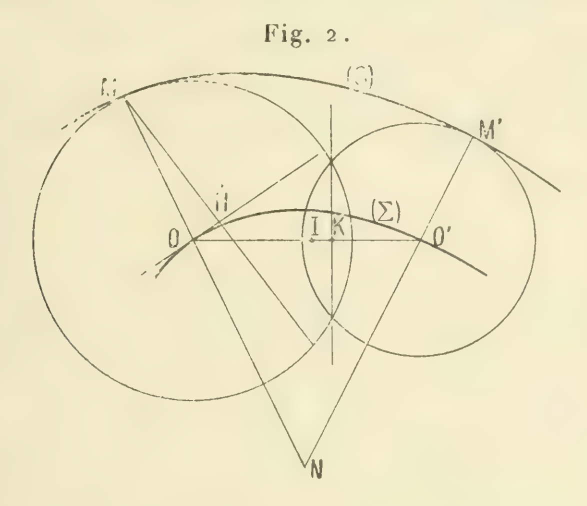
Inversement, considérons une famille de cercles (C) tangents à une courbe (S) : je dis que deux cercles voisins se coupent. Soient en effet (*fig.* 2) O et O′ les centres de deux cercles voisins de

rayons R et R′ (R > R′); la distance IK du milieu I de OO′ à l'axe radical est

$$\frac{R^2 - R'^2}{2\,OO'} = \frac{R - R'}{OO'}\,\frac{R + R'}{2}.$$

Lorsque O′ se rapproche de O, cette distance a pour limite la distance OH du point O à la perpendiculaire menée, par le point M

Fig. 2.



de contact du cercle (C) et de la courbe (S), sur la tangente en O au lieu des centres (Σ), c'est-à-dire un nombre inférieur ou égal à R. Plaçons-nous dans le premier cas, OH < R; si O et O′ sont assez voisins, on aura IK < R ou

$$\frac{R - R'}{OO'} < \frac{2R}{R + R'} < 1,$$
$$R - R' < OO',$$

et comme on peut supposer OO′ assez petit pour qu'il soit inférieur à R + R′,

$$R - R' < OO' < R + R'$$

et les deux cercles se coupent.

Supposons maintenant que OH = R, la normale OM à la courbe (S) est tangente à la courbe (Σ) : je dis que O est le centre de courbure de (S) au point M. La valeur limite de IK est égale à $R\,\frac{dR}{d\sigma}$, en désignant par $d\sigma$ la différentielle de l'arc de la courbe (Σ) et par suite $d\sigma = dR$. D'autre part la normale O′M′ rencontre en O la normale OM et l'on a

$$\frac{ON}{OO'} = \frac{\sin \widehat{OO'M'}}{\sin \widehat{MNM'}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{ON}{d\sigma} = \frac{\sin \widehat{OO'M'}}{\frac{ds}{\rho}},$$

ds étant la différentielle de l'arc de (S) et ρ le rayon de courbure en M; donc

$$\lim \mathrm{ON} = \rho \frac{d\mathrm{R}}{ds} \lim \sin \widehat{\mathrm{OO'M'}} = 0$$

et O est le centre de courbure [1].

On peut donc définir les cercles osculateurs à une courbe par la propriété qualitative suivante : *Une famille de cercles tangents à une courbe et tels que deux cercles voisins ne se coupent jamais est la famille des cercles osculateurs à cette courbe.*

2. La seconde partie du raisonnement précédent s'applique encore si la courbe (Σ) est une courbe gauche, lieu des centres de sphères (C) tangentes à une surface (L), la courbe (S) étant maintenant le lieu des points de contact M avec la surface. Deux sphères voisines se coupent, à moins que la tangente au point O à la courbe (Σ) ne soit normale en M à la surface (L). S'il en est ainsi en tous les points de (S), cette courbe est une ligne de courbure de la surface.

Réciproquement, si (S) est une ligne de courbure de la surface (L), deux sphères voisines ne se coupent pas, puisque l'arc OO' de la courbe (Σ) est ici encore égal à la différence R — R'.

On peut donc définir les lignes de courbure d'une surface par la propriété qualitative suivante : *Toute courbe* (S) *tracée sur la surface* (L) *de façon qu'il existe une famille de sphères tangentes à la surface* (L) *aux points de* (S) *telles que deux sphères voisines ne se coupent pas est une ligne de courbure de la surface.*

---

[1] On peut aussi établir bien facilement la formule

$$d\sigma^2 = d\mathrm{R}^2 + \left(1 - \frac{\mathrm{R}}{\rho}\right)^2 ds^2;$$

donc, si $d\sigma = d\mathrm{R}$, on en conclut $\rho = \mathrm{R}$.

Les remarques que nous venons de faire sur les familles de cercles ne sont qu'un cas particulier démontré par des considérations élémentaires de propositions générales établies par M. de la Vallée-Poussin [*Sur les enveloppes de courbes planes qui ont un contact d'ordre supérieur avec leurs enveloppées* (*Memorie della Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei*, vol. XXVIII, 1910)].

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

INSTITUT DE FRANCE. — ACADÉMIE DES SCIENCES. — PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE, TENUES DEPUIS LA FONDATION DE L'INSTITUT JUSQU'AU MOIS D'AOUT 1835, publiés, conformément à une décision de l'Académie, par MM. les Secrétaires perpétuels. Tome III : An 1804-1807. 1 vol. in-4° jésus ($32^{cm},5 \times 25^{cm}$), IV + IV + 686 pages. Hendaye (Basses-Pyrénées). Imprimerie de l'Observatoire d'Abbadia. 1913. (En vente chez Gauthier-Villars, Paris) (¹).

Les Procès-verbaux reproduits dans ce troisième Volume portent tous la signature de Delambre; l'action du secrétaire perpétuel se fait nettement sentir dans l'uniformité et la sobriété de la rédaction; le compte rendu d'une séance, quand il n'y a pas de rapports spéciaux, tient en une page; ces rapports eux-mêmes, moins nombreux, sont plus substantiels; les Académiciens sont très assidus, à part un petit nombre que la maladie tient éloignés. La rigidité impériale semble se substituer à la souple indépendance républicaine : l'esprit militariste s'insinue même à l'Institut, encore que le nom de Bonaparte et de Napoléon ait cessé de figurer sur les contrôles.

Durant l'an XII, Carnot, président, ne manque jamais à occuper le fauteuil.

Le 3 vendémiaire, Volta est élu associé étranger. — Monge intervient dans une question puérile soulevée par l'octroi de la ville de Lille.

Le 24, le Ministre de la Marine demande à la Classe d'examiner une méthode inventée par le Cⁿ Richardot pour naviguer sous l'eau. — Lamarck lit un rapport étendu sur un anémographe du Cⁿ Samson Michel : il en résulte que, dès 1734, Dons-en-Bray appliquait la méthode d'enregistrement graphique des phénomènes; ce rapport est fort intéressant pour l'histoire des procédés d'inscription. — Le même jour, Laplace, Coulomb, Hallé, Guyton et Biot analysent les recherches faites pendant l'an XI relativement

(¹) Voir ce *Bulletin*, t. XXXVIII, p. 65 et 225.

au galvanisme, en un rapport important pour l'éclaircissement des origines de l'étude des phénomènes voltaïques (théorie physique de la pile, effets physiologiques, actions chimiques).

Le 1er brumaire, Berthollet résume finement un Mémoire de Descotis sur le platine et ses sels, qui est encore intéressant au point de vue historique, et dont il propose l'impression dans le *Recueil des Savants étrangers*.

Le 8, Legendre et Lagrange rendent compte d'un Mémoire de Budan, intitulé : *Développement d'une nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques, tant pour la séparation que pour l'approximation des racines*. Le Rapport n'en retient comme neuf qu'un résultat relatif à la séparation des racines d'équations ayant toutes leurs racines réelles.

Le 15, lecture d'un Mémoire de Robertson sur son ascension aérostatique à Hambourg : trois membres sont invités à en rendre compte et à rédiger une instruction pour de futures ascensions.

Le 20, Biot présente les *Éléments de Statique* de Poinsot et les analyse verbalement.

Le 6 frimaire, un Mémoire du Cn Ampère, professeur de Mathématiques au Lycée de Lyon, est présenté par Delambre et renvoyé à l'examen de Lagrange et de Lacroix.

Le 13, Peyrard, bibliothécaire de l'École Polytechnique, demande des commissaires pour examiner sa traduction des *Éléments d'Euclide*.

Le 20, Rapport de Bossut, Monge et Prony sur un moyen de mesurer la vitesse initiale des projectiles lancés par les bouches à feu : l'appareil du colonel Grobert consiste en un arbre tournant à vitesse angulaire connue et portant deux disques solidaires que traverse la balle parallèlement à l'axe de l'arbre. Prony termine ce rapport par une notice sur les méthodes employées antérieurement pour atteindre le même objet par Robins, d'Arcy, Hutton, Rumford, Antoni et Mathey.

Le 4 nivôse, l'Académie met au concours la question suivante : « Quels sont les caractères qui distinguent, dans les matières végétales et animales, celles qui servent de ferment de celles auxquelles elles font subir la fermentation? »

Ce même jour, long Rapport de Hallé concernant les expériences tentées pour vérifier l'efficacité de la gélatine animale dans le trai-

tement des fièvres intermittentes, sous la direction et aux frais du Cn Seguin : la substitution de la gélatine au quinquina était accompagnée d'un régime tonique spécial qui pouvait avoir raison de fièvres d'origine tuberculeuse. Ce travail mériterait d'être pris en considération par les spécialistes et interprété en fonction des opinions actuellement en vogue.

Le 18 nivôse, le Cn Delambre transmet, de la part de M. Guillaume Kéon, de Goettingen, un Ouvrage écrit en allemand sous le titre de *Gnoséologie*, et qui se rapporte principalement à la logique. Cet Ouvrage est renvoyé à la bibliothèque, attendu qu'il n'y a pas dans l'Institut de section qui s'occupe spécialement de philosophie rationnelle.

Le 25, Rapport de Berthollet sur deux alliages nouveaux utilisables pour le doublage des vaisseaux.

Le 2 pluviôse, Lagrange et Lacroix rendent compte d'un Mémoire de Parseval, concernant l'intégration de deux équations différentielles partielles, tirées de la mécanique analytique des fluides (propagation du son, mouvement d'un fluide dans un tube conformément à l'hypothèse des tranches; intégration au moyen de séries spéciales).

Le 9, Communication de Bouvard et Berthoud sur une horloge construite pour l'Institut par Henri Lepaute. — M. Gauss, de Brunswick, est proclamé correspondant de l'Institut, sur la présentation faite par Lagrange au nom de la Section de Géométrie.

Le 7 ventôse, Larochefoucauld-Liancourt est élu correspondant, au titre de l'Agriculture et de l'Économie rurale. — Observation de Bryce sur la propriété de la croûte de la vaccine, pulvérisée et humectée d'eau, de produire une vraie pustule. — Rapport intéressant de Desmarest sur le rouet à guindres multiples pour le dévidage des soies teintes. — Vauquelin est présenté pour la place de professeur de chimie appliquée aux arts, vacante au Muséum.

Le 28, Delambre et Lagrange rendent compte de la nouvelle traduction des *Éléments d'Euclide* par Peyrard. « Nous avons lu avec soin la nouvelle traduction, en la comparant à l'original grec, du moins quant à l'énoncé de chaque proposition et pour les parties essentielles des démonstrations... ». Combien aujourd'hui en pourraient faire autant?

Le 5 germinal, Rapport de Des Essarts sur le caractère conta-

gieux de la fièvre jaune. — Procès-verbal de l'examen de pièces de drap, auquel il a été procédé conformément à une lettre du Ministre de l'Intérieur.

Le 19, Rapport de Ventenat et Lamarck sur une Étude physique de la canne à sucre. — Présentation de Thénard pour une chaire au Collège de France, et de Jussieu pour une chaire à l'École de Médecine, l'un par 42 voix, l'autre par 36 sur 44 votants.

Le 26, Biot rend compte d'un intéressant Mémoire d'Ampère, ayant pour titre : *Recherches sur l'application générale des formules du calcul des variations aux problèmes de la Mécanique.*

Le 3 floréal, résumé d'un travail de Poiret sur la formation des tourbes, surtout dans la Somme.

Le 10, le Ministre de l'Intérieur adresse un Mémoire manuscrit de Wronski, Polonais réfugié, intitulé : *Exposé présenté au Gouvernement français pour vérifier les résultats d'une théorie de l'action mécanique des fluides, fondée sur des principes de la philosophie critique.*

Le 8 prairial, Rapport sur la proposition de Rochon, relative à l'emploi d'un plateau de glace qui appartient à l'Institut, pour construire une loupe à échelons de grande dimension.

Le 29, la Commission chargée de présenter un sujet de prix pour les Sciences mathématiques, propose la théorie des perturbations de la planète Pallas, découverte par Olbers. — M. Arnoult, sous-préfet de Hasselt, adresse un Mémoire sur la trisection de l'angle : Legendre déclare qu'il n'y a pas lieu à faire un rapport en forme, ce qui n'empêchera pas le sous-préfet de récidiver.

Le 13 messidor, Rapport de Desmarest et Fourcroy sur des draps fabriqués dans une manufacture de Montolieu, près Carcassonne : on y trouve de justes critiques relatives aux fraudes des propriétaires de troupeaux dans le Roussillon.

Le 20, Deyeux, Fourcroy et Vauquelin analysent un Mémoire de Leblanc sur les substances ammoniacales considérées principalement comme matières végétatives ou engrais (poudrette, eaux vannes, etc.). — Le sous-préfet de Cambrai adresse l'ampliation du procès-verbal qui constate la découverte des restes de Fénelon.

Un membre observe que l'Institut est chargé par un arrêté du

Gouvernement de *rendre compte des progrès de l'esprit humain* depuis le commencement de la Révolution; il pense qu'il est urgent que ce compte, trop longtemps retardé, soit enfin rendu.

Le 27, Rapport judicieux de Berthollet et Vauquelin sur un Mémoire relatif à la coloration des verres par les métaux.

Le 4 thermidor, annonce de la découverte de trois nouveaux métaux dans le platine brut : l'osmium, le rhodium et le palladium. — Les Israélites français invitent l'Institut à assister à une cérémonie destinée à rendre grâces à l'Éternel de l'élévation de Napoléon à la dignité impériale. — Un Exposé de la nécessité de répandre parmi les chirurgiens la pratique de la chirurgie dentaire par l'enseignement donne lieu à un rapport de Tenon qui condamne pour un siècle l'enseignement dentaire, en faisant valoir les arguments du corps médical, dont il sera bien difficile de triompher.

Le 25, un membre demande que le Bureau soit autorisé à écrire au maréchal Bernadotte pour lui recommander l'Université de Göttingen; à la séance suivante, un M. Heyne réclame, au nom de cette Université, les bons offices de l'Institut.

Le 9 fructidor, Biot rend compte du voyage aérostatique qu'il a fait avec Gay-Lussac.

Le 16, le Ministre de l'Intérieur demande trois personnes parmi celles qui s'occupent spécialement de l'Analyse, de la Chimie et de la Géométrie, pour être membres du Conseil de perfectionnement de l'École Polytechnique : sont désignés Berthollet, Monge et Laplace.

Le 23, un Rapport détaillé de Lacroix et Monge sur un plan d'instruction primaire à tendance scientifique montre que l'Institut ne dédaigne pas de s'occuper du premier degré de l'enseignement public.

Le 30, Fourcroy et Vauquelin communiquent une Note sur la teneur élevée en acide urique de l'urine des oiseaux.

Pour l'an XIII, Desfontaine, vice-président pendant l'année précédente, passe à la présidence, tandis que Legendre est élu vice-président.

Le 2 vendémiaire, l'Académie royale de Prusse envoie ses sujets de prix pour 1805 et 1806.

Le 9, Rapport de Tessier et Parmentier sur les récoltes de l'année qui avait été très pluvieuse; on y trouve une étude critique du séchage au four et à l'étuve. — Long Rapport de Lamarck et Guyton sur un Mémoire concernant la température de la mer à diverses profondeurs.

Le 16, annonce de la mort de l'astronome Méchain, à Castellon-de-la-Plana, victime d'une épidémie régnant en Espagne. — Monge et Prony signalent une série de perfectionnements dont serait susceptible un système de voitures dites *vélocifères*, proposé à l'examen de l'Académie.

Le 23, la Commission administrative présente le compte budgétaire de la Classe pour les années VI à XII. Les recettes ont été de 55875^{fr}, les dépenses de 25414^{fr}; d'où un excédent de 30461^{fr}. De plus les dépenses ont été constamment beaucoup au-dessous des crédits accordés. L'Académie avisera à remédier à cet état de choses.

Le 30, Deyeux, rendant compte d'un livre, présente une belle étude sur l'art de la corderie maritime.

Le 14 brumaire, Rapport de Berthollet sur un Mémoire de Thénard intitulé : *Considérations sur l'oxydation des métaux et en particulier sur l'oxydation du fer*. — Haüy et Laplace rendent compte d'un travail de Hassenfratz sur la propagation du son (expériences faites dans les catacombes de Paris).

Le 28, la Classe arrête toutes dispositions relatives aux présentations de candidats pour les chaires vacantes, présentations dont elle est chargée par la loi du 11 floréal an X : notamment spécification est faite, pour chaque chaire, de la section qui fera le Rapport préliminaire.

Le 5 frimaire, M. Langevin présente cinq exemplaires de son discours en vers sur la vertu, dédié à MM. les membres de l'Académie des Sciences.

Le 12, Guyton et Charles décrivent une nouvelle lampe à huile dans laquelle est mis en œuvre le principe de la fontaine de Héron.

Le 26, Rapport fondamental de Chaptal sur les manufactures insalubres, à l'occasion d'une question posée par le Ministre de l'Intérieur et relative aux usines qui produisent de mauvaises odeurs : c'est en quelque sorte la charte de notre législation en

matière de salubrité industrielle. — Biot présente son *Traité élémentaire d'Astronomie*.

Le 3 nivôse, le préfet de la Seine envoie, entre autres choses, des couplets chantés sur la place de l'Hôtel de Ville un moment avant le feu d'artifice (en l'honneur de l'Empereur).

Le 10, Cuvier lit un Mémoire sur le squelette fossile d'un petit didelphe trouvé dans la pierre à plâtre des environs de Paris.

Le 17, Rapport de Prony sur un projet de création d'un journal mensuel intitulé *Bibliothèque germanique*, et consacré aux sciences et à la littérature allemandes : l'utilité de ce périodique est unanimement reconnue par la Classe; le Comité directeur comprendra Stapfer pour la littérature, l'histoire, les voyages, Cuvier pour les sciences naturelles, Burckhardt pour les sciences mathématiques, Lasteyrie pour les arts mécaniques, l'agriculture, etc. — Communication de Des Essartz sur le danger des inhumations précipitées.

Le 8 pluviôse, Berthollet rend compte d'un Mémoire du directeur des Gobelins sur l'alunage et l'influence des divers états des laines en teinture; Lacroix, d'un Mémoire de Parceval sur une méthode pour sommer, par le moyen d'intégrales définies, des séries de Lagrange.

Le 22, Berthollet et Guyton décrivent un système nouveau de construction des cheminées d'appartement. — Berthollet et Vauquelin apprécient défavorablement un appareil destiné à dessaler l'eau de mer; ils rendent compte d'observations de Godon de Saint-Mémin pour servir à l'histoire du chrome. — Ampère lit une démonstration du principe des vitesses virtuelles, dégagée de toute considération des infiniment petits.

Le 29, Rapport de Deyeux sur le travail des salpêtriers. — Adoption d'une proposition concernant les éloges des savants morts après la destruction de l'Académie des Sciences et avant la création de l'Institut.

Le 6 ventôse, Rapport de Jussieu et Lamarck sur un Mémoire consacré spécialement à l'examen de la germination des graines de plusieurs plantes.

Le 20, Legendre présente ses *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. — Le Ministre de la Marine réclamant les modèles de vaisseaux placés dans le local de

l'Institut, la Classe proteste et demande la centralisation de ces modèles et de ceux du Dépôt de la Marine pour constituer un musée de la Marine.

Le 27, Vauquelin attire l'attention sur un procédé pour préserver les reliures de la piqûre des insectes, et donne à ce propos un historique très intéressant pour les bibliophiles et collectionneurs.

Le 4 germinal, Bossut, Bougainville et Lévêque font un Rapport sur une écluse flottante destinée à déblayer en peu de temps et à peu de frais l'entrée du port du Havre.

Le 11, à l'occasion d'un moyen proposé pour herser et labourer la terre par la force du vent, l'Académie décide qu'aucun projet de machine ne sera examiné quand l'auteur n'aura pas envoyé un Mémoire ou un dessin donnant une idée de l'invention.

Le 18, elle décide que dorénavant on ne réimprimera point dans la collection de l'Institut les Mémoires déjà imprimés dans d'autres collections.

Le 2 floréal, intéressant compte rendu de Hallé et de Des Essartz sur l'épidémie de *vomito negro* de Livourne. — Deyeux et Monge exposent et discutent les principes de l'art du doreur.

Le 16, Poisson lit un Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et des équations aux différences.

Le 23, Rapport de Vauquelin sur une question mise au concours : « Déterminer par expérimentation les différentes sources du carbone dans les végétaux ». Le prix n'est pas décerné.

Le 7 prairial, Rapport de Carnot et Coulomb sur des changements proposés pour le perfectionnement des fusils de guerre. — Sabatier rend compte d'une Notice sur les bons effets du *Solanum Carolinense* et du suc d'ail contre le tétanos, à laquelle est joint un coup d'œil sur les différents modes de traiter cette maladie en Amérique.

Le 21, Poisson lit un Mémoire sur les équations aux différences mêlées.

Le 19 messidor, Desmarest et Périer lisent un curieux Rapport sur un métier propre à la fabrication des étoffes à fonds façonnés et à fleurons brodés. — Des Essartz et Hallé rendent compte d'un Mémoire de Leblond sur les maladies contagieuses des contrées voisines de l'Équateur, où le rôle des cousins est nettement précisé.

Le 3 thermidor, dans un Rapport de La Billardière et Coulomb sur un Mémoire consacré à la force physique des peuplades sauvages de la Terre du Diemen, de la Nouvelle-Hollande et des habitants du Timor, on trouve des considérations d'anthropologie qui méritent l'attention. — La Commission administrative est chargée d'aviser aux moyens de dédommager les employés de l'Institut qui ont été emprisonnés injustement à l'occasion d'un vol commis 2 ans auparavant dans la caisse.

Le 8 fructidor, Rapport de Pinel sur les propriétés thérapeutiques de la *Datura fastuosa*.

Le 22, Mme Lavoisier offre à l'Institut et à tous les membres de la Classe deux volumes des Mémoires de son mari.

Le 29, la Classe, considérant qu'un *senatus consulte*, rendu d'ailleurs sur un Rapport de Laplace, a rétabli le calendrier grégorien à partir du 1er janvier 1806, arrête qu'elle remet à cette époque l'élection d'un nouveau vice-président ainsi que celle des membres de la Commission des fonds.

Un registre spécial de procès-verbaux, formant la troisième Partie du présent Volume, correspond au trimestre intercalaire.

Le 1er vendémiaire de l'an XIV, communication du programme du Prix proposé par le roi de Prusse, au sujet de la contagion de la fièvre jaune.

Le 8, Coulomb et Bougainville décrivent et apprécient le scaphandre de Caveux. — Bossut, Lelièvre et Périer étudient une machine rotative à vapeur, destinée à monter le minerai dans les exploitations des mines.

Le 29, M. de Laplace lit un Mémoire sur la diminution de l'obliquité de l'écliptique.

Le 6 brumaire, le professeur Harless, d'Erlangen, adresse un Ouvrage intitulé : *Les justes inquiétudes et les précautions fondées de l'Allemagne contre la fièvre jaune.* — M. de Lalande annonce que le Sr Pons, concierge de l'Observatoire de Marseille, a découvert une comète : Bouvard réclame sur lui une antériorité de 40 minutes. — Vauquelin et Deyeux présentent un long Rapport sur les propriétés du tannin et sur le tannage des peaux.

Le 27, Rapport fondamental de Vauquelin sur un Mémoire de Thénard consacré à la bile ; autre Rapport du même sur un

Mémoire de Leblanc relatif à l'extraction de l'alun du milieu des eaux de couperose.

Le 11 frimaire, Desmarest et Coulomb décrivent un ingénieux métier à bas que la Classe décide d'acheter.

Le 18, Chaptal, La Billardière et Cuvier résument le *Tableau de la nutrition des végétaux* de Decandolle, en un remarquable Rapport dont l'insertion au Volume des *Mémoires de l'Académie* est ordonnée.

Le 25, Rapport de Burckhardt et Berthoud sur un nouveau pendule de compensation et un échappement à repos. — Rapport de Berthollet sur un Mémoire de Descotils consacré au rhodium et au palladium.

Le 2 nivôse, compte rendu par Cels et Thouin d'un Mémoire sur les inconvénients de la taille des arbres à fruit et sur une nouvelle méthode de les conduire pour en assurer la fructification.

A l'occasion du changement de calendrier la Classe décide de rendre dorénavant publique la première séance de janvier. Elle nomme vice-président pour 1806 Guyton de Morveau, tandis que Legendre passe à la présidence.

Le 6 janvier 1806, Rapport de Pinel sur les résultats obtenus par Desgenettes en employant des fumigations de gaz oxyde muriatique oxygéné à l'hôpital militaire de Paris.

Le 13, Rapport de Lacroix sur les deux Mémoires de Poisson signalés plus haut.

Le 27, le Ministre de l'Intérieur invite la Classe à s'occuper de la continuation de la description des arts et métiers commencée par l'ancienne Académie des Sciences. — Vauquelin rend compte des recherches de Proust sur le sucre de raisin.

Le 3 février, Rapport de Tenon et Des Essartz sur un Mémoire de Nysten relatif à la rigidité après la mort. — La Classe arrête que les Mémoires qu'elle fera imprimer désormais formeront une nouvelle collection, et que les volumes à paraître contiendront un exposé historique de tout ce qui aura été fait d'important pendant chaque année, lequel exposé sera rédigé par les Secrétaires.

Le 10, Legendre offre un exemplaire de la 9e édition de sa *Géométrie*.

Le 17, le Ministre de l'Intérieur annonce que l'Empereur a consenti à l'érection de la statue de Sa Majesté dans le nouveau local accordé à l'Institut.

Le 24, Prony et Laplace présentent un Rapport sur un Mémoire de Mécanique rationnelle de Poinsot qui traite de la composition des moments et de celle des aires : c'est une analyse détaillée et lumineuse de la fameuse théorie des couples et de ce qu'on appelle aujourd'hui la *théorie des vecteurs*.

Le 3 mars, on lit une lettre du Ministre de l'Intérieur qui, par ordre de Sa Majesté, propose une série de questions concernant l'avantage qu'il pourrait y avoir à faire les piliers du Panthéon en fonte.

Le 17, Son A. R. le Prince héréditaire de Bavière assiste à la séance.

Le 24, Prony, Lagrange et Laplace font, sur la démonstration du principe des vitesses virtuelles donnée par Ampère, un Rapport digne encore d'être consulté aujourd'hui.

Le 28 avril, M. Delaplace (*sic*) présente sa *Théorie de l'action capillaire* faisant suite à sa *Mécanique céleste*.

Le 12 mai, la Société royale de Londres fait savoir qu'elle a élu comme membres étrangers Lacépède et Cuvier.

Le 9 juin, Note historique du comte de Rumford sur l'emploi de la vapeur d'eau comme véhicule de chaleur pour la distillation des eaux-de-vie. — Le prix proposé pour les perturbations de la planète Pallas est prorogé à 2 ans.

Le 16, projet du Bavarois Baader pour remplacer la machine élévatoire de Marly.

Le 23, Mémoire de Messier sur l'éclipse de Soleil du 16 juin 1806. — Rapport de Vauquelin sur un aérolithe tombé à Valence.

Le 30, Rapport de Monge et Prony sur un système économique de toiture.

Le 21 juillet, Rapport de Prony, Lacépède et Haüy sur un nouveau piano, intéressant par la manière d'établir et de placer les cordes sonores sur l'instrument.

Le 28, à propos de modèles d'échappement présentés par M. Pictet, de Genève, Prony donne un précis historique et descriptif de la question des échappements.

Le 11 août, Rapport de Cuvier sur un Mémoire de M. André,

intitulé *Théorie de la surface actuelle de la Terre :* curieux par des réflexions générales touchant la manière dont l'Académie pourrait et devrait, au sens de Cuvier, envisager les recherches géologiques. A l'unanimité, il est décidé que ce Rapport sera imprimé dans les *Mémoires* de la Classe.

Le 25, annonce de la mort de Coulomb.

Le 1er septembre, Rapport de Carnot sur un écrit intitulé *Nouveaux principes de Mécanique*, par Murat, ancien ingénieur des Mines : on y trouve nettement mis en lumière le paralogisme qui s'est glissé dans ce travail, en pleine contradiction avec les principes généralement admis en Mécanique. — Arago lit un Mémoire sur la vitesse de la lumière.

Le 15, Rapport sur une étude des progrès de la végétation dans les sables des dunes.

Le 22, Rapport de Lagrange et Delambre sur la traduction des œuvres d'Archimède par Peyrard : aussi bien que les géomètres, les lettreux y prendront intérêt; signalons notamment des appréciations justifiées sur le style et la langue d'Archimède, ce style « plus doux, plus agréable que celui d'aucun géomètre grec », cette langue, en dépit du dialecte dorique, « grammaticalement parlant, toujours claire et facile à comprendre ». Delambre était un helléniste de valeur.

Le 20 octobre, démêlés assez vifs entre la Classe et son imprimeur M. Baudoin « qui ne tient aucune de ses promesses ». Des arbitres décideront s'il n'y a pas lieu de regarder comme non avenu le traité passé entre l'Institut et M. Baudoin.

Le 3 novembre, la Classe reçoit un Mémoire de Carnot sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un essai sur la théorie des transversales : on y trouve le théorème resté classique et auquel est encore attaché le nom de Carnot.

Le 17, Rapport de Carnot sur une combinaison ingénieuse de rouleaux de friction, due à l'ingénieur Murat déjà nommé.

Le 24, De Laplace lit un Mémoire sur l'*Adhésion des corps à la surface des fluides :* il s'agit de l'épineuse question de l'angle de raccordement. — Rapport de Bouvard et Burckhardt sur un dispositif mécanique propre à représenter les mouvements annuels et diurnes du Soleil et de la Lune, les derniers en ayant égard aux

quatre grandes inégalités; on y trouve une remarque relative à la réalisation d'un train d'engrenages de raison donnée, à laquelle on attribue d'ordinaire une origine plus récente.

Le 1er décembre, Mémoire fondamental de Gay-Lussac sur les gaz considérés dans leurs rapports avec le calorique, examiné par De Laplace, Delambre et Haüy.

Le 8, Rapport sur deux Mémoires de Gay-Lussac, relatifs l'un à quelques phénomènes magnétiques, l'autre à la dilatation, par la chaleur, des gaz et des vapeurs, comparée à celle du mercure. Le même jour, Gay-Lussac obtient au second tour la majorité absolue pour une place vacante dans la Section de Physique.

Le 22, l'Académie propose, à l'instigation de Berthollet, le sujet de prix suivant pour janvier 1809 : « Établir par l'expérience quels sont les rapports qui existent entre les différents modes de phosphorescence, et à quelle cause est due chaque espèce, en excluant l'examen des phénomènes de ce genre que l'on observe dans les animaux vivants. »

Le 29, la Classe arrête l'état des modèles, outils, instruments et machines donnés par l'Institut au Conservatoire des Arts et Métiers. L'inventaire, qui occupe 12 colonnes, comprend 441 articles répartis en 14 chapitres. « La plupart de ces objets ont besoin de réparations et plusieurs sont incomplets. » Les Membres de l'Académie garderont le droit de consulter ces modèles toutes les fois que l'exigeront leurs travaux et ils pourront en obtenir des dessins.

L'année 1807 commence par une séance publique. Legendre cède le fauteuil à Guyton de Morveau, et Bougainville est élu vice-président.

Le 12 janvier, Poulet, de Lille, professeur au Lycée d'Orléans, présente sa traduction, restée célèbre, des *Recherches arithmétiques* de Gauss.

Le 2 février, Rapport de Carnot sur un pont-bascule de Dillon.

Le 2 mars, Rapport de Burckhardt sur une machine à refendre les roues.

Le 6 avril, annonce de la mort de M. de Lalande. — Le Ministre de l'Intérieur fait savoir que Sa Majesté Impériale a résolu de faire placer dans la salle de l'Institut la statue de Dalembert.

Le 13, annonce de la découverte d'une nouvelle planète (Vesta)

par Olbers. — Rapport de Berthollet sur un Mémoire de Thénard concernant les éthers.

Le 20, le lieutenant-colonel du Génie Malus présente un traité d'optique « dans lequel il considère la lumière sous trois dimensions ». — Delambre est nommé professeur d'Astronomie au Collège de France en remplacement de Lalande.

Le 27, le traité fait avec l'imprimeur Baudoin est annulé par le Conseil d'État. — Curieux Rapport de Pelletan sur la distinction entre les maladies contagieuses et les épidémies.

Le 4 mai, l'Académie de Berlin demande l'intercession de l'Institut pour obtenir du Ministre de la Guerre la restitution de 69 cuivres de cartes géographiques qui étaient la propriété de l'Académie et qui ont été saisis par le Bureau topographique de la Guerre. — Rapport de Cuvier sur un Mémoire concernant la nageoire pectorale des poissons. — Élection mouvementée pour désigner le successeur de Lassus dans la Section de Médecine.

Le 18, présentation de la chambre claire de Wollaston.

Le 25, on lit une lettre du Ministre de l'Intérieur relative au tableau général des progrès des Sciences, Lettres et Arts, depuis la fin de 1789 jusqu'à la fin de 1806. Les Sections sont invitées à donner le plus tôt possible les notes et renseignements nécessaires pour la rédaction générale.

Le 15 juin, intéressantes réflexions de Cuvier sur l'emploi des figures en histoire naturelle : l'idée en remonterait à Aristote dont des manuscrits portent des lettres renvoyant à des figures non copiées dans nos manuscrits.

Le 22, expériences faites sur des colonnes du Louvre pour les préserver des végétations qui les couvrent ordinairement au bout de peu de temps. — Rapport de Hallé sur des expériences de Dupuytren touchant l'influence que les nerfs qui se distribuent dans le poumon exercent sur les phénomènes et les résultats de la respiration.

Le 29, Napoléon établit un prix de 12000^{fr} pour celui qui trouvera les meilleurs moyens curatifs du croup.

Le 10 août, description d'un remontoir présenté par Lepaute. — Élection du successeur de Berthoud, de la Section de Mécanique : 13 candidats. Est élu Sané, inspecteur général du Génie maritime.

Le 17, Poisson lit un Mémoire sur la Théorie du son.

Le 31, Rapport sur un procédé de Poterat pour imprimer les cartes géographiques en caractères en relief.

Le 7 septembre, « on lit une lettre des membres de l'Université de Leipsick sur la nouvelle constellation Napoléon. Cette lettre est accompagnée d'une lettre à S. M. l'Empereur et Roi, et d'un Mémoire où l'Univernité expose les motifs qui l'ont déterminée à former cette nouvelle constellation ».

Le 14, présentation d'un modèle d'écluse, dû à De Bethancourt, inspecteur général des canaux d'Espagne.

Le 28, Rapport de Lagrange et Lacroix sur un Mémoire de Lancret concernant les développoïdes (enveloppes des droites menées sous le même angle de tous les points d'une courbe).

Le 5 octobre, Rapport de Biot sur le Mémoire de Poisson relatif à la Théorie du son : tous les points essentiels sont mis en lumière, en une belle langue, sans emploi de formules.

Le 19, Rapport de Lacroix sur le *Traité d'Optique analytique* de Malus : le fameux théorème de Malus sur les congruences de normales est appliqué systématiquement à la marche des rayons lumineux réfractés et réfléchis. — Une fiche a fait savoir qu'Arago a pris connaissance de ce rapport le 21 juillet 1851.

Le 2 novembre, Rapport de Gay-Lussac sur une instruction présentée par le Ministre de la Guerre, relative à l'établissement de paratonnerres sur les magasins à poudre, et rédigée par le Service du Génie.

Le 30, réglementation de l'impression des Mémoires.

Le 7 décembre, la médaille Lalande est décernée à Olbers; le prix impérial du galvanisme est attribué à Davy : beau Rapport de Gay-Lussac qui sera lu à la séance publique de janvier 1808.

Le 21, M. *de* Lacroix, au nom d'une Commission, propose le sujet du prix de mathématiques à adjuger en janvier 1810 : « Donner, de la double réfraction que subit la lumière en traversant diverses substances cristallines, une théorie mathématique, vérifiée par l'expérience. »

La Classe des Sciences a maintenant atteint un état de régime. Ses rapports, toujours très courtois, toujours substantiels, ont pris une forme fort soignée; les études technologiques et industrielles,

tout comme les exposés abstraits, sont d'une clarté remarquable, et cela sans figures, sans formules. Même les plus oubliés de nos Académiciens font de la langue française un usage magnifique, et bien des comptes rendus que nous avons cités mériteraient d'échapper à l'oubli en raison même de leur forme littéraire.

A. Boulanger.

ECHEGARAY (José). — Conferencias sobre Fisica matematica : Curso de 1906 a 1907 : *Elementos de la teoria de la elasticitad*, primera parte. 1 vol. gr. in-8, 424 pages. Curso de 1907 a 1908 : *Elementos de la teoria de la elasticidad*, segunda parte. 1 vol. gr. in-8, 363 pages. Curso de 1908 a 1909 : *Elementos de la teoria de la elasticitad*, tercera parte. 1 vol. gr. in-8, 398 pages. Madrid, Establecimento tipográfico y Editorial; 1907, 1908, 1909.

J'ai rendu compte dans ce *Bulletin* (1916, p. 284) du Volume I des Conférences de Physique mathématique de M. Echegaray. Les trois Volumes suivants sont consacrés respectivement à l'étude de l'élasticité selon les méthodes de Cauchy, Lamé, Poincaré. Il existe d'autres théories de l'élasticité; mais elles se réduisent presque toutes, dans leurs grandes lignes, aux trois précédentes, de sorte que les Volumes de M. Echegaray peuvent constituer un exposé d'ensemble du développement historique de la Théorie de l'élasticité.

L'Auteur étudie d'abord (*Cours de* 1906-1907) la théorie de Cauchy. L'hypothèse moléculaire s'y présente sous sa forme la plus simple et la plus précise : molécules réduites à des points, forces intérieures centrales. Les équations de l'équilibre et du mouvement des molécules sont alors immédiates et, après y avoir fait les simplifications qu'autorisent la petitesse du rayon d'action moléculaire et la faible valeur des déformations considérées (p. 96), l'auteur en déduit le principe de superposition des effets (p. 103). Il met ensuite les équations précédentes sous leur forme d'équations aux dérivées partielles (p. 128) et examine enfin les simplifications qui se présentent pour un corps homogène ou isotrope. Pour la définition de l'homogénéité et de l'isotropie, il utilise, d'après Lamé, une « ligne d'épreuve » et s'étend sur les difficultés que

présente la conception moléculaire d'un corps isotrope. Il indique comment on peut répartir un grand nombre de molécules de manière à former un corps approximativement isotrope (p. 159).

Reste l'étude des conditions d'équilibre à la surface, dans laquelle, par l'introduction de la notion de tension, la méthode de Cauchy vient se rapprocher de celle de Lamé. L'Auteur définit la tension sur un élément de surface comme résultante des actions réciproques des molécules contenues dans deux petits cylindres ayant pour base cet élément de surface. Il effectue ensuite le calcul des tensions dans un corps isotrope déformé, dans les deux hypothèses où les tensions sont nulles dans l'état initial et où l'état initial est un état quelconque approximativement isotrope.

Les valeurs ainsi obtenues dépendent de constantes que l'Auteur exprime en fonction de λ et de μ non par un calcul direct, mais en étudiant l'équilibre du parallélépipède élémentaire : il abandonne ainsi, pour plus de simplicité, l'esprit de la méthode de Cauchy. Les conditions de l'équilibre superficiel résultent enfin de l'étude du tétraèdre de Cauchy.

Ce Volume se termine par l'étude de quelques applications très simples des équations précédemment obtenues : 1° cas d'une compression normale et uniforme; 2° extension longitudinale d'un prisme; 3° cas où la déformation dépend d'un potentiel; 4° équilibre d'un tube cylindrique; 5° propagation des ondes planes dans un milieu élastique. M. Echegaray ne manque pas d'indiquer que les deux premières des applications précédentes peuvent permettre la mesure des coefficients d'élasticité et mettre ainsi en évidence un désaccord entre la théorie de Cauchy, qui conduit à la relation $\lambda = \mu$, et l'expérience.

Le second Volume (*Cours de* 1907-1908) est consacré à l'exposition, d'après Sarrau, de la théorie de Lamé : on voit d'après ce qui précède que cette théorie a déjà été amorcée, à la fin du cours précédent. L'Auteur reprend ici systématiquement l'étude de la distribution des tensions autour d'un point, en en indiquant la représentation géométrique par les trois surfaces du second degré classiques. Il fait, dans les Conférences 5 et 6, l'étude géométrique des déformations et expose enfin la loi dite *de Hooke*, reliant les tensions aux déformations. Les équations fondamentales de l'Élasticité résultent enfin de l'étude de l'équilibre du parallélépi-

pède élémentaire et M. Echegaray vérifie (Conférence 9) qu'elles expriment l'équilibre d'une portion quelconque du corps.

Il définit ensuite le travail interne dans un solide élastique et donne son importante expression par une intégrale triple. Il termine en établissant les équations de l'Élasticité en coordonnées curvilignes cylindriques et sphériques : ces équations s'obtiennent aisément en remplaçant le parallélépipède élémentaire par un volume élémentaire convenablement choisi.

La théorie de Poincaré, exposée dans le *Cours de* 1908-1909, est, à son point de départ, extrêmement voisine de celle de Cauchy. Seulement Poincaré laisse autant que possible indéterminée la nature de l'action qui s'exerce entre deux molécules et en particulier ne la suppose pas centrale. Il admet seulement, et c'est là une hypothèse dont l'Auteur indique et discute avec détails la nécessité (Conférence 8), que le système est conservatif, c'est-à-dire que les forces dérivent d'un potentiel. Il exprime la variation de ce potentiel en fonction de nouvelles variables : les carrés des distances des molécules et des variations de ces variables. Il en déduit enfin, par le principe des vitesses virtuelles, les équations (contenant en particulier celles de Cauchy) de l'équilibre d'un corps élastique.

Par l'abandon de l'hypothèse des forces centrales fonctions de la distance, par le rôle important qu'y joue l'énergie, cette théorie se sépare de la Physique mathématique dite *classique* et procède des plus nouvelles orientations de la Physique mathématique. Aussi l'Auteur a-t-il jugé utile de faire précéder l'exposé de la théorie de Poincaré d'une longue introduction destinée à faire connaître à son lecteur les critiques faites récemment aux concepts fondamentaux de la Physique mathématique classique, à dégager les tendances de la Physique mathématique moderne. Il examine ainsi (Conférences 1 à 6) le concept de masse et indique comment l'électro-magnétisme conduit à considérer la masse comme fonction de la vitesse. Passant à la notion de force, il note la répugnance qu'ont manifestée bien des savants pour le concept de force à distance instantanée et dit quelques mots des essais effectués pour lui substituer, à la base de la Physique mathématique, le concept d'énergie ; il montre enfin les faiblesses de l'hypothèse des forces centrales. Il donne enfin quelques indications sur le principe de

relativité de l'ancienne Mécanique et la nouvelle forme que tend à prendre ce principe après le développement actuel de la théorie électromagnétique.

Plusieurs des questions soulevées dans cette introduction n'ont qu'une relation bien lointaine avec la théorie de Poincaré. Je crois pourtant qu'aucun des lecteurs de ce Livre ne regrettera cette intéressante et originale digression, bien à sa place dans une série d'ouvrages où, en marge de l'étude même des diverses théories, les questions plus proprement historiques n'ont pas été négligées.

L'Auteur suit à peu près, dans l'étude de la théorie de Poincaré (établissement, comme nous l'avons indiqué, des équations différentielles, étude des tensions, cas du corps isotrope) les trois premiers Chapitres des magistrales Leçons sur l'Élasticité de Poincaré. Les explications complémentaires qu'il donne, par exemple, sur les simplifications qu'introduit, dans le potentiel élastique, l'hypothèse de la sphère d'action moléculaire ([1]), seront appréciées de ses lecteurs.

Comme nous l'avons dit, la Théorie de Poincaré arrive aux équations fondamentales de l'Élasticité avec un minimum d'hypothèses. C'est là une tendance déjà manifeste dans la théorie de Lamé, tout à fait fondamentale dans l'œuvre de Poincaré et qui semble devoir de plus en plus, à mesure que les progrès de l'Analyse la rendront possible, se faire jour dans toutes les branches de la Physique mathématique : remonter des lois des phénomènes à leur explication en introduisant le moins possible de ces hypothèses que Henri Poincaré nomme *indifférentes*.

D'après ce qui précède on voit que le sujet de ces trois Volumes sur l'Élasticité est strictement restreint à l'établissement des équations fondamentales. L'Auteur donne pourtant quelques indications (*Cours de* 1906-1907, p. 296-306) sur l'intégration de ces équations fondamentales : les considérations qu'il développe à ce sujet, d'ailleurs très vagues, sont bien éloignées de l'esprit des méthodes qui ont été employées pour résoudre les problèmes de l'Élasticité. Il suffisait, semble-t-il, dans un Cours élémentaire comme celui-ci, d'indiquer avec précision quels étaient les problèmes aux limites qui se posaient, physiquement ; quelle devait

---

([1]) Conférence 12. *Cf.* POINCARÉ, p. 40.

être, physiquement, la généralité de leur solution; de traiter enfin quelques exemples très simples. A ce point de vue l'Auteur a parfaitement tiré parti de l'exemple, développé à la fin du premier Volume, de l'équilibre d'un corps élastique soumis à une pression uniforme.

J'ai déjà eu l'occasion de dire que ces Livres sont destinés aux débutants. Par la simplicité de l'exposition, le soin avec lequel les moindres difficultés sont élucidées (je citerai par exemple quelques pages très heureuses sur l'emploi des infiniment petits en Physique mathématique; *Cours de* 1907-1908, p. 219 et 228), en même temps que, par leur tenue philosophique, ils remplissent parfaitement le but d'intelligente vulgarisation que s'était proposé M. Echegaray.

JOSEPH PÉRÈS.

GIRAUD (GEORGES). — SUR UNE CLASSE DE GROUPES DISCONTINUS DE TRANRFORMATIONS BIRATIONNELLES QUADRATIQUES ET SUR LES FONCTIONS DE TROIS VARIABLES INDÉPENDANTES RESTANT INVARIABLES PAR CES TRANSFORMATIONS. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences mathématiques*, soutenue le 22 janvier 1916, sous la présidence de M. ÉMILE PICARD. 1 vol. in-4, VIII-169 pages. Paris, Gauthier-Villars et C[ie], 1916.

Le point de départ de M. Giraud est dans le Mémoire célèbre d'Hermite sur la transformation des fonctions abéliennes, mais l'Auteur fait jouer bientôt dans son étude le principal rôle à la forme quadratique à cinq variables

$$x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2$$

se plaçant sur un terrain analogue à celui ou s'étaient placés Poincaré en rattachant la théorie des fonctions fuchsiennes à la forme ternaire

$$x_1 x_2 + x_3^2$$

et M. Picard en arrivant aux fonctions hyperabéliennes par la considération de la forme quaternaire

$$x_1 x_2 + x_3 x_4.$$

Dans le premier Chapitre, M. Giraud reprend, dès le début,

l'étude des substitutions qui transforment en elle-même la forme bilinéaire

(1) $$\omega_1 v_3 - \omega_3 v_1 + \omega_2 v_4 - \omega_4 v_2,$$

et il y rattache certaines substitutions (T) transformant en elle-même la forme quadratique à cinq variables

(2) $$x_1 x_5 + x_2 x_4 + x_3^2.$$

Il démontre d'abord que les transformations (S) et par suite les transformations (T) peuvent être regardées comme des produits de cinq transformations très simples. Il est ensuite conduit à partager l'espace à *six* dimensions correspondant aux trois variables complexes g, h, g' en trois domaines à six dimensions séparées par trois espaces frontières à cinq et trois dimensions, que les substitutions transforment en eux-mêmes; ce qui met en évidence six domaines Δ qui vont jouer dans la suite un rôle fondamental. Les domaines à six dimensions sont les suivants :

(I) $$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 > 0 \quad (\mathcal{G} + \mathcal{G}' > 0),$$
(II) $$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 < 0 \quad (\mathcal{G} + \mathcal{G}' < 0),$$
(III) $$\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 < 0,$$

$\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}'$ étant les coefficients de i dans g, h, g'. On doit se demander si les transformations (T) contiennent toutes les substitutions linéaires qui transforment en elle-même la forme (2). Il en est bien ainsi, sous la condition toutefois que l'on envisage seulement les substitutions qui transforment en lui-même le domaine (I). Une interprétation géométrique simple peut d'ailleurs être donnée, en considérant les génératrices, de la quadrique obtenue en égalant à zéro la forme (2).

M. Giraud passe ensuite à la recherche des points doubles des transformations (T). L'équation réciproque du quatrième degré à laquelle on est conduit demande une discussion assez délicate. Suivant la nature des racines il y a dix types de transformations (S) et (T). Il faut rechercher la position des points doubles des substitutions de chaque type, c'est-à-dire auxquels des six domaines Δ ils appartiennent. Entre autres conséquences intéressantes, on déduit de cette étude la nature, au point de vue de la

discontinuité, du groupe formé par les puissances d'une substitution.

Des circonstances très différentes peuvent à cet égard se présenter suivant la substitution envisagée et suivant la position du point de départ par rapport aux domaines Δ. Dans chacun des dix types il y a lieu de ramener aussi les substitutions à une ou plusieurs formes simples, ce qui conduit à vingt-deux formes, dont quatre pour les cas généraux.

Une question capitale dans l'étude des groupes discontinus est la recherche du polyèdre fondamental. C'est à cette recherche particulièrement difficile qu'est consacré le troisième Chapitre. Dans la méthode suivie, les variétés à cinq dimensions invariantes par les transformations (T), qui ont un point double donné dans le domaine (I), jouent un rôle important. Il existe parmi elles des variétés dont l'équation s'obtient en égalant à zéro une forme quadratique à indéterminées conjuguées en $x_1, x_2, \ldots, x_5$ et à coefficients réels, variétés dont le point double donné sera dit le *centre*.

Leur considération conduit d'abord à ce théorème que, si les transformés d'un point M du domaine (I) ou (I)' par les transformations (T) d'un groupe n'ont pas ce point pour point d'accumulation, le groupe est discontinu pour ce domaine. Pour la recherche du polyèdre fondamental, M. Giraud emploie une méthode analogue à celle qui, sous le nom de *méthode du rayonnement*, a été proposée pour les groupes fuchsiens. Les variétés à cinq dimensions, dont il vient d'être parlé, jouent ici le même rôle que les circonférences (au sens non euclidien) dans le cas fuchsien. Le polyèdre fondamental est limité par des faces dont l'équation se déduit d'une forme quadratique à indéterminées conjuguées en $x_1, x_2, \ldots, x_5$.

On applique ensuite la méthode générale de formation du polyèdre fondamental aux groupes formés des puissances d'une seule transformation préalablement réduite à une des formes canoniques. Les résultats diffèrent suivant les types; les points qui ne se trouvent ni dans le polyèdre fondamental ni dans aucun de ses transformés et ceux qui sont sur le contour d'une infinité d'entre eux, appellent particulièrement l'attention. De tels points se présentaient déjà pour les groupes fuchsiens, à savoir d'une part les

points doubles d'une substitution hyperbolique et d'autre part les points doubles d'une substitution parabolique; mais ici les choses sont beaucoup plus compliquées et les points trouvés peuvent dépendre de la position du centre du polyèdre fondamental; ils sont d'ailleurs toujours en dehors du domaine (I).

Le Chapitre V traite des fonctions de g, h et g' invariantes par un groupe discontinu de transformations (T). M. Giraud forme des séries de type thétafuchsien convergentes dans le domaine (I) où elles représentent des fonctions holomorphes et passe de là aux fonctions invariantes cherchées. Le prolongement analytique de ces fonctions peut parfois sortir du domaine (I); des cas particuliers montrent que l'étude de ce prolongement quand il est possible est très difficile et que des singularités essentielles peuvent pénétrer dans l'intérieur du polyèdre fondamental. Ici encore des circonstances bien différentes de celles qui se rencontrent pour les groupes fuchsiens peuvent se présenter.

Après ces généralités, M. Giraud fait dans le Chapitre VI une étude approfondie du cas où les transformations T sont à coefficients entiers, ce qui donne le groupe qu'on peut appeler *arithmétique*. Il y a alors quatre substitutions fondamentales et le groupe est bien discontinu. Le polyèdre fondamental est donné par certaines inégalités qui se présentent sous une forme assez curieuse. Les points du polyèdre qui sont sur la surface $\mathcal{G}\mathcal{G}' - \mathcal{H}^2 = 0$ et par suite à la frontière du domaine (I) forment une variété à deux dimensions. Passant ensuite aux fonctions invariantes par les transformations du groupe arithmétique, l'Auteur établit que leur prolongement analytique ne peut se faire au delà du domaine (I) à l'intérieur duquel elles présentent d'ailleurs le caractère de fonctions rationnelles. Les singularités de ces fonctions sont étudiées sur la frontière du domaine (I) et de cette étude M. Giraud peut conclure que, entre quatre fonctions invariantes, existe une relation algébrique.

Dans un dernier Chapitre, M. Giraud indique que la plus grande partie des résultats obtenus peuvent être étendus aux formes quadratiques réelles à coefficients entiers à cinq variables du type

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2.$$

Il laisse seulement de côté l'étude des fonctions invariantes sur la

frontière du domaine analogue à (I) à l'intérieur duquel les fonctions sont définies.

M. Giraud fait, dans le travail que nous venons d'analyser, preuve d'une grande finesse en même temps que d'une grande puissance de calcul. Le partage du domaine entier des trois variables complexes se présentait dans des conditions qui n'avaient rien d'analogue dans les cas fuchsiens et hyperabéliens, et la recherche des polyèdres fondamentaux paraissait inabordable. De grandes difficultés ont donc été surmontées par M. Giraud, dont le travail est très intéressant à la fois au point au point de vue arithmétique et au point de vue fonctionnel. De plus, la voie se trouve ainsi ouverte pour l'étude de fonctions de plusieurs variables se rattachant aux formes quadratiques à coefficients réels, dans lesquelles le nombre des carrés précédés d'un signe surpasse d'une unité le nombre des carrés précédés de l'autre signe. On peut remarquer à cet égard que les fonctions étudiées par M. Giraud généralisent les fonctions fuchsiennes. Les fonctions hyperabéliennes se rattachent au contraire aux formes quadratiques où il y a égalité entre les carrés précédés de l'un et l'autre signes.

La R.

GLOBA-MIKHAÏLENKO (B.). — SUR QUELQUES NOUVELLES FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE EN ROTATION. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris pour obtenir le titre de Docteur de l'Université*, soutenue le 31 mars 1916 sous la présidence de M. PAUL APPELL. 1 vol. in-4°, III-79 pages, 22 figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916.

Les recherches classiques de Mac-Laurin et de Jacobi, sur les figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide homogène soumise à l'attraction newtonienne de ses particules et animée d'un mouvement uniforme de rotation, donnent les seules figures d'équilibre définies par des équations en termes finis. M. Liapounoff a publié, dans les Mémoires de l'Académie impériale de Pétrograd, d'intéressantes recherches sur ces figures.

Henri Poincaré, dans un célèbre Mémoire du Tome VII des *Acta mathematica*, et M. Liapounoff, dans d'importants travaux publiés

d'abord en langue russe, ont fait entrer la question dans une voie entièrement nouvelle, en cherchant s'il existe des figures d'équilibre infiniment voisines des ellipsoïdes, et en déterminant tous les cas, en nombre infini, où ces figures existent. Les ellipsoïdes correspondants forment une suite discrète, simplement infinie; leur détermination dépend de la résolution de certaines équations dont le premier membre est constitué par des fonctions de Lamé. En outre, Henri Poincaré a discuté la stabilité des figures d'équilibre par une méthode nouvelle, basée en partie sur les travaux de Sir William Thomson, qui consiste à introduire les figures limites et les figures de bifurcation : il fait correspondre à chaque figure une suite de coefficients, appelés *coefficients de stabilité*, qui doivent être tous d'un même signe pour que la figure soit stable. Sir G.-H. Darwin, dans les *Philosophical Transactions* pour 1902, a calculé effectivement certaines de ces figures infiniment voisines de l'ellipsoïde; M. Pierre Humbert en a calculé d'autres dans les *Comptes rendus* de 1915 (t. 160, p. 594, et t. 161, p. 340). Mais ces auteurs ne tiennent aucun compte de la tension superficielle qui, négligeable pour des masses liquides occupant un volume comparable à celui des corps célestes, devient au contraire prépondérante quand le volume est de quelques millimètres cubes.

M. Globa-Mikhaïlenko a porté ses recherches sur trois points : 1° figures cylindriques d'équilibre, l'axe de rotation étant parallèle aux génératrices; 2° figures d'équilibre voisines des figures cylindriques et ellipsoïdales quand on tient compte de la pression capillaire; 3° figures d'équilibre dans le cas où l'on néglige les forces newtoniennes, en conservant uniquement les forces capillaires.

Dans la première Partie de sa Thèse, M. Globa suit la méthode de Henri Poincaré qui se simplifie par la substitution de fonctions élémentaires aux fonctions de Lamé. Il trouve les figures infiniment voisines des cylindres elliptiques; il étudie la stabilité; il forme les coefficients de stabilité. Dans cette Partie, il se rencontre dans les résultats avec un géomètre anglais M. Jeans (*Philosophical Transactions*, 1902, 1903).

Dans la deuxième Partie, il montre que les cylindres elliptiques et les ellipsoïdes sont impossibles quand, aux forces newtoniennes, s'ajoutent les forces capillaires. Il détermine la variation de forme

résultant de l'introduction des forces capillaires et il montre que ces forces tendent à arrondir les figures ellipsoïdales.

La troisième Partie de la Thèse de M. Globa est relative aux figures de révolution, censées devenues permanentes, d'une masse liquide en rotation uniforme ayant un volume assez faible pour que les attractions newtoniennes de ses parties et même son poids soient négligeables comparativement à la tension superficielle : ces figures approchent de celles que donnent les expériences de Plateau. L'Auteur ramène à des quadratures la détermination de la courbe méridienne; il discute en détail les cas assez nombreux qui peuvent se présenter, suivant les diverses valeurs attribuées à la vitesse angulaire et aux deux constantes d'intégration. Il étudie, en particulier, d'abord le cas d'un anneau liquide, puis le cas d'une goutte unique ayant deux pôles réels quand la vitesse angulaire n'est pas très grande et quand, par suite, la goutte est voisine de la figure sphérique; il indique également le cas où la goutte se creuse aux deux pôles.

Les deux dernières Parties de ce travail sont entièrement originales et propres à l'Auteur; elles signalent à l'attention des géomètres deux chapitres nouveaux dans le problème de l'équilibre relatif des masses fluides en rotation uniforme.

Paul Appell.

Bibliographie scientifique française. — Recueil mensuel publié, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, par le Bureau français du Catalogue international de la Littérature scientifique. Tome XII, année 1913-1914 : Sciences mathématiques et physiques (140 p.); Sciences naturelles et biologiques (100 p.). 1 vol. gr. in-8, III-240 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914.

La *Bibliographie scientifique française* se rattache étroitement à la grande entreprise du *Catalogue international de la Littérature scientifique* publié à Londres par la coopération de presque tous les États civilisés du monde.

Ce vaste Répertoire de la Littérature scientifique courante du monde entier paraît sous forme de volumes annuels pour chacune des 17 sciences dont il s'occupe. Dans ces conditions il a semblé utile au Bureau français de publier les matériaux qu'il recueille pour ce Catalogue sous forme d'un Bulletin mensuel, afin de

mettre les travailleurs scientifiques, le plus rapidement possible, au courant de tout ce qui se publie dans le domaine des Sciences pures en France. Plus tard, au bout d'un an, on retrouvera les mêmes travaux français parmi ceux des autres pays dans les volumes du *Catalogue international*.

Cette *Bibliographie scientifique française*, dont le Comité de rédaction est présidé par M. G. Darboux, donne tous les mois deux feuilles d'impression en moyenne de titres de travaux scientifiques publiés à part ou parus dans des recueils périodiques, et cela le plus tôt possible après leur apparition. Elle comprend toutes les branches des Sciences mathématiques, physiques et naturelles, à l'exception, toutefois, de ce qu'on appelle les *Sciences appliquées*. Les titres des Volumes et Articles y sont rangés par ordre de matières suivant la classification spéciale adoptée pour le *Catalogue international de la Littérature scientifique*.

Chaque titre complet des Mémoires n'apparaîtra qu'une seule fois avec tous les index y afférents, mais de nombreux renvois permettent de retrouver le Mémoire sous toutes les rubriques sous lesquelles il est susceptible de figurer. Les renvois ne sont faits que dans la limite d'un seul et même numéro.

Les noms des périodiques accompagnant les titres des Articles sont donnés en abrégé suivant les règles adoptées par le *Catalogue international*. La liste de périodiques jointe au premier numéro de la *Bibliographie* donne ces abréviations. Cette liste se vend à part (Prix : $2^{fr}, 50$).

Cette *Bibliographie* est partagée en deux Sections. La première, *Sciences mathématiques et physiques*, comprend : A Mathématiques, B Mécanique, C Physique, D Chimie, E Astronomie, F Météorologie. La seconde, *Sciences naturelles et biologiques*, comprend : G Minéralogie, H Géologie, J Géographie, K Paléontologie, L Biologie, M Botanique, N Zoologie, O Anatomie, Embryologie et Histologie, P Anthropologie, Q Physiologie, R Bactériologie.

L'utilité de cette publication française ressort de ce que, grâce à ses 12 numéros paraissant dans le courant de chaque année, elle fait connaître les travaux français bien avant l'apparition des Volumes du *Catalogue international de la Littérature scientifique*.

Er. L.

MÉLANGES.

SUR DES LIGNES POLYGONALES ET SUR DES SURFACES POLYÉDRALES GÉNÉRALISANT LES POLYGONES DE PONCELET;

Par M. Paul APPELL.

M. Darboux ([1]) et M. Fontené ([2]), se proposant de généraliser les polygones de Poncelet, ont étudié des polygones dont les sommets décrivent des coniques et dont les côtés enveloppent des coniques. Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences ([3]), j'ai indiqué comment on peut, à l'aide de la représentation paramétrique propre ou impropre, déterminer des courbes algébriques associées C et Γ, telles qu'il existe des polygones dont les sommets décrivent les courbes C, pendant que leurs côtés enveloppent les courbes Γ.

Nous nous proposons ici de donner quelques exemples et d'étendre la méthode à des courbes gauches et à des surfaces algébriques, les polygones étant alors remplacés par des chaînes polyédrales de triangles.

I. *Courbes planes.* — Soient n courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, distinctes ou non, avec les représentations paramétriques

$$x_i = \varphi_i(t_i), \qquad y_i = \psi_i(t_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

donnant les coordonnées d'un point M_i de C_i exprimées par des fonctions trigonométriques ou elliptiques aux mêmes périodes ω et ω'.

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 162, 10 et 17 janvier, 7 février 1916, p. 57, 101 et 214.

([2]) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. XVI, 1897, et *C. R. Acad. Sc.*, t. 162, 7 février 1916, p. 213.

([3]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 162, 28 février 1916, p. 306.

Prenons des constantes α_i et des quantités ε_i égales à ± 1, et considérons les points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ correspondant aux valeurs suivantes des paramètres. Le paramètre t_1 étant arbitraire, les autres paramètres seront donnés par les relations

$$t_2 = \varepsilon_1 t_1 + \alpha_1, \qquad t_3 = \varepsilon_2 t_2 + \alpha_2, \qquad \ldots,$$
$$t_n = \varepsilon_{n-1} t_{n-1} + \alpha_{n-1}, \qquad t_{n+1} = \varepsilon_n t_n + \alpha_n,$$

où les α et les ε sont assujettis à cette condition que t_{n+1} soit de la forme

$$t_{n+1} = t_1 + h\omega + k\omega'$$

(h et k entiers). Alors le point de la courbe C_1 de paramètre t_{n+1} se confond avec M_1, et, quand t_1 varie, le polygone $M_1 M_2 \ldots M_n$ varie d'une manière continue, de telle façon que ses sommets décrivent les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ et que ses côtés restent tangents à certaines courbes algébriques fixes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$.

Dans cette catégorie rentrent les polygones de Poncelet et les polygones de M. Fontené et de M. Darboux. Pour obtenir les polygones de Poncelet inscrits dans un cercle et circonscrits à des cercles (Jacobi, *Œuvres complètes*, t. I, p. 279-293), il suffit d'employer la représentation paramétrique du cercle telle qu'elle se présente quand on exprime, en fonction du temps, les coordonnées du pendule simple.

Comme application élémentaire de cette méthode à des coniques, imaginons deux cercles de centres C et C' : soient M et M' deux points pris, l'un sur la circonférence du premier, l'autre sur la circonférence du second, de telle façon qu'en appelant θ et θ' les angles polaires des rayons CM et C'M' avec une direction fixe Ox, on ait

$$\theta' = \theta + \alpha,$$

α désignant une constante; quand θ varie, la droite MM' enveloppe une conique Γ. Dans certains cas particuliers la droite MM' passe par un point fixe; c'est ce qui arrive quand $\alpha = k\pi$ (k entier), ou quand α est l'angle des deux rayons CI et C'I aboutissant à l'un des points d'intersection I des deux circonférences.

Prenons alors, sur la circonférence C, des points $M_1, M_2, \ldots, M_n, M_{n+1}$ correspondant aux angles polaires $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1}$, et sur C' des points $M'_1, M'_2, \ldots, M'_n$ correspondant aux angles

polaires $\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_n$. Si l'on pose

$$\begin{array}{llll} \theta'_1 = \theta_1 + \alpha_1, & \theta'_2 = \theta_2 + \alpha_2, & \ldots, & \theta'_n = \theta_n + \alpha_n, \\ \theta_2 = \theta'_1 + \beta_1, & \theta_3 = \theta'_2 + \beta_2, & \ldots, & \theta_{n+1} = \theta'_n + \beta_n, \end{array}$$

les α_i et les β_i désignant des constantes, assujetties à la condition

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots + \alpha_n + \beta_n = 2k\pi$$

(k entier), le point M_{n+1} coïncide avec M_1, et, quand θ_1 varie, le polygone

$$M_1 M'_1 M_2 M'_2 M_3 M'_3 \ldots M_n M'_n M_1$$

se déforme, de façon que ses sommets $M_1, M_2, \ldots, M_n$ décrivent le cercle C, ses sommets $M'_1, M'_2, \ldots, M'_n$ le cercle C′ et que ses côtés enveloppent des coniques. Si l'on suppose

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n,$$

les côtés de rang impair sont tangents à une même conique Γ, et les côtés de rang pair à une même conique Γ'.

Remarque. — Dans la méthode précédente on obtient une suite *simple* de points. On peut, sans se préoccuper de la réalité des coordonnées, introduire *deux* entiers variables i et j.

Soit, pour traiter le cas le plus élémentaire, une courbe C $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, où f et φ sont elliptiques. Prenons les points $M_{i,j}$ correspondant aux valeurs du paramètre t :

$$t_{i,j} = t_{0,0} + i\alpha + j\beta,$$

où α et β sont des constantes telles que

$$n\alpha = h\omega + h'\omega', \qquad m\beta = k\omega + k'\omega',$$

où n, m, h, h', k et k' sont des entiers dont les deux premiers sont positifs. Les points $M_{i+n,j}$ et $M_{i,j+m}$ coïncident alors avec $M_{i,j}$; quand $t_{0,0}$ varie, les cordes $M_{i+1,j} M_{i,j}$ enveloppent une courbe Γ et les cordes $M_{i,j+1} M_{i,j}$ une courbe Γ'. Par exemple, pour une cubique, en prenant $\alpha = \frac{\omega}{3}$, $\beta = \frac{\omega'}{3}$ on a une configuration variable qui se confond avec celle des points d'inflexion, quand le point $M_{0,0}$ est un point d'inflexion.

II. *Courbes gauches.* — La même méthode peut s'appliquer à n courbes gauches C_1, C_2, ..., C_n, distinctes ou non, telles que les coordonnées d'un point M_i de C_i s'expriment par des fonctions

$$(M_i) \qquad x_i = f_i(t_i), \qquad y_i = \varphi_i(t_i), \qquad z_i = \psi_i(t_i)$$

trigonométriques ou elliptiques aux mêmes périodes ω et ω'. Dans ce cas, les côtés M_i, M_{i+1} décrivent des surfaces réglées algébriques et peuvent exceptionnellement admettre une enveloppe; les plans M_i, M_{i+1}, M_{i+2} de trois sommets consécutifs enveloppent des surfaces algébriques développables; on a ainsi une chaîne polyédrale de triangles M_i, M_{i+1}, M_{i+2} dont les sommets décrivent les courbes données et dont les faces enveloppent des surfaces développables algébriques.

Dans cette catégorie rentrent les polygones gauches de Moutard formés par une suite de génératrices d'une quadrique, alternativement de l'un et de l'autre système, inscrits dans une biquadratique de la surface (*voir* un Article de M. Fouché, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLII, 1915, p. 146, et *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen, t. II, p. 449).

Nous devons citer aussi comme polygones inscrits dans une courbe gauche, ceux que M. Fontené a considérés dans plusieurs Articles des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (4ᵉ série): 1° *Tétraèdres variables liés à des quadriques et à des cubiques gauches* (t. I, 1901, p. 10); 2° *Tétraèdres, octaèdres, icosaèdres inscrits à une cubique gauche et circonscrits à une quadrique* (t. IV, 1904, p. 289); 3° *Contours variables inscrits à une cubique gauche, circonscrits par les plans de leurs angles à une surface réglée du troisième ordre* (t. IV, 1904, p. 439); 4° *Polygones gauches de Poncelet; extension du théorème de Cayley à l'espace* (t. V, 1905, p. 114).

III. *Surfaces et polyèdres.* — Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3ᵉ série, t. XVIII, 1899, p. 67), M. Fontené a publié un Article *Sur des polyèdres mobiles comparables aux polygones de Poncelet*, où sont étudiés des tétraèdres à cinq paramètres circonscrits à une quadrique et inscrits à une quadrique, puis des systèmes de quadriques U et V admettant des hexaèdres à

intersections coplanaires, ou des octaèdres à diagonales concourantes inscrits à U et circonscrits à V.

Dans un article du *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XXXII, 1904, p. 135), M. G. Humbert a considéré également des tétraèdres, dépendant de cinq paramètres, inscrits à une quadrique et circonscrits à une autre quadrique; puis il a étudié les tétraèdres inscrits à une biquadratique gauche et circonscrits à une quadrique, ainsi que les figures corrélatives.

M. Fontené a réussi ensuite à démontrer certains théorèmes analogues à ceux de Poncelet pour des polyèdres de genre *un*, dans diverses communications à la Société mathématique de France (*Bulletin*, t. XXXII, 1904, p. 284; t. XXXIII, 1905, p. 115; t. XXXIV, 1906, p. 3 et 153; t. XXXV, 1907, p. 9). Les conditions d'existence des polyèdres considérés sont établies par voie algébrique et exprimées par des relations entre les racines de l'équation en λ relative au système des deux quadriques.

M. Rémy a étudié deux surfaces du quatrième ordre qui dérivent de l'octuple gauche complet (*Nouvelles Annales*, 1907, p. 6).

Sans prétendre retrouver ces cas intéressants, je me borne à indiquer la question suivante comme sujet de recherches : on peut former des polyèdres inscrits à certaines surfaces algébriques et circonscrits à d'autres, en partant de la représentation paramétrique.

Imaginons une surface (S) telle que les coordonnées d'un de ses points puissent être exprimées, proprement ou improprement, par des fonctions

$$(S) \qquad x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

méromorphes à quatre paires de périodes (ω_1, ω'_1), (ω_2, ω'_2), (ω_3, ω'_3), (ω_4, ω'_4), ou par les fonctions dégénérées à trois ou à deux paires de périodes. Prenons sur la surface les points $M_{i,j}$ correspondant à des couples de valeurs des paramètres de la forme

$$(M_{i,j}) \qquad \begin{cases} u_{i,j} = u_{0,0} + i\alpha + j\alpha', \\ v_{i,j} = v_{0,0} + i\beta + j\beta', \end{cases}$$

les quantités α, β, α', β' étant des constantes telles que l'on ait

$$n\alpha = k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + k_3\omega_3 + k_4\omega_4,$$
$$n\beta = k_1\omega'_1 + k_2\omega'_2 + k_3\omega'_3 + k_4\omega'_4$$

et

$$m\alpha' = h_1\omega_1 + h_2\omega_2 + h_3\omega_3 + h_4\omega_4,$$
$$m\beta' = h_1\omega'_1 + h_2\omega'_2 + h_3\omega'_3 + h_4\omega'_4,$$

où les m, n, k_ν et h_ν sont des entiers dont les deux premiers sont positifs. On a alors mn points distincts,

$$M_{i,j} \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ j = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \end{pmatrix},$$

les points $M_{i+n,j}$ et $M_{i,j+m}$ se confondant avec $M_{i,j}$.

Si l'on considère les plans $P_{i,j}$ joignant les trois points $M_{i,j}$, $M_{i+1,j}$, $M_{i,j+1}$, ces plans sont des faces du polyèdre formé par les points considérés. De même les plans $Q_{i,j}$ déterminés par les points $M_{i,j}$, $M_{i-1,j}$, $M_{i,j-1}$, les plans $R_{i,j}$ déterminés par $M_{i,j}$, $M_{i,j+1}$, $M_{i+1,j+1}$, et les plans $S_{i,j}$ déterminés par $M_{i,j}$, $M_{i+1,j}$ et $M_{i+1,j+1}$, sont des faces de ce polyèdre.

Lorsque l'on fait varier d'une manière quelconque les deux paramètres $u_{0,0}$ et $v_{0,0}$ les points $M_{i,j}$ décrivent la surface (S), les plans $P_{i,j}$ enveloppent une surface algébrique Σ, les plans $Q_{i,j}$, $R_{i,j}$, $S_{i,j}$ enveloppent de même d'autres surfaces algébriques Σ_1, Σ_2, Σ_3.

Je n'insiste pas sur la généralisation évidente qui pourrait être faite d'après la méthode du n° I en introduisant plusieurs surfaces et d'après la *Remarque* en introduisant des points $M_{i,j,k}$ ou $M_{i,j,k,l}$ dépendant de trois ou de quatre entiers. Il y aurait intérêt à voir appliquer cette méthode à des cas simples, comme à des quadriques, ou encore à la surface des ondes, en partant de la représentation paramétrique bien connue de cette dernière surface, telle qu'elle est exposée, par exemple, dans les *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications*, par Appell et Lacour (Gauthier-Villars, 1897), ou à la surface de Kummer, ou enfin à des surfaces hyperelliptiques, comme celles qui ont été étudiées par M. Picard (*Journal de Liouville*, 1885, Mémoire couronné, 1888, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, par E. Picard et Simart, t. II, p. 439-464), par M. Humbert (Mémoire couronné, *Journal de Liouville*, 4e série, t. IX, 1893, p. 29-170, 361-375), par M. Traynard (Thèse de doctorat, *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXIV, 1907, p. 77), par MM. Enriques et Severi (*Acta*

mathematica, t. XXXII et XXXIII, 1910, p. 283-392 et 321-403). Citons encore, dans le même ordre d'idées, la Thèse de M. Rémy (*Sur une classe de surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes du genre trois;* Gauthier-Villars, 1908).

IV. M. Darboux a ouvert une voie nouvelle en considérant des droites tangentes à deux surfaces homofocales du second ordre [*Leçons sur la Théorie des surfaces* (1), t. II, Chap. XIV, Paris, 1889, p. 302-307]. Il a établi le théorème suivant, à l'aide de la théorie des intégrales hyperelliptiques : *Si un polygone est circonscrit à deux surfaces homofocales et si ses sommets sont placés sur d'autres surfaces homofocales aux premières, de façon que deux côtés consécutifs suivent les lois de la réflexion de la lumière sur la surface contenant leur point de rencontre, il existera une infinité de polygones ayant les mêmes propriétés, l'un quelconque des sommets de ces polygones pouvant se déplacer arbitrairement sur la surface qu'il est assujetti à décrire.*

Ce théorème a été énoncé par M. Darboux dans une Note *Sur les polygones inscrits et circonscrits à l'ellipsoïde* (*Bulletin de la Société philomathique*, t. VII, 1870, p. 92). Il se rattache aux intégrales hyperelliptiques, comme les théorèmes de Poncelet aux intégrales elliptiques.

L'introduction des fonctions Θ à quatre paires de périodes dans ce problème et dans la géométrie des surfaces du second degré est due à M. O. Staude : *Geometrische Deutung der Additions Theoreme der hyperelliptischen Integrale und Fonctionen erster Ordnung, im System der confocalen Flächen zweiten Grades* (*Mathematische Annalen*, t. XXII, 1883, p. 1 et 145).

Dans une Note de la page 308 des *Leçons* (*loc. cit.*), M. Darboux indique un autre genre de polygones rattachés aux ellipsoïdes homofocaux, dont la théorie offre les rapports les plus étroits avec celle de l'addition des fonctions hyperelliptiques.

---

(1) *Voir* aussi ce Tome II, deuxième édition, Paris 1914, Chap. XIV, p. 304-326.

A PROPOS D'UNE NOTE DE M. MATTEO BOTTASSO SUR UNE ENVELOPPE DE DROITES (1);

Par M. Maurice D'OCAGNE.

Ainsi que l'Auteur l'a lui-même observé, « les points Q_1 et Q_2 décrivent les podaires, par rapport au point M, des lignes engendrées par les points P_1 et P_2. Par conséquent, on sait que les normales à ces podaires, menées par les points Q_1 et Q_2, passent par les points milieux des segments MP_1 et MP_2 ». Il en résulte que l'on connaît aussi les tangentes en Q_1 et Q_2 à ces courbes ; soit T le point de rencontre de ces tangentes. Cela posé, l'angle Q_1MQ_2 étant droit, par suite constant, un théorème que j'ai donné jadis dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1883, p. 258) *montre que la droite qui joint le point* M *au point* R *où* Q_1Q_2 *touche son enveloppe est symétrique de la droite* MT *par rapport à la bissectrice de l'angle* Q_1MQ_2.

A l'endroit cité, j'ai donné une démonstration géométrique directe du théorème en question. Je saisirai l'occasion qui m'est ici offerte de faire remarquer qu'on peut encore l'obtenir comme suit :

Si les côtés d'un angle mobile de grandeur constante restent tangents à des courbes données, la tangente au lieu du sommet de cet angle est antiparallèle, par rapport à ses côtés, de la droite joignant les points de contact de ces côtés avec leurs enveloppes respectives.

Il suffit, dès lors, d'appliquer la transformation par polaires réciproques à la figure ainsi constituée pour retomber sur la proposition que je viens de rappeler.

La réduction l'une à l'autre de la construction donnée par M. Bottasso et de celle énoncée ci-dessus peut donner lieu à un exercice de géométrie.

D'autre part, dans le cas où $\alpha = 0$ (Remarque terminale du n° I

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXIX_1, avril 1915, p. 90.

de la Note visée), le point P_1 se confond avec P, et le point P_2 avec le centre de courbure C correspondant à P. Donc, en ce cas, le point Q_1 décrit la podaire de la courbe lieu de P, par rapport au point M, et le point R où la droite Q_1Q_2 touche son enveloppe n'est autre que le centre de courbure de cette podaire. La construction obtenue par M. Bottasso pour ce point R est la suivante (p. 94) : *Si la perpendiculaire élevée en* Q_2 *à* Q_1Q_2 *coupe* MQ_1 *en* H *et si le segment* CK (*porté sur* CP) *est équipollent à* HM, *la droite* HK *passe par le point* R.

Or, il est clair, HMKC étant un parallélogramme, que HK passe par le milieu de MC. Moyennant cette légère variante, la construction ci-dessus du centre de courbure de la podaire coïncide avec celle que j'ai fait connaître naguère, également dans les *Nouvelles Annales* (1895, p. 112).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Grialou (J.). — *Cours d'Hydraulique.* 1 vol. grand in-8 (25-16) de VI-550 pages avec 240 figures. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916. 20 fr.

Loria (Gino). — *Guida allo studio della Storia delle Matematiche.* (Manuali Hoepli). 1 vol. in-16, XI-228 pages. Milano, Ulrico Hoepli, 1916. L. 3.

Roubaudi (C.). — *Traité de Géométrie descriptive*, à l'usage des élèves des classes de Mathématiques spéciales et des candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure, aux Écoles Centrales des Arts et Manufactures, des Ponts et Chaussées et des Mines de Paris et de Saint-Étienne. 1 vol. grand in-8, VI-552 pages, 549 figures dans le texte. Paris, Masson et Cie, 1916. 15 fr.

Bohier (Eugène). — *Recherche méthodique et Propriétés des Triangles rectangles en nombres entiers.* 1 vol. gr. in-8, VII-266 pages. Paris, A. Hermann et Fils, 1916. 8 fr. 50.

Duhem (Pierre). — *Le Système du Monde. Histoire des Doctrines cosmologiques de Platon à Copernic.* Tome IV. 1 vol. gr. in-8, IV-597 pages. Paris, A. Hermann et Fils, 1916. 19 fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MILLER (G.-A.), BLICHFELDT (H.-F.), DICKSON (L.-E.). — THEORY AND APPLICATIONS OF FINITE GROUPS. First Edition (First thousand). (Dédié à CAMILLE JORDAN.) 1 vol. gr. in-8, XVII-390 pages. New-York : John Wiley and Sons; London: Chapman and Hall; 1916.

Voici un nouvel et éclatant hommage qui, d'au delà de l'Atlantique, vient vers l'École française ou, plus exactement, vers l'un de ses Maîtres les plus glorieux.

« Ce Livre est dédié à Camille Jordan qui, par ses recherches fondamentales en la théorie et les applications des groupes finis, a enrichi et étendu le sujet jusqu'à le convertir en une branche fondamentale des Mathématiques, en fournissant, d'ailleurs, l'inspiration pour la grande activité déployée ensuite en ce champ (1). »

S'il est une théorie d'un caractère particulièrement international, c'est bien celle des groupes.

Henri Poincaré, dans un Article sur les fondements de la Géométrie (*Monist*, 1898) nous montre cette conception comme existant, en puissance, dans la géométrie des Grecs. Chez Lagrange, Vandermonde, Euler, la chose est cotoyée de manière plus ou moins consciente. Au point de vue algébrique et sous l'aspect moderne, elle se précise chez deux mathématiciens italiens, P. Ruffini et P. Abbati, à la fin du XVIIIe siècle. Puis viennent Gauss, Abel, Galois, Cauchy, Cayley, Hamilton, Kronecker et Camille Jordan.

Sur cette voie presque rectiligne, Sophus Lie greffe, par analogie, la théorie des groupes continus, ce qui nous permet de rappeler que ce géomètre, au début du troisième Volume de son grand Ouvrage, a tenu à rendre spontanément hommage à notre École Normale supérieure, à son « immortel » élève, Evariste Galois, à ses maîtres incomparables G. Darboux, E. Picard, J. Tannery. A cette époque la Science allemande, qui avait su s'at-

(1) Ce passage entre guillemets est la traduction littérale de la dédicace que les Auteurs ont placée en tête de l'Ouvrage.

tacher l'illustre géomètre norvégien, s'accommodait fort bien de l'hommage qu'il nous rendait; en cette question, comme en beaucoup d'autres, il serait aisé de multiplier des citations, issues d'ouvrages de langue allemande ou même d'auteurs allemands, où de justes hommages sont rendus au génie d'autrui. Quel extraordinaire vent de folie a soufflé sur un peuple pour lui faire déclarer tout à coup que sa science et sa culture avaient une supériorité dont les horreurs de la guerre achèveraient d'établir le triomphe?

Ce n'est pas ici le lieu d'insister beaucoup sur ces points; qu'il nous soit simplement permis de penser que l'hommage de trois savants américains à un maître français établit suffisamment que notre école n'est point diminuée dans l'estime de ceux qui ont voulu s'en inspirer en toute liberté.

*
* *

Dans la nouvelle œuvre, chacun des collaborateurs s'est assigné nettement sa part de besogne.

M. G.-A. Miller développe d'abord la théorie des substitutions et des groupes abstraits. Il ne faudrait pas que ce dernier adjectif éveille une idée d'abstraction qui irait tout à l'encontre de la réalité.

Les méthodes intuitives, et particulièrement les méthodes géométriques, interviennent dans les premières définitions. Les trois sommets d'un triangle équilatéral peuvent être substitués les uns aux autres par rotation du triangle dans son plan; on peut ensuite recommencer après retournement du triangle effectué dans l'espace. On a ainsi six substitutions de lettres; les combiner de toutes les manières possibles ne donnera plus rien de nouveau. Deux substitutions successives ne donnant qu'une substitution de l'ensemble, ces six substitutions forment un *groupe*. C'est l'évidence géométrique même qui tient lieu, on le voit, de toute idée de dénombrement. Si nous nous refusions à retourner le plan du triangle, les trois premières substitutions formeraient aussi un groupe dit *sous-groupe* du premier. C'est d'une clarté qui ne saurait être surpassée.

Les différentes puissances d'une substitution constituent un groupe *cyclique*; les rotations de polygones réguliers, dans leur plan, en donnent les plus simples exemples.

La théorie des congruences arithmétiques fournirait de même un point de départ pour la théorie des groupes. Écrivons

s pour $x' \equiv ax + b \pmod p$,

s^2 pour $x' \equiv a^2 x + (a + 1)b$,

. . . . ,

s^r pour $x' \equiv a^r x + (a^{r-1} + a^{r-2} + \ldots + a + 1)b$.

On peut se proposer d'avoir

$$s^r = s^0 = 1,$$

d'où

$$a^r \equiv 1 \pmod p$$

ou bien

$$a^r - 1 = (a - 1)(a^{r-1} + a^{r-2} + \ldots + a + 1) \equiv 0 \pmod p.$$

On conçoit ainsi l'existence de groupes arithmétiques analogues aux groupes cycliques.

Parmi ces amorces, aussi élégantes qu'élémentaires, signalons encore la définition des groupes au moyen de matrices.

L'étude des généralités paraît dominée par trois théorèmes d'une importance fondamentale portant respectivement les noms de Lagrange, Sylow et Cayley. Vouloir les préciser entraînerait à des développements aussi étendus que ceux du Livre ; je me contenterai de dire que ce sont des théorèmes de réduction canonique; ils font reconnaître les sous-groupes, montrent l'importance de certains groupes semblant d'abord constitués de manière particulière (groupes *primitifs*, groupes *isomorphes*, etc.) et permettent de construire les groupes généraux à l'aide de ces matériaux particulièrement symétriques. Ces fondements essentiels occupent trois Chapitres à la suite desquels une Note historique a déjà pu trouver place. C'est d'ailleurs à cette Note que sont empruntées quelques-unes des lignes déjà écrites dans la présente Analyse.

La notion de *commutativité* entre éléments d'un groupe nous conduit maintenant à l'étude des groupes dont tous les éléments sont commutatifs ou groupes *abéliens*. Les théorèmes constructifs, tels que le théorème de Sylow, permettent de les comparer aux groupes cycliques et même de reconnaître quand un groupe abélien est décomposable en de tels groupes. Les groupes abéliens semblent surtout nés de la Théorie des Nombres, ce que M. Miller

montre en revenant notamment sur des considérations arithmétiques relatives aux groupes de congruences déjà introduits dans son premier Chapitre.

De même qu'une généralisation convenable permet d'apercevoir les groupes abéliens au delà des groupes cycliques, on peut, par une autre extension, apercevoir, au delà des groupes abéliens, ceux dont les ordres sont puissances de nombres premiers ou groupes « sylowiens ». L'étude de ces derniers est ainsi naturellement commencée par la recherche de leurs sous-groupes abéliens. Les constructeurs de la théorie des groupes ont d'ailleurs eu une tendance marquée à rester surtout dans ce domaine sylowien qui, s'il n'était pas le plus général, était, sans contredit, le plus fécond, le plus harmonieux, celui qui constituait un véritable « El Dorado » pour ladite théorie. Certes, les relations entre groupes abéliens et sylowiens, faciles à utiliser comme entrée en matière, n'existent que dans des cas particuliers, mais les théorèmes relatifs à de tels cas ont une forme algébrico-arithmétique susceptible d'être conservée, quant à l'aspect, dans des cas beaucoup plus généraux. Ainsi, des expressions linéaires, ou en forme de quotients très simples, indiquent le nombre des sous-groupes d'ordre p^n contenus dans un groupe d'ordre p^m. La question la plus intéressante, mais difficile et délicate en conséquence, est la construction de tous les groupes possibles d'ordre p^m. Pour $m < 5$, point de difficulté essentielle et les groupes abéliens sont encore d'un prompt secours. Au delà les résultats explicites sont plus clairsemés; ils ont surtout été obtenus par récurrence.

Un Chapitre d'une originalité toute particulière est consacré aux groupes abstraits à définitions simples. Ces définitions simples sont généralement géométriques; elles proviennent notamment des déplacements des polyèdres réguliers, tout comme le premier groupe introduit dans l'Ouvrage provenait des déplacements d'un triangle équilatéral. La question est de savoir quels groupes plus complexes, et à définition non immédiatement géométrique, peuvent être atteints et étudiés par combinaison des propriétés des premiers; elle est nouvelle en grande partie et doit beaucoup aux publications de M. Miller lui-même.

On pourrait dire quelque chose d'analogue quant à l'étude

générale de l'isomorphisme; des racines de l'unité, on peut s'élever aux nombres complexes dépendant de n unités distinctes, aux quaternions, au Calcul *icosien* d'Hamilton. Il y a en tout ceci des groupes où l'on retrouve, sous des formes plus générales, les modes de calcul associés d'abord aux grandeurs arithmétiques et géométriques élémentaires. De même Serret, J. Bertrand et M. C. Jordan donnèrent d'importants théorèmes établissant l'isomorphisme de groupes de provenances très différentes.

Nous aboutissons enfin aux groupes résolubles, c'est-à-dire à ceux qui sont exprimables par une succession de sous-groupes, de la même manière qu'une équation résoluble par radicaux l'est par une succession d'opérations définies par des équations de degrés inférieurs.

Ceci termine la tâche de M. Miller. Elle se compose ainsi de huit Chapitres où l'Auteur devait tenir compte à la fois des lignes classiques et de nombre de travaux nouveaux, publiés surtout dans les Revues américaines, s'y greffant parfois de manière un peu chaotique. La fusion a été particulièrement heureuse.

*
* *

La seconde Partie, rédigée par M. H.-F. Blichfeldt, a trait aux groupes finis de transformations linéaires et homogènes. Le sujet est fort connu comme souvent exposé sans préliminaires relatifs aux groupes abstraits. La présente rédaction me paraît remarquable à deux points de vue; elle offre à la fois des exemples concrets quant aux développements théoriques de la première Partie de l'Ouvrage et, à la rigueur, elle pourrait se suffire à elle-même. Je n'insiste pas sur l'idée même de substitutions ou de groupe de substitutions linéaires; les transformations de coordonnées en offrent l'image la plus immédiate. Bien connue encore est la réduction de ces substitutions aux formes canoniques.

En général, les formes linéaires et homogènes sont complètement connues par le Tableau de leurs coefficients et, lorsqu'elles forment des groupes à symétries particulières, la chose est traduite par certains aspects et par certaines propriétés symétriques des Tableaux en question. Il semble même que ce soient ces symétries, particulièrement faciles à apercevoir dans les groupes de

substitutions linéaires, qui aient souvent donné l'idée d'en rechercher d'analogues dans des groupes plus quelconques.

Le point qui fixe d'abord l'attention d'une manière particulière consiste en l'étude des invariants hermitiens. Il s'agit de formes bilinéaires

$$J = \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} q_{kl} x_k \overline{x_l},$$

où $\overline{x}$ désigne une imaginaire conjuguée de x. De telles expressions sont réductibles à la forme canonique

$$y_1\overline{y_1} + y_2\overline{y_2} + \ldots + y_n\overline{y_n}$$

au moyen d'une certaine substitution linéaire.

D'ailleurs, le symbole imaginaire i apparaît ici, sous sa forme la plus élémentaire, dès qu'il s'agit de représentations intuitives de groupes linéaires à deux variables. Avec l'introduction des variables conjuguées et une réduction canonique convenable, on peut obtenir de nouvelles variables susceptibles de représenter des rotations ou déplacements sphériques d'où, à nouveau, l'apparition des symétries propres aux polyèdres réguliers.

Pour les groupes linéaires à trois, ..., n variables, on peut conserver, sinon ces images géométriques, du moins les procédés analytiques correspondants. D'où notamment le rôle des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Ces racines ont une somme nulle en laquelle certains ensembles de termes peuvent déjà être de somme nulle en s'exprimant tous par des puissances de l'un d'eux; c'est là un résultat élémentaire bien connu et dû à Kronecker.

L'une des plus remarquables méthodes exposées dans le présent Ouvrage se rapporte au cas où l'on peut associer à une transformation linéaire V les différentes puissances d'une transformation S, lesquelles donnent alors, pour V, des propriétés analogues à celles données par le théorème de Kronecker relatif à l'équation binome et ceci, d'ailleurs, de par l'intervention effective des racines d'une telle équation.

Dans de tels domaines les travaux de M. Camille Jordan sont particulièrement faciles à discerner; ils eurent trait d'abord à un rapport simple existant entre l'ordre d'un groupe linéaire et l'ordre d'un certain sous-groupe abélien. Des précisions ulté-

rieures furent apportées au théorème par différents géomètres, notamment par le second Auteur du Livre aujourd'hui publié.

M. Blichfeldt, dont l'extrême compétence ressort suffisamment de ce rapprochement, termine sa rédaction en revenant spécialement sur les *caractéristiques*. La notion d'*équation caractéristique* sous la forme bien connue du déterminant d'une substitution, dans la diagonale principale duquel on écrit $a_{kk} - \theta$ au lieu de a_{kk}, est aussi ancienne que la notion de substitution linéaire. Mais les *caractéristiques*, qui sont les sommes des a_{kk}, jouent un rôle beaucoup plus récent dans nombre de théorèmes déjà étudiés et dans d'autres concernant les invariants des groupes linéaires. Ces caractéristiques admettent des éléments imaginaires conjugués et forment avec eux des formes bilinéaires à valeurs remarquables. Nombre de résultats donnés à cet égard n'avaient guère été, jusqu'ici, exposés de manière didactique; je ne serai sans doute pas seul à en apprécier l'intérêt.

*
* *

La troisième Partie du Livre a été rédigée par M. L.-E. Dickson. Elle se rapporte aux applications dont les plus importantes sont relatives à la résolution des équations algébriques. N'insistons point sur la notion de domaine de rationalité, sur les théorèmes qui nous enseignent à grouper des irrationnelles par l'intermédiaire d'opérateurs rationnels; ceci est presque descendu au niveau de l'Algèbre élémentaire. Pour la résolution des équations par radicaux nous voyons d'abord quelles sont les conditions *suffisantes* pour qu'il en soit ainsi. L'équation du troisième degré se résout par l'intermédiaire d'une équation quadratique et d'une équation binome; il est possible de chercher si des équations *résolvantes* analogues existent ou n'existent pas pour une équation de degré quelconque, et c'est à quoi procède M. Dickson en conservant visiblement la forme du procédé qui réussit pour le troisième et le quatrième degré. Mais les conditions de solubilité ainsi trouvées sont-elles absolument *nécessaires?*

La question ainsi posée ramène aux idées de Galois, à la merveilleuse conception des opérateurs permutant les racines et donnant naissance au groupe de l'équation, groupe dont la constitution révèle la présence ou la non-présence des précédentes

équations résolvantes. C'est d'ailleurs ici que se placent les théorèmes capitaux de Galois, Jordan et Hölder sur la manière dont s'associent les groupes de différentes équations quand leurs racines se peuvent associer dans un même domaine de rationalité.

Ces questions théoriques primordiales étant vidées, M. Dickson passe aux applications géométriques. Il étudie les constructions possibles par la règle et le compas, question de nature quadratique bien particulière vis-à-vis des seules irrationalités algébriques de la Géométrie élémentaire. Aujourd'hui la confusion semble impossible, pour cette raison toute d'évidence et de simplicité et cependant que de cerveaux illustres elle mit à l'épreuve ! La duplication du cube, la trisection de l'angle, la division du cercle furent d'abord des énigmes puis des problèmes qui, même dans les cas possibles, semblèrent longtemps garder une allure bizarre. On peut construire des polygones réguliers de $2^s + 1$ côtés si $s = 2^t$; ceux-ci ont 3, 5, 17, 257, 65537 côtés et le simple heptagone reste hors de la liste !

Un exemple de réduction algébrique encore un peu plus savante provient de la recherche des points d'inflexion d'une cubique par l'intersection de celle-ci avec sa hessienne. Le problème est résoluble par racines carrées et cubiques et, aux décompositions possibles du groupe de l'équation aux abscisses des points d'inflexion, correspond, pour ces points, le privilège remarquable d'être en ligne droite trois à trois.

En nous élevant encore un peu, nous arrivons aux 27 droites d'une surface du troisième degré et aux 28 tangentes doubles d'une quartique. La place me manque pour insister sur les solutions de ces problèmes; ce qui est le plus particulièrement frappant, c'est qu'ils peuvent se correspondre. Nouvelle analogie clairement exprimée par les groupes des systèmes algébriques qui en sont issus. De telles méthodes peuvent d'ailleurs être étendues à la recherche des courbes algébriques à contacts multiples. Il y a là une heureuse combinaison des travaux de M. Jordan déjà exposés dans son *Traité des Substitutions* et de ceux de M. Dickson lui-même exposés dans ses *Linear Groups*. Ce dernier, en se réservant la fin du Livre aujourd'hui publié, ne s'est pas fait une part moins belle et moins intéressante.

Un dernier Chapitre sur les groupes de monodromie nous fait

passer de la haute Géométrie aux domaines élevés de la théorie des fonctions analytiques. Qu'il me suffise de dire que la permutation des valeurs d'une fonction non uniforme autour de ses points critiques devait naturellement ouvrir un nouveau champ d'applications à la théorie des substitutions. Que de liaisons merveilleuses entre théories souvent abordées dans des esprits différents! Quel incomparable et presque universel géomètre serait celui qui connaîtrait bien... les polynomes... et les théories diverses nées de ces expressions dont l'écriture première, si simple et immédiate, a cependant fait naître des problèmes millénaires! Ceux-ci, à l'heure actuelle, appellent encore bien des recherches vers lesquelles peut magistralement conduire le beau Livre dû aux admirateurs et continuateurs de M. Camille Jordan.

A. Buhl.

ANGELESCO (A.). — Sur des polynomes généralisant les polynomes de Legendre et d'Hermite et sur le calcul approché des intégrales multiples. Thèse pour obtenir le titre de Docteur ès Sciences mathématiques soutenue sous la présidence de M. P. Appell le 7 avril 1916, 1 vol. in-4, III-141 pages, Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916.

Ce travail est divisé en trois Parties dans lesquelles l'Auteur traite des questions de plus en plus générales.

Dans la première Partie, M. Angelesco étudie principalement les polynomes $P_n(x, \lambda)$ définis par le développement

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^\lambda = \Sigma \alpha^n P_n(x, \lambda).$$

Ces polynomes ont déjà été considérés (Jacobi, Gegenbauer, Darboux, etc.); ce sont des polynomes de Legendre généralisés. M. Angelesco les étudie ayant surtout en vue la préparation de l'étude des polynomes analogues à plusieurs variables. Il trouve aussi des résultats nouveaux, dont voici quelques-uns :

Les seuls polynomes de Jacobi

$$J_n(x, \lambda, \mu) = (x + 1)^{-\lambda}(x - 1)^{-\mu} \frac{d^n (x + 1)^{n+\lambda}(x - 1)^{n+\mu}}{dx^n}$$

ayant une fonction génératrice de la forme

$$[x \psi(\alpha) + \varphi(\alpha)]^\theta$$

sont les polynomes $P_n(x, \lambda)$ et $P_n(x, \lambda) + P_{n-1}(x, \lambda)$. Ce dernier polynome est un polynome de Jacobi, car

$$P_n\left(x, -\xi - \frac{1}{2}\right) + P_{n-1}\left(x, -\xi - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2^n n!} \frac{2\xi(2\xi+1)\ldots(2\xi+n-1)}{\xi(\xi+1)\ldots(\xi+n-1)} J_n(x, \xi - 1, \xi),$$

et de cette relation on déduit la formule

$$\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\operatorname{arc}\cos x\right]$$
$$= \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{3.5\ldots(2n-1)} \sqrt{1+x} \frac{d^n(1+x)^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n},$$

analogue à la formule de O. Rodrigues qui exprime $\sin(n \operatorname{arc}\cos x)$ par une différentielle d'ordre $n - 1$.

Signalons ensuite une fonction génératrice des polynomes de Jacobi sous forme d'intégrale définie; la représentation du polynome $P_n(x, \lambda)$ par une intégrale double permettant de trouver les coefficients de ce polynome toujours sous forme d'intégrale double; et, un résultat plus important, représenté par la formule

$$\frac{1}{2}[f(\varphi + 0) + f(\varphi - 0)]$$
$$= \lim_{\alpha=1} (1 - \alpha^2) \frac{\Gamma(1-\lambda)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{[\sin^2(\psi - \varphi)]^{-\lambda} d\psi}{[1 - 2\alpha\cos(\psi - \varphi) + \alpha^2]^{1-\lambda}},$$

qui généralise l'intégrale de Poisson qu'on retrouve en faisant $\lambda = 0$.

M. Angelesco étudie aussi les polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$ définis par le développement

$$[(1 - \alpha x)^2 - \alpha^2]^\lambda = \Sigma \alpha^n \Pi_n(x, \lambda).$$

Ces polynomes rentrent dans une classe générale de polynomes étudiée par M. Appell (*Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IX, p. 119-144), mais nous ne croyons pas qu'ils ont été considérés en particulier par d'autres auteurs. Les polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$ satisfont à une même équation fonctionnelle que les polynomes $P_n(x, \lambda)$; ils se rattachent de deux manières différentes, simples, aux polynomes $P_n(x, \lambda)$; le polynome $x^n \Pi_n\left(\frac{n}{x}, \lambda\right)$ se

réduit, dans un cas limite, à la fonction cylindrique

$$\left(\frac{ix}{2}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}} J^{-\lambda-\frac{1}{2}}(ix), \quad \ldots.$$

Dans la deuxième Partie de son travail, M. Angelesco généralise de diverses manières les polynomes $P_n(x, \lambda)$ et $\Pi_n(x, \lambda)$, mais son but principal est la généralisation des polynomes $P_n(x, \lambda)$ par des polynomes, à deux et à plusieurs variables, auxquels la notion de polynomes associés ou adjoints d'Hermite puisse être étendue. Il commence par le cas de deux variables et considère les polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ et $V_{m,n}(x, y, \lambda)$ définis par les développements

$$[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{\lambda} = \Sigma a^m b^n U_{m,n}(x, y, \lambda),$$

$$[1-2ax-2by+a^2+b^2]^{\lambda-\frac{1}{2}} = \Sigma a^m b^n V_{m,n}(x, y, \lambda).$$

L'Auteur forme d'abord le système de deux équations aux dérivées partielles auquel satisfait le polynome $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ et il déduit de ce système que l'on a

$$U_{m,n}(x, y, \lambda) = A(x^2+y^2-1)^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n-\lambda-\frac{1}{2}}}{dx^m\, dy^n},$$

A étant un coefficient numérique qu'il détermine. Il étend ensuite aux polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ et $V_{m,n}(x, y, \lambda)$ presque toutes les propriétés connues pour les polynomes d'Hermite $\left(\lambda = -\frac{1}{2}\right)$. Il trouve, en outre, leurs représentations par des intégrales, et, à l'aide des polynomes $\Pi_{m,n}(x, y, \lambda)$ [généralisation des polynomes $\Pi_n(x, \lambda)$], qui se rattachent aux polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ et aux polynomes $V_{m,n}(x, y, \lambda)$, il trouve une correspondance simple entre les polynomes $U_{m,n}(x, y, \lambda)$ et $V_{m,n}(x, y, \lambda)$; et d'autres propriétés encore.

M. Angelesco passe ensuite aux polynomes

$$U_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda) \quad \text{et} \quad V_{m_1,\ldots,m_s}(x_1, \ldots, x_s, \lambda)$$

à s variables qu'il a définis dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 158, 1914, p. 1770). Ces polynomes sont, par rapport aux polynomes dont M. Appell a donné la définition dans les *Comptes rendus* (t. 156, p. 1423 et p. 1582) et dont

l'étude a été faite par M. Kampé de Fériet dans sa Thèse (1915), ce que les polynomes précédents $P_n(x, \lambda)$ sont aux polynomes sphériques d'ordre supérieur. M. Angelesco les étudie au point de vue algébrique et son étude diffère essentiellement de celle de Kampé de Fériet, qui est rattachée à la théorie des potentiels. Ces derniers polynomes $U_{m_1,\ldots m_s}$ et $V_{m_1,\ldots,m_s}$ sont encore généralisés par des polynomes $\mathcal{U}_{m_1,\ldots,m_s}$ et $\mathcal{V}_{m_1,\ldots,m_s}$ que M. Angelesco a considérés dans le *Bulletin de l'Académie roumaine* (t. IV, p. 30) et dans les *Comptes rendus* (t. 161, p. 490). Dans la définition de ces polynomes il intervient une forme quadratique et sa forme adjointe. L'Auteur étend à ces polynomes presque toutes les propriétés qu'il a trouvées pour les polynomes $U_{m_1,\ldots,m_s}$ et $V_{m_1,\ldots,m_s}$. Il démontre en outre que ces polynomes se réduisent dans un cas limite aux polynomes qu'Hermite définit (voir *Œuvres de Charles Hermite*, t. II, p. 301) à l'aide des fonctions exponentielles.

Dans cette même Partie, M. Angelesco a considéré encore d'autres polynomes ; il forme plusieurs systèmes d'équations aux dérivées partielles dont on connaît des solutions ; il rencontre aussi des intégrales singulières qu'on pourrait utiliser pour la représentation des fonctions à plusieurs variables, etc.

Dans la troisième Partie, l'Auteur étudie la classe de polynomes P qui satisfont aux conditions

$$\int_{(s} K x_1^{i_1} \ldots x_s^{i_s} P\, dx_1 \ldots dx_s = 0$$

pour toutes les valeurs positives ou nulles des entiers $i_1, i_2, \ldots, i_s$ dont la somme est moindre que p, p étant le degré du polynome P en $x_1, x_2, \ldots, x_s$, l'intégration étant faite dans un domaine D, dans lequel la fonction K en $x_1, x_2, \ldots, x_s$ garde un signe constant. Il étend, pour cela, au cas de plusieurs variables, les résultats trouvés par M. Appell dans son Mémoire *Sur une classe de polynomes à deux variables et le calcul approché des intégrales doubles* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1890) et il ajoute aussi d'autres résultats.

M. Angelesco passe ensuite au calcul approché des intégrales multiples. Il montre comment on peut déterminer un polynome $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ d'un degré donné p en $x_1, \ldots, x_s$ tel que l'on ait la meilleure approximation, suivant Gauss, en calculant à la place

de l'intégrale donnée

$$I = \int_{(s)} K f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s,$$

l'intégrale

$$J = \int_{(s)} k \varphi(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s.$$

Restant dans le même ordre d'idées que M. Appell, M. Bourget a indiqué (*C. R. Acad. Sc.*, t. 126, p. 634) un résultat intéressant pour le calcul d'une intégrale double, en faisant intervenir, pour la détermination du polynome φ, dont la forme et le degré ne sont plus fixés d'avance, les points de rencontre des courbes $U_{m,0} = 0$ et $U_{0,m} = 0$, $U_{m,n}$ étant les polynomes d'Hermite. Seulement M. Bourget ne précise rien sur la formation de ce polynome φ.

M. Angelesco se pose le même problème que M. Bourget, mais d'une manière tout à fait générale ; il montre comment, à l'aide des polynomes de la classe précédente, on pourrait déterminer un polynome φ, *si certaines conditions*, qu'il précise, *sont satisfaites*. Il montre, sur un exemple, que, pour diverses formes du polynome φ, on peut atteindre la même approximation, et, de plus, que, par cette méthode, on peut aussi atteindre le maximum de l'approximation voulue, c'est-à-dire qu'on peut obtenir la solution d'un système formé par un même nombre d'équations de conditions que d'inconnues. *La R.*

MIELI (Aldo). — Storia generale del Pensiero scientifico dalle origini a tutto il Secolo xviii. *Le Scuole Ionica, Pythagorica ed Eleata* (*I Prearistotelici*. I). 1 vol. in-8, xvi-504 pages. Firenze, Libreria della Voce, 1916.

Si Dieu donne, à M. Aldo Mieli, le temps de mener à bien l'œuvre qu'il entreprend, il élèvera le monument le plus considérable de l'Histoire des Sciences. Des origines de la philosophie grecque à la fin du xviiie siècle, retracer l'évolution des doctrines mathématiques et naturelles; à ce récit, joindre un choix abondant de documents qui mette le lecteur en communion directe avec les inventeurs, telle est l'intention de M. Mieli. Des Volumes, assurément fort nombreux, qui seront nécessaires pour réaliser cette intention, le premier est sous nos yeux.

Pour assister à la naissance de la pensée scientifique au sein de laquelle nous vivons, il faut se faire le familier des sages qui furent, avant le temps d'Aristote, l'honneur de l'Hellade. C'est à quoi M. Mieli songe tout d'abord; c'est par l'étude des Pré-aristotéliciens qu'il commence.

Cette étude, il la subdivise en dix grands Chapitres qu'il intitule ainsi :

I. L'École d'Ionie.

II. L'École pythagoricienne.

III. L'École d'Élée; Héraclite.

IV. Caractère du développement de la Science grecque dans les deux premiers siècles; Empédocle et Anaxagore.

V. Les médecins et le recueil des écrits hippocratiques.

VI. Les Atomistes.

VII. Le développement de la Mathématique avant Euclide.

VIII. Le développement de l'Astronomie avant Aristote; le calendrier; la chronologie.

IX. Les Sophistes de la science de l'esprit.

X. Platon et sa place dans le développement de la pensée scientifique.

De ce programme les trois premières parties suffisent à remplir le Volume déjà paru. M. Mieli, en effet, s'est trop soucié d'être utile pour pouvoir être bref. Tout texte auquel son exposition fait allusion se trouve, *in extenso* et dans la langue originale, reproduit au bas de la page. Sans doute, cette méthode gonfle l'Ouvrage; mais comme elle est commode pour le lecteur, pour l'étudiant! Celui qui voudra discuter quelqu'une des vues de l'Auteur n'aura que faire de rechercher des documents; il les trouvera tout rassemblés et mis en ordre; c'est une bibliothèque, et une bibliothèque merveilleusement classée, que remplacent les notes de M. Mieli.

N'épuisons pas, cependant, notre admiration pour les notes; car la bibliographie n'en mérite pas moins. Dire qu'elle est d'une surprenante abondance ne suffirait pas à en faire l'éloge; tant d'auteurs déroulent des listes interminables d'ouvrages, de mémoires, de notes, qu'ils n'ont jamais lus et qu'ils citent de seconde main! M. Mieli a lu les écrits dont il parle; toutes les fois qu'ils sont

d'une étendue suffisante ou que le titre n'en indique pas le contenu avec entière précision, il en donne une courte analyse; souvent, cette analyse s'accompagne d'une brève appréciation. Rédigée avec une pareille minutie et une telle conscience, la bibliographie de M. Mieli rendra aux travailleurs les plus grands services.

Un tel Livre ne saurait, bien entendu, se résumer en quelques pages. Bornons-nous à dire très sommairement quels sont, dans ce premier Volume, les passages qui retiendront surtout l'attention du mathématicien, curieux de connaître l'histoire de sa science.

Le géomètre s'arrêtera, tout d'abord, à Thalès; il verra quels sont les titres du sage de Milet à sa reconnaissance, comment il importa en Grèce l'art de prédire les éclipses, quels sont les théorèmes de Géométrie dont la découverte lui peut être attribuée.

Les découvertes faites dans le domaine des Mathématiques pures ou appliquées par l'École pythagoricienne sont l'objet d'une étude très étendue; là se trouvent réunis tous les documents qui nous renseignent sur la science de cette mystérieuse école; une soigneuse discussion, que le bon sens dirige et ne laisse pas dégénérer en systématique chicane, détermine le degré de créance qu'il convient d'accorder à chacun de ces documents. Elle est parfois bien sujette à caution, cette créance! On n'hésite pas, par exemple, à déclarer, dans tous les traités élémentaires, que les lois des cordes vibrantes ont été découvertes par Pythagore; or pour nous en assurer, les auteurs les plus anciens que nous trouvions sont Nicomaque, Jamblique et Boëce; de Pythagore à Nicomaque bien des légendes ont eu le temps de germer et de croître!

Les systèmes astronomiques des Pythagoriciens et, particulièrement, celui de Philolaüs retiennent longuement M. Aldo Mieli; ils le méritent, puisqu'ils ont préparé la voie à Copernic; aussi ont-ils fait l'objet de très nombreux travaux dont l'analyse et la discussion sont du plus grand intérêt.

Avant de clore cette Analyse trop sommaire, n'oublions pas d'avertir les lecteurs du *Bulletin* que, en feuilletant le Livre de M. Mieli, ils rencontreront souvent un nom cher à leur souvenir; l'œuvre accomplie par Paul Tannery sur les origines de la Science grecque leur apparaîtra dans toute son ampleur.

PIERRE DUHEM.

TEIXEIRA (F. Gomes). — Sur les Problèmes célèbres de la Géométrie élémentaire non résolubles avec la règle et le compas. In-4, 132 pages. Coïmbre, imprimerie de l'Université, 1915.

M. Gomes Teixeira, qui est bien connu du public mathématique français, tout particulièrement par son *Traité des courbes*, était tout désigné, par ses travaux antérieurs, pour écrire le Livre intéressant qu'il vient de publier.

Parmi les problèmes célèbres de la Géométrie élémentaire, il en est trois qui, de tout temps, ont attiré l'attention des géomètres. Ce sont: la duplication du cube, la trisection de l'angle, la quadrature du cercle. Les géomètres qui se sont occupés de ces problèmes ne pouvant les résoudre à l'aide de la règle et du compas, c'est-à-dire au moyen du tracé de droites et de cercles, ont considéré comme impossible une solution de cette nature et ont employé, pour les résoudre, d'autres lignes. C'est là où l'ingéniosité de chacun a pu se donner libre cours.

M. Gomes Teixeira a tout d'abord cherché, sur chaque problème, à rassembler toutes les solutions proposées. C'était là un travail utile pour fixer, sur bien des points, l'histoire des Mathématiques, mais non dépourvu de difficultés. Les géomètres de l'ancienne Grèce se sont occupés de ces problèmes et l'Auteur a dû chercher, dans ce qui nous est parvenu de leurs œuvres, quelle avait été la contribution de chacun d'eux. Deux Ouvrages : les *Archimedis opera* d'Eutocius et les *Commentaires mathématiques* de Pappus, lui ont été d'un secours particulièrement précieux. Puis, pour les géomètres d'après la Renaissance, la *Géométrie* de Descartes, l'*Arithmetica Universalis* de Newton et les *Œuvres* de Huygens ont été ses sources fondamentales. Sa documentation historique est de tout premier ordre et, de plus, considérable. Ses sources de renseignements sont nettement citées, contrôlées et donnent au lecteur la plus grande confiance.

Pappus, dans le Livre IV des *Collections mathématiques*, a divisé les problèmes de la Géométrie en trois classes : 1° les *problèmes plans*, c'est-à-dire ceux qu'on peut résoudre à l'aide de la règle et du compas; 2° les *problèmes solides*, c'est-à-dire ceux qu'on peut résoudre au moyen des sections coniques; 3° les *problèmes linéaires*, c'est-à-dire ceux dont la solution dépend

d'autres courbes. Ce géomètre considérait comme une faute l'emploi de lignes différentes de la droite et du cercle dans les problèmes de la première classe ainsi que l'emploi de courbes différentes des coniques dans les problèmes de la seconde. La duplication du cube, cas particulier du problème des n moyennes, la trisection de l'angle n'appartiennent pas à la première classe, mais à la seconde. Dans sa Géométrie, Descartes partage les idées de Pappus, et c'est sa méthode de résolution graphique des équations du troisième et du quatrième degré à l'aide d'une parabole et d'un cercle qu'il applique au problème des deux moyennes et de la trisection de l'angle. Il y énonce de plus que la parabole peut être remplacée par une conique quelconque arbitrairement donnée. Enfin il démontre que la solution d'un problème quelconque dépendant d'une équation du troisième degré peut être réduite à celle du problème des deux moyennes ou à celle du problème de la trisection de l'angle. Ces résultats ont été repris par plusieurs mathématiciens et tout particulièrement par Newton dans la dernière partie de son *Arithmetica Universalis*. Mais le grand géomètre pense au contraire que, dans le choix de la courbe employée pour résoudre un problème géométrique, on ne doit pas tenir compte de la simplicité de son équation, mais de la facilité de sa construction. Ce fut là aussi, je crois, la pensée de l'Auteur dans l'exposition qu'il a faite des diverses méthodes et constructions de *trisectrices* et de *quadratrices*. Son rôle ne s'est pas limité à des recherches bibliographiques et historiques. Il a suivi sensiblement l'ordre chronologique, montré les points communs des différentes solutions et, se servant des procédés de la Géométrie analytique, expliqué simplement les constructions proposées. Il a toujours respecté la pensée du géomètre qu'il étudiait, mais ne s'est pas gêné, et cela avec raison, pour donner à sa solution une forme plus directe et plus élégante et au besoin la généraliser. Ce qu'il y a d'agréable dans la lecture un peu fastidieuse de toutes ces solutions, c'est la clarté, la précision et la simplicité que l'Auteur a su y mettre.

Dans un dernier Chapitre qui est la conclusion de cet Ouvrage, M. Teixeira étudie l'impossibilité de la résolution, par la règle et le compas, des problèmes considérés. Cette question, abordée par Descartes dans sa *Géométrie*, n'a été complètement résolue qu'au

XIXᵉ siècle, après les recherches de Gauss et d'Abel sur la résolution des équations algébriques au moyen de radicaux. Suivant la méthode de Petersen, il montre que c'est une condition nécessaire, pour qu'une équation algébrique irréductible dans un domaine de rationalité soit résoluble par des opérations rationnelles et des extractions de racines carrées, exécutées sur des nombres du domaine de rationalité ou sur des résultats des opérations antérieures, que le degré de l'équation soit égal à une puissance de 2. En passant au domaine de la Géométrie, il en déduit la condition de résolution d'un problème à l'aide de la règle et du compas. Les applications aux problèmes des moyennes, de la division de l'angle et de la division de la circonférence en parties égales sont alors immédiates. Enfin, étudiant tout particulièrement l'impossibilité de la quadrature du cercle, il reproduit, tout en la simplifiant, la démonstration de Gordan sur la transcendance du nombre π.

EDMOND OUIVET.

MÉLANGES.

SUR LES VOLUMES DUS A LA ROTATION D'UN CONTOUR;

PAR M. A. BUHL.

(*Seconde Note.*)

1. Dans la Note publiée dans ce *Bulletin*, en août 1915, je rappelais incidemment un théorème de M. G. Kœnigs concernant le volume engendré par une aire plane tournant autour d'un axe de position quelconque par rapport au plan de cette aire. J'expose, dans ce qui suit, des résultats analogues et aussi généraux pour le as où la cloison en rotation appartient à une surface qui est du econd degré au lieu d'être du premier.

Une cloison située sur une quadrique et sa projection sur un plan principal donnent, en tournant autour d'un axe principal situé dans le plan principal considéré, des volumes de révolution de rapport constant.

C'est là un théorème absolument analogue à celui qui concerne la projection des aires planes. Et quand, pour une même cloison, on connaît les volumes tournants relatifs à trois axes rectangulaires, on obtient aisément le volume tournant relatif à un axe quelconque.

D'ailleurs, au delà de la cloison du second degré, il y a certainement des résultats géométriques spécialement élégants pour les volumes tournants engendrés par des cloisons algébriques ou, pour mieux dire, par des contours fermés tracés sur des surfaces algébriques. Le lecteur intéressé par de telles considérations est prié de se reporter à une Note *Sur les applications géométriques du théorème d'Abel et de la formule de Stokes* insérée aux *Comptes rendus* du 27 mars 1916 ainsi qu'à mon quatrième Mémoire *Sur les transformations et extensions de la formule de Stokes* publié aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1914).

2. Dans ma précédente Note, j'ai considéré une cloison σ tournant autour d'un axe quelconque déterminé par l'un de ses points (a, b, c) et par ses cosinus directeurs λ, μ, ν.

Le volume tournant ainsi engendré était exprimé par

$$(1) \qquad V = 2\pi \int\int_\sigma \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} d\sigma.$$

Supposons que la cloison σ soit prise sur la surface d'équation

$$(2) \qquad z^2 = \varkappa y^2 + 2\varphi(x),$$

où $\varkappa$ est un coefficient constant quelconque et où $\varphi(x)$ est une fonction arbitraire de x seulement. Si p et q désignent, conformément à l'usage, les dérivées partielles de z, on a

$$\alpha\, d\sigma = -p\, dx\, dy, \qquad \beta\, d\sigma = -q\, dx\, dy, \qquad \gamma\, d\sigma = dx\, dy,$$
$$pz = \varphi'(x), \qquad qz = \varkappa y.$$

Admettons que l'axe de rotation soit Ox, d'où a, b, c, μ, ν sont nuls et λ égal à l'unité. La formule (1) donne alors, après des réductions immédiates,

$$V_x = 2\pi(\varkappa + 1)\int\int_\sigma y\,dx\,dy. \tag{3}$$

Désignons par A_z la projection de la cloison σ faite sur Oxy parallèlement à l'axe des z. Soit, de plus, A_{zx} le volume engendré par l'aire plane A_z tournant autour de Ox. L'intégrale double qui figure dans (3), affectée du coefficient 2π, n'est autre que A_{zx}; donc

$$V_x = (\varkappa + 1)\,A_{zx}. \tag{4}$$

Un contour quelconque, tracé sur une surface (2), *et sa projection sur* Oxy *engendrent, en tournant autour de* Ox, *des volumes dont le rapport est constant.*

3. Les surfaces les plus simples contenues dans l'équation (2) sont évidemment du second degré. Les plus symétriques sont les quadriques à centre

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1 \tag{5}$$

pour lesquelles la formule (4) et des permutations convenables donnent

$$\left\{\begin{aligned} V_x &= \left(1 - \frac{B}{C}\right)A_{zx} = \left(\frac{C}{B} - 1\right)A_{yx},\\ V_y &= \left(1 - \frac{C}{A}\right)A_{xy} = \left(\frac{A}{C} - 1\right)A_{zy},\\ V_z &= \left(1 - \frac{A}{B}\right)A_{yz} = \left(\frac{B}{A} - 1\right)A_{xz}.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Remarquons que certains de ces volumes tournants doivent être considérés comme négatifs.

Ainsi, supposons que (5) soit un ellipsoïde qui, conformément aux habitudes, aura son plus grand et son plus petit axe respectivement dirigés sur Ox et Oz. Alors $A < B < C$ et, dans ces conditions, V_y est négatif. D'ailleurs, de tels résultats sont parfaitement naturels en vertu de la continuité. Ainsi V_x est positif si $B < C$, mais si $B = C$ V_x devient nul. L'ellipsoïde est alors de

révolution autour de Ox et la cloison ellipsoïdale, en tournant autour de Ox, ne fait que glisser sur la surface et n'engendre aucun volume. Si $B > C$, il est tout indiqué de considérer comme négatif le volume qui vient de passer par zéro pour $B = C$.

Connaissant V_x, V_y, V_z on en déduira, d'après ce qui a été rappelé dans la précédente Note,

$$(7) \qquad \lambda V_x + \mu V_y + \nu V_z$$

pour le volume engendré par une cloison détachée de la quadrique (5) et tournant autour d'un axe quelconque passant par O. On passera aisément de là à l'axe tout à fait quelconque.

4. Les formules (6) semblent contenir diverses comparaisons intéressantes. Ainsi, des égalités relatives à V_x, on conclut immédiatement

$$BA_{zx} = CA_{yx}.$$

Une cloison, prise sur la quadrique (5), *donne, par projection sur les plans* Oxy *et* Oxz, *des aires planes* A_z *et* A_y *lesquelles, en tournant autour de* Ox, *engendrent des volumes dont le rapport est constant.*

Si l'on avait $B = C$, la quadrique serait de révolution autour de Ox et les aires planes A_z et A_y engendreraient des volumes égaux ; ceci serait conforme au théorème du dièdre donné au paragraphe 7 de ma précédente Note. On voit que ce théorème est susceptible d'être généralisé de manière très simple.

5. Pour être complet, il faut montrer que les résultats précédents ont leurs analogues sur les quadriques dont le centre est à l'infini. Soit le paraboloïde

$$(8) \qquad \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{b} = 2x.$$

C'est évidemment une surface du type (2) et, si l'axe de rotation est Ox, il n'y a besoin d'aucun raisonnement nouveau. On a

$$V_x = \left(1 - \frac{b}{a}\right) A_{zx} = \left(\frac{a}{b} - 1\right) A_{yx}.$$

Si l'axe de rotation est Oz, la formule (1) donne

$$V_z = 2\pi \int\int_\sigma (\beta x - \alpha y)\, d\sigma = 2\pi \int\int_\sigma \left(x + y\,\frac{\partial y}{\partial x}\right) dx\, dz.$$

De l'équation du paraboloïde on tire immédiatement

$$y\,\frac{\partial y}{\partial x} = a,$$

d'où finalement

(9) $$V_z = A_{yz} + 2\pi a A_y.$$

Si a était nul le paraboloïde (8) serait confondu avec le plan $y = 0$ et il est clair que, dans ce cas, on aurait $V_z = A_{yz}$.

Pour V_y la formule (1) donne

$$V_y = 2\pi \int\int_\sigma (\alpha z - \gamma x)\, d\sigma = -2\pi \int\int_\sigma (x + zp)\, dx\, dy$$

et, comme l'équation (8) donne $zp = b$, on a

(10) $$V_y = -A_{zy} - 2\pi b A_z.$$

Les expressions trouvées pour V_x, V_y, V_z montrent suffisamment qu'il y a lieu d'attribuer des signes à ces volumes.

Pour V_x le résultat déjà indiqué est analogue à celui obtenu pour la quadrique centrée. Je laisse au lecteur le soin de traduire les théorèmes (9) et (10) en langage ordinaire.

On est à même maintenant de former (7) et d'exprimer simplement le volume engendré par une cloison paraboloïdale tournant autour d'un axe absolument quelconque.

6. Sans avoir rien d'essentiel à ajouter, il importe beaucoup de remarquer l'extrême analogie de ce qui précède avec le théorème concernant la projection des aires planes. Revoyons d'abord ce dernier sous un jour convenable.

Une aire plane P projetée sur un plan Π est multipliée par une constante qui est le cosinus de l'angle de projection. Le théorème se conserve si l'aire à projeter, au lieu d'être plane, est prise sur une surface dont le plan tangent fait un angle constant avec le plan de projection ; un exemple particulièrement simple de telles surfaces

est fourni par le cône de révolution dont l'axe est normal à Π. Cette première extension se rencontre déjà, en 1696, chez Jacques Bernoulli et, en 1699, chez le religieux Urbain Grandi qui fait ainsi la quadrature d'une certaine cloison conique qu'il appelle *voile du Camaldule* (F. Frenet, *Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal*, 5e édition, 1891, p. 337). Elle intervient dans de savants Mémoires modernes, notamment dans celui de M. G. Humbert, *Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie* (*Journal de Mathématiques*, 1890). L'éminent géomètre veut généraliser, pour l'ellipsoïde, le théorème de Graves, c'est-à-dire circonscrire à la quadrique un cône de révolution et obtenir la différence d'aires existant entre la nappe conique et la cloison ellipsoïdale déterminées par l'ellipse de contact. Il obtient d'abord l'aire conique par le procédé de Bernoulli et Grandi. Mais le procédé mérite surtout d'être retenu au point de vue élémentaire; il figure ainsi dans l'excellent *Manuel de Géométrie* de F. G.-M. (1913, p. 482). Quant aux surfaces plus générales, dont le plan tangent a une pente constante sur le plan Oxy pris pour plan Π, on peut les définir par l'équation aux dérivées partielles

$$(11) \qquad p^2 + q^2 = \text{const.}$$

qui donne les hélicoïdes développables dont les hélices arêtes de rebroussement ont des tangentes faisant un angle constant avec Π.

Revenons maintenant à la quadrique (5). Elle a exactement le même degré de généralité qu'un plan P quelconque d'équation

$$Ax + By + Cz = 1.$$

Une cloison prise dans P et sa projection sur Oxy ont des aires en rapport constant; une cloison prise sur (5) et sa projection sur Oxy ont, par rapport à l'axe de rotation Ox, des volumes tournant dans le rapport constant de C — B à C.

De même qu'en un point d'une surface quelconque on imagine un plan P tangent, on peut imaginer une quadrique (5) tangente; elle a pour équation

$$(12) \qquad \frac{p}{x}X^2 + \frac{q}{y}Y^2 - \frac{1}{z}Z^2 = px + qy - z.$$

Or le raisonnement qui étend le théorème de la projection des

aires planes au cas des hélicoïdes porte maintenant à rechercher des surfaces ayant en chaque point une quadrique tangente (12) pour laquelle

$$\frac{qz}{y} = \text{const.} = \varkappa,$$

car le théorème établi pour la quadrique (5) serait vrai pour chaque élément d'aire de ces surfaces et, par suite, il serait vrai pour une cloison quelconque qu'on pourrait y découper. Or l'équation aux dérivées partielles finalement obtenue est d'une intégration immédiate, beaucoup plus immédiate même que l'intégration de (11); elle conduit aux surfaces (2).

J'ai cru devoir revenir ainsi à ces surfaces (2) non seulement pour signaler les analogies avec les projections d'aires mais aussi parce que, pour les volumes tournants, je n'avais obtenu d'abord que le théorème relatif aux quadriques (5) d'où j'étais passé aux surfaces (2) par le dernier raisonnement qui vient d'être exposé.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Enriques (Federigo). — *Questioni riguardanti le Matematiche elementari* raccolte et coordinate da F. Enriques. Volume I : *Critica dei principii*. 1 vol. gr. in-8, vi-64 pages (L. 20). Volume II : *Problemi classici della Geometria : Numeri primi e Analisi indeterminata. Massimi e Minimi*. 1 vol. gr. in-8, vi-811 pages (L. 30). Bologna, Nicolà Zanichelli, 1912 et 1914.

Fabry (E.). — *Problèmes de Mécanique rationnelle*, à l'usage des candidats aux certificats de Licence et à l'Agrégation. 1 vol. gr. in-8, iv-427 pages. Paris, A. Hermann et Fils, 1915. 12 fr.

Maillet (Edmond). — *Cours de Mécanique professé à l'École des Ponts et Chaussées. Mécanique pure et Mécanique appliquée*. 1 vol. gr. in-8, iv-376 pages. Paris, A. Hermann et Fils, 1916. 10 fr.

Pincherle (Salvatore). — *Lezioni di Calcolo infinitesimale* dettate nella R. Università di Bologna e redatte per uso degli studenti. 1 vol. gr. in-8, xv-774 pages. Bologna, Nicolà Zanichelli, 1915. L. 25.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DUHEM (P.). — Le Système du Monde. Histoire des doctrines cosmologiques de Platon a Copernic. Tome III, 1 vol. gr. in-8, 549 pages. Paris, A. Hermann, 1915.

On pouvait craindre, non sans de fortes raisons, que la guerre qui trouble si profondément toute l'Europe allait interrompre, avec tant d'autres entreprises purement scientifiques, la publication du grand Ouvrage de M. Duhem; au contraire, deux années après la publication du Tome I [1] et une année après celle du Tome II [2], nous eûmes l'agréable surprise de recevoir le Tome III, aussi beau, non moins intéressant et, si cela est possible, encore plus documenté que les précédents.

Si un lecteur prétendait trouver dans ce Volume la révélation de découvertes astronomiques ou d'autre genre faites au cours du Moyen Age, s'il espérait trouver une idée tout à fait originale, une méthode de calcul nouvelle, ou même une seule observation échappée aux prédécesseurs, il serait sans doute déçu; mais si ses aspirations se bornent à être instruit sur les thèmes qui étaient alors à l'ordre du jour parmi les savants, s'il désire connaître le niveau atteint alors par la culture et les erreurs qui ont marqué autant d'étapes dans le chemin long, difficile, glorieux qui mène de l'ignorance à la vérité, de l'obscurité à la lumière [3], la lecture du Volume en question finie, il devra reconnaître que le temps et la peine employés n'ont pas été perdus. J'ajoute que, telle est l'ampleur de l'interprétation que M. Duhem a donnée au sujet qu'il a choisi, que les historiens de l'Astronomie, de la Philo-

---

(1) Voir ce *Bulletin*, t. XXXVIII de la 2e série, 1re Partie, 1914, p. 193.

(2) *Ibid.*, t. XXXIX, 1915, 1re Partie, p. 5.

(3) Pour ceux qui s'intéressent à la Méthodologie de l'Histoire des Sciences, je crois bon de remarquer que M. Duhem montre par ses procédés qu'il pense que, dans les recherches sur l'évolution de la pensée, une place doit être réservée aux erreurs, lorsqu'elles ont préparé la découverte de la vérité, et une aux travaux médiocres ou insignifiants, lorsqu'ils ont servi à orienter les savants dans une certaine direction.

sophie, de la Physique et de la Théologie trouveront de quoi les intéresser. En outre, M. Duhem n'a pas été rebuté par l'examen d'arides compilations dues à des écrivains dépourvus de toute originalité, et il a eu l'art d'en extraire ce qui est bon ou tout au moins capable de projeter quelque lumière sur l'état de la civilisation au Moyen Age, à tel point que l'ennui, qui sans doute se sera souvent emparé de lui, est totalement épargné au lecteur.

Les six longs Chapitres dont est formé ce Tome III appartiennent encore à la deuxième Partie (*L'Astronomie latine au Moyen Age*), dont un Chapitre (consacré à la *Cosmologie des Pères de l'Église*) se lit à la fin du précédent. Nous ignorons si de la sorte cette deuxième Partie est finie, car l'Auteur ne fait à cet égard aucune déclaration; nous nous bornerons, en conséquence, à analyser ces Chapitres, en remarquant d'abord et en général que, pour chaque savant qu'il rencontre, M. Duhem se pose cette question : *Quels sont les auteurs que ce savant a lus?*, question importante et souvent très épineuse, car certains ouvrages *cités* n'ont pas été *lus* et peut-être *vice versa;* et comme cette méthode est toujours suivie, on arrive enfin à connaître aussi *ceux qui ont lu ce savant :* excellente méthode de recherches sur le développement de la pensée, que M. Duhem applique depuis longtemps avec succès, comme sait très bien quiconque connaît les Volumes qu'il a consacrés à Léonard de Vinci.

L'initiation des Barbares (pour employer les mots mêmes qui forment le titre du Chapitre II de la deuxième Partie de l'Ouvrage de M. Duhem) commence par saint Isidore de Séville (mort en 636), qui, le premier, s'efforça de satisfaire ce désir de savoir qui était intense chez les peuples jeunes qui envahirent l'Empire romain et en déterminèrent la dissolution. Ses Ouvrages (*Les Étymologies* et *Les Origines*) ne sont que de simples compilations, basées sur une information scientifique bien pauvre ([1]) fournie par saint Ambroise, Hygin et Suéton. Toutefois, comme en Isidore le désir de connaître les phénomènes de la Terre et du Ciel

---

([1]) Pour donner une preuve de ce jugement, nous remarquerons qu'Isidore identifie Ptolémée l'Astronome avec un Ptolémée roi d'Égypte.

est une curiosité légitime (circonstance qu'il est bon de remarquer, car, au contraire, pour les Pères de l'Église les recherches de Physique et d'Astronomie ne représentaient en général que des occupations oiseuses et futiles), il a joué dans l'Histoire de la Science un rôle dont l'importance ne saurait être niée. On peut dire que le premier âge de la Science des Barbares eut un seul représentant, c'est-à-dire Isidore de Séville. Le second âge est celui où vécurent des savants qui se renseignèrent, à la fois, auprès d'Isidore et de Pline l'Ancien. Le vénérable Bède, fameux prêtre anglais (672-735), est le plus éminent d'entre eux; car son Traité *De temporum ratione*, renfermant des résultats d'observations personnelles, ne peut ni ne doit être considéré que comme une pure et simple compilation d'écrits antérieurs. Les mêmes éloges ne méritent certainement pas les Ouvrages de Rhaban Maur (776-856), évêque de Mayence, dont on cite très souvent une indigeste compilation, formée avec des matériaux tous dus à Isidore de Séville, qui commence par Dieu et la Sainte Trinité et finit par l'Art culinaire. Maur est donc un élève d'Isidore. La même chose peut se répéter à l'égard de l'auteur (saint Anselme? Honoré le Solitaire? ou bien Honoré le Scolastique?) du Traité *De imagine mundi*, qui remonte à la première moitié du XIIe siècle et qui est un résumé de connaissances cosmographiques, géographiques et astronomiques que les chrétiens occidentaux avaient pu acquérir en lisant Isidore et Pline l'Ancien.

C'est à peu près le niveau atteint, non seulement par Bède le Vénérable, dont nous avons déjà parlé, mais encore par saint Jean de Damas, qui, vers l'an 750, écrivit en grec une *Exposition détaillée de la foi orthodoxe,* Ouvrage auquel M. Duhem croit nécessaire de consacrer quelques pages, en considérant que, lorsque au temps du pape Eugène III (1145-1153) il fut traduit en latin, on le considéra tout de suite comme un travail d'une grande autorité. Une considération du même genre le fait s'arrêter sur le *Livre des Sentences* de Pierre Lombard (1100-1164), archevêque de Paris depuis 1164, car il s'agit d'un Ouvrage qui, quoique doué d'une importance que M. Duhem déclare très minime, fut le sujet d'innombrables commentaires et assura pendant tout le Moyen Age la plus grande célébrité au « Maître des Sentences ». Pierre Lombard est le dernier des personnages que

M. Duhem considère comme ayant opéré l'initiation des Barbares aux mystères de la Science.

Le Chapitre suivant a un sujet plus étroitement astronomique : *Le système d'Héraclide au Moyen Age*. Son but (il est à peine nécessaire de le déclarer) est de faire connaître quel accueil reçut au Moyen Age l'idée de faire circuler Mercure et Vénus autour du Soleil. Il commence par un exposé de ce que Chalcidius, Macrobe et Martianus Capella enseignaient touchant les mouvements de ces astres; cet enseignement séduisit Jean Scot Erigène, « Michele Scotto..., che veramente Delle magiche frode seppe il gioco » (Dante, *Enfer*, chant xix, 116-7), célèbre moine dont notre historien examine avec soin la Physique et l'Astronomie; de la sorte, il se procura les éléments nécessaires pour prouver que Scot Erigène alla plus loin qu'Héraclide, car il fit circuler autour du Soleil, non seulement Mercure et Vénus, mais encore Mars et Jupiter; s'il n'en eût excepté Saturne, il eût été le vrai précurseur de Tycho Brahé.

L'étude de la fortune de Macrobe dans les écoles médiévales fournit l'occasion à M. Duhem de parler de Gerbert (930-1003), l'éminent savant français qui devint pape sous le nom de Sylvestre II, et de faire connaître quelques autres savants prêtres, tels que le moine allemand Manégold (né vers 1060, mort après 1103), le bénédictin Helpéric qui vécut entre 980 et 1080 à qui on doit un travail sur le Calendrier qui devint classique) et l'auteur anonyme d'un Traité qu'on trouve en général parmi les *Œuvres de Bède*. Une place particulière doit être accordée à Guillaume de Conches (né en 1080 près d'Évreux, mort en 1150 ou en 1154) non seulement parce que ses écrits prouvent (par les citations qu'on y trouve) que la bibliothèque des Scoliastes s'était alors enrichie de quelques auteurs romains et arabes, mais à cause de la remarquable indépendance de jugement manifestée par leur auteur, qui soutient, contre tous ceux qui veulent croire sans comprendre, le droit d'interpréter l'Écriture par des explications naturelles; « nous prétendons, disait-il, qu'en toute chose nous devons chercher la raison », déclaration bien remarquable dans la bouche d'un homme qui vivait il y a environ huit siècles.

M. Duhem fait ensuite une digression sur un thème dont il

s'était occupé dans le Tome précédent de son Ouvrage, c'est-à-dire de la *Théorie des Marées*, qu'il suit dans les écrivains du XII[e] siècle, où il remarque l'influence de Paul Diacre (720-778); et il finit par la remarque suivante : « Dans la lutte entre la théorie astrologique des marées et les théories de Macrobe et de Paul Diacre, nous pouvons reconnaître une première forme d'un combat qui se poursuivra, entre ceux qui tentent d'expliquer ce phénomène, jusqu'au temps de Newton : d'une part se tiendront ceux qui, plus ou moins teintés d'Astrologie, demandent à l'influence des astres de rendre compte du flux et du reflux de l'Océan; d'autre part se tiendront ceux qui rejettent ces influences astrologiques et occultes et qui ne veulent recourir qu'à des causes mécaniques prises ici-bas. Ceux-ci, parmi lesquels se rangera Galilée, seront assurément les plus sensés; et ce sont ceux-là, cependant, qui s'approcheront davantage de la véritable explication. »

Encore une fois, il revient à l'hypothèse astronomique d'Héraclide pour la poursuivre à travers les XIII[e], XIV[e] et XV[e] siècles, en examinant les opinions de l'astrologue Baudoin de Courtenay (1217-1271), de Pierre d'Abano, de Jean-Pic de la Mirandole et de Marsil Ficin, en faisant sur ce dernier la remarque suivante : « Tout en admettant l'Astronomie des épicycles, Marsil Ficin semble s'être complu à rechercher tout ce qui pouvait rappeler à cette Astronomie ses origines héliocentriques; n'était-ce pas, d'une manière efficace, préparer les esprits à la révolution que Copernic allait bientôt accomplir? »

Qu'il nous soit permis de remarquer que M. Duhem donne sur Pierre d'Abano des renseignements un peu trop vagues et incertains [ce singulier savant est né vers l'an 1250 et est mort en 1315 ou 1316; il a joué un rôle scientifique et social que plusieurs érudits italiens ont placé dans tout le jour désirable (¹)]; en revanche il publie pour la première fois des extraits de son *Lucidator astrologiæ*, dont une fort mauvaise copie se trouve dans la Bibliothèque nationale de Paris.

Dans le Chapitre suivant, M. Duhem étudie *Le tribut donné*

(¹) *Voir*, en particulier, la savante monographie : SANTE FERRARI, *I tempi, la vita, le dottrine di Pietro d'Abano, Saggio storico filosofico* (*Atti della R. Università di Genova*, t. XIV, 1900, p. 490).

par les Arabes aux Sciences positives *avant le* XIII*e* *siècle*. Il remarque tout d'abord que les premières infiltrations de la science arabe dans la science latine sont très anciennes, car il est fort probable que, avant l'an mille, les Écoles de France possédaient déjà des livres traduits de ceux qu'avaient composés les savants sarrasins et dont plusieurs concernaient l'Astronomie pratique. En outre, l'influence des Arabes est évidente dans le *Liber de Astrolabie*, de Gerbert, par lequel l'illustre auteur a vraiment joué le rôle d'initiateur. Toutefois, c'est seulement au premier tiers du XIIe siècle que les écrits physiques d'Aristote et de ses disciples commencèrent de passer de l'arabe en latin; ces premières traductions furent l'œuvre d'un collège d'interprètes établi à Tolède, d'après l'initiative de don Raymond (archevêque de cette ville pendant les années 1130-1150); elles livrèrent passage aux trois grandes influences qui sollicitèrent la Scolastique latine, c'est-à-dire les doctrines du Péripatétisme, la métaphysique d'Avicenne et les doctrines du néo-platonisme hellénique.

Les premières traces de la physique péripatéticienne dans la Scolastique latine sont visibles dans l'*Opusculum de opere sex dierum*, de Thierry (né à Chartres, mort à Paris avant 1155), penseur remarquable par un rationalisme audacieux qui n'est dépassé pas même par Descartes ni par Laplace : seul Kant a eu le courage de réduire le rôle du Créateur au degré où Thierry le ramène !

On rencontre après Gilbert de la Perrée (1070 ou 1076-1154), médiocre auteur d'un *Liber sex principiorum*, sur lequel M. Duhem s'arrête très peu, hâté par le désir de signaler un fait de la plus grande importance, c'est-à-dire l'introduction, au cours du XIIe siècle, de l'Astronomie de Ptolomée en la Scolastique latine; c'est l'œuvre de Platon de Tivoli et de Jean Hispanensis de Luna, qui les premiers traduisirent de l'arabe en latin les écrits de Al-Battani et de Al-Fergani, où sont exposés les systèmes astronomiques des anciens. Mais il faut remarquer que les infiltrations de la science arabe au sein de la Chrétienté latine se produisirent à la fois en des régions bien éloignées; en effet, tout un collège de traducteurs semble avoir eu pour centre l'école de Chartres; d'autres, tels que Platon de Tivoli, paraissent avoir conçu en Italie le désir de s'assimiler les connaissances astrono-

miques des Musulmans. Enfin, des *Tables de Marseille*, qui remontent au XIIIe siècle et que M. Duhem a découvertes dans la Bibliothèque nationale de Paris, servent à prouver que les côtes de la Provence et du Languedoc ont été ouvertes à la pénétration de la science arabe. De ces *Tables* notre historien donne des extraits qui suffisent pour en établir la valeur sinon l'originalité [1].

Tandis que Platon de Tivoli se borna à faire connaître à ses compatriotes les idées de Ptolémée, le texte même de l'*Almageste* fut transporté de l'arabe en latin (1175) par un autre érudit italien, Gérard de Crémone, qui, non content de cela, fournit peu après un complément utile à son Ouvrage, en donnant, sous le titre *Theorica planetarum*, un exposé rapide des principales doctrines formant la substance de la *Grande Syntaxe*.

Le Chapitre que nous venons d'analyser se clôt par un paragraphe consacré à un certain Alain de Lille, mort en 1203, et connu surtout par un poème latin intitulé *Anticlaudianus*; M. Duhem le considère comme avant-coureur du *Paradis* de Dante; les longs extraits qu'il donne fournissent les éléments suffisants pour décider combien ce jugement est conforme à la vérité.

Aux *Tables de Marseille*, citées plus haut, font pendant les *Tables de Londres*, petit écrit que notre Auteur a remarqué dans la Bibliothèque nationale de Paris et qu'il analyse au début de son Chapitre traitant de *L'Astronomie des Séculiers au* XIIIe *siècle*, en émettant l'hypothèse que ces *Tables* aient été rédigées par Pierre de Maricourt, surnommé Pierre le Pèlerin, savant picard, célèbre dans l'histoire de la Physique par son *Epistola de Magnete*. Un de ses contemporains est l'Anglais Jean de Sacrobosco (Holywood), auquel un médiocre Traité ayant pour titre

---

(1) Qu'il nous soit permis de signaler un passage où l'anonyme auteur dit que tous les onze rois d'Égypte qui ont porté le nom de Ptolémée ont excellé en Astronomie; c'est la deuxième fois (*voir* plus haut) que nous rencontrons, dans un auteur du Moyen Âge, l'identification du grand astronome avec un membre de la famille régnante d'Égypte; or, comme les données biographiques sur l'auteur de l'*Almageste* sont peu nombreuses et très incertaines, il nous semble qu'il est prudent de ne pas exclure *a priori* un lien de sang entre le grand astronome et les rois d'Égypte, jusqu'au jour où de nouveaux documents ne permettent de considérer cette donnée que comme un des nombreux produits de l'ardente fantaisie des peuples orientaux.

Sphæra (1244) assura pendant plusieurs siècles une renommée vraiment extraordinaire et sans doute exagérée.

Tous les traités astronomiques que des orientalistes avaient fait connaître aux Latins jusqu'au début du XIIIe siècle s'accordent à présenter le système de Ptolémée comme admis sans conteste; or c'est un traducteur de plusieurs Ouvrages d'Aristote, Michel Scot, qui en 1217, en révélant à l'Europe la *Théorie des Planètes* d'Al-Bitrogi, lui fit connaître le système des sphères homocentriques. Alors, un champion se dressa pour défendre l'orthodoxie menacée; ce fut Guillaume d'Auvergne, qui, pendant vingt ans (1223-1242), occupa le siège épiscopal de Paris et dont les écrits nous montrent la fermentation engendrée par le mélange du Péripatétisme islamique et de l'Astronomie arabe avec la vieille science occidentale. Or l'Université de Paris, profondément bouleversée sous l'épiscopat du savant que nous venons de nommer et dispersée en 1229, n'avait pas tardé à reprendre sa vie laborieuse. Pour connaître ce qu'on y enseignait en 1250 sur l'Astronomie, on peut consulter utilement un manuscrit existant dans la Bibliothèque municipale d'Amiens et que M. Duhem considère comme un Recueil de rédactions faites par des élèves d'après l'enseignement de Roger Bacon, alors que celui-ci, simple maître ès arts, commentait publiquement Aristote; à cause de cette attribution, il en donne une analyse fort détaillée, accompagnée de plusieurs extraits, tout en reconnaissant toutefois que la science astronomique qu'on y trouve est bien chétive et bien pauvre, quoiqu'en état d'accroissement continuel. Vingt ans après, dans l'*Opus majus* et dans l'*Opus tertium*, Bacon s'est montré un des hommes les mieux informés des choses de l'Astronomie; c'est qu'alors il s'était pleinement instruit en lisant les écrits de son compatriote Robert Grosse-Teste (1175-1253), évêque de Lincoln, personnage important auquel M. Duhem consacre un paragraphe de son *Histoire*. Les paragraphes suivants se rapportent à un certain Guillaume l'Anglais, médecin de Marseille, qui mérite une citation, car il est le premier savant latin qui se soit soucié de l'œuvre astronomique d'Al-Zar'kali. Peut-être était-il frère ou cousin de Gilbert l'Anglais, médecin et chancelier de l'Université de Montpellier, qui, à son tour, avait probablement des liens de parenté avec ce Maître Robert l'Anglais, qui enseignait dans la même ville en 1271

et dont un *Traité du Quadrant* a été publié en 1897 par P. Tannery. Ce Robert obtint une place dans l'*Histoire* que nous examinons grâce au commentaire qu'il fit de la *Sphæra* de Sacrobosco.

Marseille et Montpellier furent des portes largement ouvertes à la science orientale; toutefois, pour rendre compte d'une manière complète de sa pénétration en Europe, il est nécessaire de considérer encore le rôle que joua la science rabbinique en des provinces où Israël comptait de nombreuses et florissantes communautés; or, c'est précisément à des astronomes juifs, vivant au midi de la France jusqu'au commencement du XIVe siècle, qu'est consacré le paragraphe suivant de l'Ouvrage dont nous nous occupons. Qu'il nous soit permis de manifester notre étonnement pour n'avoir rencontré dans ce paragraphe pas même le nom de Levi ben Gerson [1], de ce « Leo Hebreus, vis insignis et celeber mathematicus, quasi veteribus parum, fidens excogitavit novum instrumentum, cujus vidimus canonenes mathematica subtilitate præcellens » (Pic de la Mirandole); peut-être M. Duhem s'en occupera-t-il plus tard avec la largeur que mérite l'inventeur du *Baculus astronomicus* et de plusieurs Ouvrages, mathématiques et astronomiques, qui existent encore [2].

Après cette course, M. Duhem revient en arrière pour faire connaître une compilation rédigée en 1250 par un certain Léopold fils du duché d'Autriche, et une médiocre *Théorie des Planètes*, dont le manuscrit est conservé dans la Bibliothèque nationale de Paris. Nous rencontrons ensuite un nom bien connu, Campanus de Novare, chapelain d'Urbain IV et de Boniface VIII, et auteur d'un *Tractatus de sphæra*, d'un *Computus major* et d'une *Theorica planetarum*. « Avec Campanus, dit M. Duhem, l'Astronomie de la Chrétienté latine est vraiment hors de page; elle n'a plus rien à recevoir de la science grecque ou arabe; bientôt l'École de Paris produira des observateurs capables de se mesurer avec les maîtres arabes; tel sera, par exemple, Guillaume de Saint-Cloud. Mais, en même temps que la technique ira se perfectionnant, les

---

(1) Ce savant est cité en passant par M. Duhem (t. III, p. 154) sous le nom de *Léon le Juif*.

(2) *Voir* le remarquable travail de J. CARLEBACH, *Lewi ben Gerson als Mathematiker. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik bei den Juden* (Berlin, 1910).

principes mêmes des théories astronomiques donneront lieu à de grands débats entre philosophes; ces débats seront également ardents dans l'École dominicaine et dans l'École franciscaine; l'heure est venue pour nous d'en retracer l'histoire. »

Le Chapitre ayant comme sujet *L'Astronomie des Dominicains* débute par un savant d'une renommée universelle, Albert le Grand, évêque de Ratisbonne, qui, avant que le XIIIe siècle ne fût arrivé au milieu de son cours, avait achevé la plupart des commentaires sur Aristote, où la théorie des sphères homocentriques est exposée et discutée. Remarquons-y la déclaration que, « pour un astronome, une hypothèse ne prend d'existence réelle qu'au jour où elle a fourni des Tables propres à prédire les mouvements célestes et à soumettre ces prévisions au contrôle de l'observation ». Fidèle à ce principe et fort du témoignage de l'observation, il a condamné les sphères homocentriques, en prenant parti pour l'Astronomie de Ptolémée.

Vers l'an 1250 le dominicain Vincent, évêque de Beauvais, publia une *Encyclopédie* qui, d'après son titre, prétendait refléter fidèlement la Physique, la Morale, le Dogme et l'Histoire, et qui est en effet un résumé à peu près complet de ce qu'on savait au milieu du XIIIe siècle; les citations et les extraits y abondent, tirés en grande partie des Ouvrages d'Albert le Grand. Comme l'évêque de Beauvais, saint Thomas d'Aquin (le Docteur Angélique) nous apparaît, au moins au début de sa carrière, comme un élève de l'évêque de Ratisbonne; seulement plus tard, s'inspirant à la lecture d'auteurs anciens et à ses propres méditations, il s'en éloignera considérablement, tout particulièrement en ce qui s'approche de l'Astronomie. Dans ses Ouvrages il est bon de signaler le passage suivant, car il se rapporte à un ordre d'idées sur lesquelles nous avons cité plus haut le sentiment d'Albert le Grand : « Les suppositions que les astronomes ont imaginées ne sont pas nécessairement vraies; bien qu'elles paraissent sauver les phénomènes, il ne faut pas affirmer qu'elles sont vraies, car on pourrait peut-être expliquer les mouvements apparents des étoiles par quelque autre procédé que les hommes n'ont point encore conçu. » Il est encore nécessaire de remarquer que le saint d'Aquin semble avoir été l'introducteur de Simplicius dans la Scolastique occiden-

tale et que, par son imposante autorité, ce célèbre commentateur d'Aristote exerça dès lors et pendant longtemps une influence profonde sur la Physique scolastique.

M. Duhem rencontre ensuite deux autres disciples d'Albert le Grand, appartenant à l'ordre des Dominicains, c'est-à-dire Ulrich de Stassbourg (mort en 1277) et Bernard de Trille (environ 1240-1292), dont le second sert à prouver par ses écrits qu'au temps où il vivait le système des sphères homocentriques ne trouvait plus guère de partisans. Peu après notre Auteur s'occupe d'un adversaire d'Albert, Thierry de Freiberg, remarquable pour son essai de conciliation entre la Science expérimentale et la Physique péripatéticienne : c'est le dernier représentant de l'ordre de Saint-Dominique auquel s'arrête notre historien.

L'exposition faite par M. Duhem dans son dernier Chapitre de *L'Astronomie des Franciscains* s'ouvre par la constatation du fait que, dans les docteurs de l'École franciscaine, on remarque au XIIIe siècle cette même hésitation, entre le système astronomique de Ptolémée et le système des sphères homocentriques, qui est visible dans les plus éminents représentants de l'École franciscaine. C'est en étudiant la *Somme*, qui porte le nom d'Alexandre de Hales (mort en 1245), qu'on voit naître dans l'ordre de Saint-François les connaissances astronomiques; c'est pour cela que M. Duhem s'arrête un peu sur cette compilation, pour considérer ensuite, en passant, un illustre disciple du frère anglais que nous venons de citer, c'est-à-dire le Docteur Séraphique saint Bonaventure,

> . . . . Bonaventura
> Da Bagnoregio, che nei grandi uffici
> Sempre pospose la sinistra cura.
>
> (DANTE, *Paradis*, chant XII, 127-2.)

Mais, au point de vue de l'*Histoire de l'Astronomie*, le personnage doué de la plus grande signification entre les prêtres franciscains est sans doute Roger Bacon, auquel notre auteur consacre trois longs paragraphes (résumé de plusieurs de ses anciens Mémoires) que nous recommandons à tous ceux qui aiment à connaître l'évolution historique de l'Astronomie ([1]); non content

---

([1]) On dirait que M. Duhem s'est proposé de faire casser le jugement de

d'analyser le *Traité du Calendrier*, l'*Opus majus*, l'*Opus minus* et l'*Opus tertium* et d'en faire ressortir la valeur, M. Duhem s'arrête sur certains *Canons d'Astronomie* (dont il publie même, d'après un manuscrit existant dans la Bibliothèque municipale de Bordeaux, le passage le plus original, c'est-à-dire celui qui contient la pensée d'observer une éclipse de Soleil à l'aide de la chambre noire) qu'il croit dus précisément à Bacon; et, en effet, les raisons qu'il expose en appui de cette opinion sont si sérieuses qu'on peut dire que bon nombre d'attributions généralement acceptées ont des bases bien plus fragiles !

Dans le grand débat entre la Physique d'Aristote et l'Astronomie de Ptolémée, Bacon n'a pas su délaisser la partie que l'observation condamnait; ce résultat fut atteint peu après par un astronome, franciscain comme Bacon, qui emprunta à Bacon lui-même les connaissances nécessaires pour le combattre. Nous parlons de Bernard de Verdun, qui, entre le dernier quart du XIII[e] siècle et les premières années du XIV[e], écrivit un *Tractatus super totam Astrologiam*, dont un manuscrit se trouve à la Bibliothèque nationale de Paris, qui contribua grandement au triomphe du système de Ptolémée parmi les Frères mineurs. Il s'approche par son thème d'une *Somme de Philosophie* faussement attribuée à Robert Grosse Teste et d'un *Traité* anonyme *d'Astronomie*, rédigé par un disciple de Bacon, l'une et l'autre analysés par M. Duhem, dans les paragraphes VIII et IX du Chapitre dont nous nous occupons. Le même Chapitre nous apprend ensuite ce que contiennent deux *Commentaires* aux *Sentences* de Pierre Lombard, composés l'un par le franciscain anglais Richard de Middleton peu après l'an 1281 et qui est remarquable par la foi complète montrée par son auteur dans le système de Ptolémée, l'autre par un certain Guillaume Varon et dont un exemplaire manuscrit se trouve à la Bibliothèque municipale de Bordeaux. Le Chapitre et tout le volume se closent par un paragraphe consacré à Duns Scot; le célèbre Docteur Subtil n'a pas composé de livres traitant expressément des phénomènes célestes, mais ses œuvres ont gardé la marque de son intérêt pour les phénomènes

---

Delambre, qui pensait « qu'on ne peut mettre Bacon au rang des promoteurs de l'Astronomie » (*Histoire de l'Astronomie au Moyen Age*, Paris, 1817, p. 257).

célestes et la preuve d'une plus grande faveur dans l'ordre de Saint-François pour le système de Ptolémée. Or, M. Duhem nous annonce la publication de textes nombreux, qui, non seulement confirmeront cette faveur, mais qui permettront de suivre les progrès et le triomphe de ces doctrines au sein de l'Université de Paris : souhaitons qu'il ne nous le fasse pas attendre longtemps !

Arrivés à la fin de notre longue course à travers le nouveau Volume de l'illustre physicien bordelais, nous croyons nécessaire de justifier la longueur de ce compte rendu. Si nous sommes entrés en quelque détail menu, si nous avons cité presque tous les auteurs étudiés par M. Duhem, c'est que les noms de plusieurs d'entre eux apparaissent, à ce que nous croyons, pour la première fois dans les Annales de l'Astronomie ; par conséquent, nous pensons que les futurs historiens de cette science devront tout au moins se demander si ces noms y ont droit à une place définitive. Or, pour répondre à cette question, ils trouveront dans notre Auteur un guide expert, un témoin digne de confiance, qui, en général, leur épargnera la peine de lire des manuscrits rares, mal écrits et, pour tout dire, souvent très ennuyeux ; qui les dispensera encore du désagréable travail de consulter les terribles *in-folio* renfermant la littérature théologique.

GINO LORIA.

MILLER (G. A.). — HISTORICAL INTRODUCTION TO MATHEMATICAL LITERATURE. 1 vol. petit in-8, XIII-302 pages. New-York, The Macmillan Company, january 1916.

Le but que M. Miller se propose d'atteindre en publiant cet Ouvrage est de donner au lecteur tous les éléments qui l'aideront à discerner les Ouvrages relatifs aux questions qui l'intéressent.

CHAPITRES I et II (¹) (p. 1-77). — Pour connaître la nouvelle orientation donnée aux Mathématiques pendant le XIXe siècle, il importe de consulter un certain nombre de publications historiques récentes. C'est pourquoi l'Auteur juge utile de faire, avec

(¹) I. *General Observations*. II. *Mathematical Literature in general*.

de courtes analyses, un Catalogue de Périodiques. Plusieurs fois les éditions allemande et française de l'*Encyclopédie mathématique* sont citées. Quelques lignes écrites par Descartes ont amené M. Miller à rédiger un paragraphe sur la distinction qu'il faut faire entre les Mathématiques et l'histoire de cette science.

Après avoir indiqué les différentes parties déjà développées de cette histoire, l'Auteur expose qu'il est utile de parcourir les Ouvrages publiés jusqu'ici sur cette histoire pour connaître des questions qui ne sont pas enseignées ; par exemple, il expose la théorie des carrés magiques.

Il donne les titres des Périodiques publiés depuis ces dernières années dans diverses parties du Monde, surtout en Amérique. Il entre dans des détails amusants relatifs à un Périodique intitulé *The Ladies' Diary* (1704-1840). Il constate que les *Journaux de Crelle* (1826), *de Liouville* (1836) et *de Sylvester* (1855) ont influé puissamment sur le développement des Mathématiques.

L'Auteur cite les importantes Sociétés mathématiques fondées à partir de la seconde moitié du XIXe siècle ; les publications de ces Sociétés, dit-il, sont un autre puissant facteur de la littérature mathématique. Il fait aussi connaître, avec les dates, les Congrès internationaux de Mathématiques, en notant l'importance du Congrès de Zurich (1897).

Alors il complète ce qu'il a écrit plus haut en appréciant plusieurs autres Périodiques : par exemple, le *Bollettino* de M. Gino Loria (1898) et le *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Gaston Darboux (1870) renferment des analyses très utiles à ceux qui désirent prendre une idée générale des récents progrès en Mathématiques.

Puis il revient sur les Encyclopédies et parle des importants travaux de Bibliographie publiés par la Société Royale de Londres.

Là M. Miller donne de courtes explications sur les Tables de diviseurs des nombres, les Tables de logarithmes, etc.

Enfin une liste de quelques Collections de travaux scientifiques est suivie de considérations relatives aux fautes reproduites dans ces Collections.

Un *Appendice* [1] (p. 275-290) contient une Liste analytique

---

[1] *Lits of important Works.*

de 20 Bibliographies et Encyclopédies, de 14 Histoires, de 18 ouvrages sur l'Enseignement et la Philosophie.

M. Miller, dans ces deux Chapitres, cite un nombre considérable de publications utiles aux personnes qui s'occupent de Mathématiques. Il n'a pas parlé des Comptes rendus publiés par les Académies; cependant les auteurs des Notes et Mémoires qui les contiennent font le plus souvent précéder l'exposé de leurs travaux d'un historique soigné.

Chapitre III ([1]) (p. 78-128). — M. Miller reproduit et discute les définitions du mot « Mathématiques » données par Platon, Benjamin Peirce, Bertrand Russell, Henri Poincaré; et il fait remarquer qu'une petite partie seulement des Mathématiques étant à présent connue, les définitions proposées ne peuvent être que provisoires. Après avoir exposé les divisions successivement adoptées en Mathématiques, il fait une longue discussion relative aux mots Algèbre, Analyse et Géométrie usités depuis le xixe siècle. Puis viennent quelques mots sur les travaux de bibliographie faits récemment en France et en Angleterre.

C'est alors que l'Auteur constate que les Grecs ont contribué au développement des Mathématiques en s'occupant d'Astronomie et qu'ils ont trouvé le principe d'irrationalité, que le Moyen Age a excellé dans la résolution des équations à une inconnue, que les Italiens ont présenté pendant le xvie siècle les solutions algébriques des équations cubiques, que Lagrange s'est illustré par des Mémoires sur la résolution algébrique des équations et qu'à ses efforts sont dus les admirables travaux d'Abel et d'Evariste Galois.

Grâce à la Géométrie de Descartes, l'étude des fonctions a été commencée par J. Bernoulli et Leibniz. L'étude des groupes, dont la conception est due à Euclide, d'après Henri Poincaré, a pris depuis le xixe siècle une importance très grande; l'historique de cette étude amène M. Miller à revenir sur les travaux de Lagrange, à signaler ceux de Cauchy, Galois, Sylow, Cayley, Jordan, Lie.

En parlant des symboles, des notations et de la terminologie introduites en Mathématiques, il fait des emprunts à un Ouvrage publié en 1909 par Désiré André, signale Sylvester comme ayant

---

([1]) *General historical questions relevant to Mathematics.*

introduit un grand nombre de nouveaux termes, rappelle que des écrivains ont dit qu'à l'abondance des termes est due une fâcheuse confusion.

Au sujet de la question des erreurs en Mathématiques, il parle d'une proposition faite en 1904 par Maillet, signale les Revues comme pouvant fournir un important organe pour signaler ces erreurs, et parle même des fautes de réponse à des exercices proposés. Le grand nombre de démonstrations fausses du dernier théorème de Fermat l'a frappé et l'amène à en signaler une raison.

M. Miller engage le lecteur à consulter les travaux des mathématiciens qui font autorité ; on doit parcourir les Notices publiées sur eux-mêmes par les candidats aux places libres dans les grands corps mathématiques, dont il en cite sept qu'il regarde comme principaux.

Le Chapitre III se termine par des considérations sur l'étude des Mathématiques au point de vue de l'éducation de l'esprit et par une curieuse anecdote qui montre que le pape Urbain V créa en 1366 des difficultés matérielles aux étudiants de l'Université de Paris.

Chapitre IV [1] (p. 129-158). — M. Miller commence l'histoire des progrès en Arithmétique en démontrant que la suite des nombres premiers est illimitée; il fait allusion aux travaux d'Euler et de Dirichlet à ce sujet. Il cite les théorèmes de Goldbach, parle du crible d'Eratosthènes, insiste sur l'importance historique du *Liber Abaci* (1228) de Léonard de Pise, mentionne ce théorème du Russe Cebysëv : « n étant > 3, il y a toujours au moins un nombre premier entre n et $2n - 2$ ».

L'Auteur insiste sur les recherches des Grecs au sujet des nombres irrationnels. Pensant que, pour faire comprendre l'histoire de l'introduction de ces nombres, il importe d'avoir une vue claire de leur nature et de leur signification, il entre dans des explications théoriques sur la racine carrée, les fractions périodiques. Il cite les conceptions de Méray, Weierstrass, Cantor, Dedekind qui, les premiers, ont présenté rigoureusement la théorie des nombres irrationnels, écrit que Liouville a prouvé l'existence des nombres transcendants.

---

[1] *Fundamental Developments in Arithmetic.*

Il parle des travaux des Indous et des Babyloniens sur les opérations fondamentales; il présente, probablement comme curiosités, les diverses manières proposées par le Vénitien Paciuolo (1494) pour faire la multiplication. M. Miller fait un long exposé des systèmes de numération, en citant les Babyloniens, les Grecs; des Articles de Cantor, Johnson, Stein.

Le Chapitre IV se termine par de copieuses explications sur le théorème de Fermat, déjà cité dans le paragraphe sur les erreurs en Mathématiques; il parle des recherches d'Euler, Dirichlet, Legendre, Kummer et des prix proposés pour la solution complète de ce problème; il reproduit le règlement du prix de 125000^{fr} fondé par Wolfskehl.

Chapitre V ([1]) (p. 159-181). — M. Miller commence l'histoire de la Géométrie par le théorème de Pythagore et parle de l'incommensurabilité. Il rappelle que Versluys a publié un Livre qui contient 96 preuves de ce théorème. Le triplet 3, 4, 5 permet, explique-t-il, de construire un angle droit. Tout semble faire croire, écrit-il, que Pythagore n'a pas le premier démontré le théorème qui porte son nom.

L'Auteur énonce des propriétés très élémentaires du cercle, donne la valeur de π employée par les Égyptiens. Après quelques explications théoriques, il cite la valeur approchée de π due à Archimède, parle de la quadrature du cercle et de la décision prise en 1775, par l'Académie des Sciences de Paris, de ne plus examiner les écrits relatifs à cette question. Il rappelle que Lambert a établi en 1768 l'irrationalité de π.

Les énoncés élémentaires sur l'aire et le volume de la sphère sont reproduits et accompagnés d'un élogieux exposé des admirables découvertes d'Archimède. Il montre que la détermination de l'aire des triangles et polygones sphériques; que l'étude, faite par les Grecs, des polygones et polyèdres réguliers ont aussi un intérêt historique fondamental qu'il développe, après avoir insisté sur la beauté de quelques vérités.

Il cite les *solides cosmiques* que les Grecs employaient pour représenter les formes des atomes, de la matière, de l'Univers. Il parle des travaux de W. R. Hamilton sur les groupes de mouve-

([1]) *Fundamental Developments in Geometry.*

ments auxquels donnent lieu les polyèdres réguliers; des constructions, par la règle et le compas, relatives à ces corps; de la possibilité, démontrée par Gauss, d'inscrire à un cercle un polygone régulier de 17 côtés.

L'Auteur, après avoir dit qu'une Géométrie du triangle s'est créée en France vers 1885, fait remarquer que les premières recherches sur le triangle ont été faites par les Égyptiens, et que la formule de l'aire du triangle en fonction des trois côtés est due au Grec Héron d'Alexandrie.

Chapitre VI (1) (p. 182-213). — M. Miller remarque que la théorie des équations a toujours occupé la principale place dans le développement de l'Algèbre. Les équations du premier degré ont été résolues par l'Égyptien Ahmes; on trouve sur des papyrus, probablement d'une époque plus ancienne que celle d'Ahmes, la résolution d'un système de deux équations dont l'une est du second degré. Le Grec Thymaridas a donné une règle pour résoudre un système littéral particulier d'équations. M. Miller constate que l'étude de l'histoire de l'Algèbre dans les temps anciens est compliquée, parce que l'on n'a pas généralement accepté une ligne de démarcation entre l'Algèbre et l'Arithmétique. Il regarde l'Arithmétique algébrique comme ayant été inaugurée par les Italiens Ferro, Tartaglia, Cardan et Ferrari pendant le XVIe siècle, par Viète en 1591 et Girard en 1629; comme ayant été solidement fondée en 1637 par Descartes. Il entre dans quelques détails sur les travaux algébriques de ces trois illustres Français; il insiste sur quelques points développés dans la *Géométrie* de Descartes. Au sujet du théorème fondamental de la théorie des équations, il cite d'Alembert, Gauss, Euler, Lagrange, Laplace, puis Abel comme ayant donné la démonstration rigoureuse de ce théorème. Quelques lignes sont consacrées à la relation établie par Galois entre la théorie des groupes de substitutions et celle des équations algébriques. Au sujet du nombre des racines des équations, M. Miller présente les idées de Cardan, Viète, Girard et Gauss; il constate qu'en 1858 l'éminent mathématicien français Hermite est arrivé à exprimer par les fonctions elliptiques une racine de l'équation générale du cinquième degré, et qu'une

(1) *Fundamental Developments in Algebra.*

racine de l'équation générale de degré n peut être représentée à l'aide des fonctions fuchsiennes créées par Henri Poincaré.

Les premiers développements sur les déterminants sont attribués à Leibniz ; M. Miller regarde la règle donnée en 1750 par Cramer comme d'une importance fondamentale daus l'histoire de la théorie des déterminants. Bezout, Vandermonde, Laplace, Cauchy, Jacobi ont posé cette théorie sur une base ferme. La théorie des matrices est due à Sylvester (1851). C'est Thomas Muir qui a écrit la plus récente histoire de la théorie des déterminants (1906-1911).

Les solutions d'équations numériques se trouvent dans des écrits égyptiens et grecs. L'emploi systématique de lettres pour représenter des nombres connus a été adopté en 1591 par Viète. Les progrès de l'Algèbre sont dus à l'emploi que Viète fit des lettres. J. Hudde, le premier, fit usage de la même lettre pour représenter à la fois un nombre positif et un nombre négatif.

Regardant la théorie des équations numériques comme une partie importante de l'Algèbre, M. Miller fait un long exposé où il rappelle les méthodes de Sturm, les solutions de Gauss, les méthodes d'approximation, les méthodes géométriques des Grecs et de Descartes.

L'expression de *domaine de rationalité* est due à J. Kronecker (1823-1891); le concept qu'il implique est amplement exposé dans ses travaux. En résumant les écrits relatifs à ce concept, l'Auteur est amené à citer le théorème de Schœnemann-Eisenstein et à reproduire un passage, tiré d'un Ouvrage (1909) de Dedekind, s'appliquant à la Géométrie élémentaire.

La rapide exposition de la théorie des invariants amène M. Miller à citer les noms de Lagrange, Sylvester, Cayley, Salmon (1859), Meyer (1909), Dickson (New York, 1914).

M. Miller fait une longue discussion, d'après un travail de F. Cajori (1895), pour prouver que Newton n'est pas le premier savant qui ait découvert la formule du binome ; il attribue le principe de cette découverte à Blaise Pascal ; il fait remarquer que l'*Arithmetica integra* (1544) de Stifel contient les coefficients du binome, que l'Arabe Omar Alkhayami montre, dans un écrit, qu'il pouvait les trouver, que Stifel et Viète les ont employés pour extraire des racines des nombres.

CHAPITRE VII [1] (p. 214-274). — M. Miller donne des Notices sur « vingt-cinq éminents mathématiciens décédés ».

Nous avons tenu à présenter sans commentaires et dans leur ordre les nombreux sujets abordés par M. Miller dans un Ouvrage si rempli d'utiles renseignements. Mais il nous paraît impossible de ne pas faire remarquer que l'Auteur a négligé de signaler beaucoup d'importantes études publiées sur le génial savant que fut Henri Poincaré. ER. L.

MÉLANGES.

SUR LA DÉTERMINATION DU CENTRE DE COURBURE DES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UNE FAMILLE QUELCONQUE DE COURBES PLANES ;

PAR M. FARID BOULAD.

Considérons les trajectoires orthogonales (T) d'une famille quelconque de courbes planes (C) dépendant d'un paramètre variable. Appelons γ et μ les deux centres de courbure respectifs d'une courbe (C) et d'une trajectoire (T) répondant au point M où elles se coupent orthogonalement.

Supposons que l'angle droit $\gamma M \mu$ se déplace de façon que son sommet M reste sur une courbe quelconque Φ continue et que, dans chaque position de ce sommet, les deux côtés $M\gamma$ et $M\mu$ de cet angle soient respectivement la normale et la tangente à la courbe (C) passant en ce sommet. En d'autres termes que cet angle reste, pendant son déplacement, tangent aux deux courbes (T) et (C) se croisant en son sommet M. Soit I le centre instantané de rotation correspondant à la position de cet angle en un point M de sa trajectoire arbitraire Φ.

Il est aisé de voir que les deux centres de courbure γ et μ des deux

[1] « *Twenty-five prominent deceased Mathematicians.* »

courbes (C) et (T), orthogonales en M, sont aussi les deux centres instantanés correspondant respectivement aux deux positions de l'angle droit en ce même point M, en prenant respectivement ces deux courbes comme trajectoire Φ de son sommet.

Cela posé, voici l'énoncé du nouveau théorème que nous avons obtenu : *Quelle que soit la trajectoire* Φ *du sommet* M *de l'angle droit* $\gamma M \mu$, *les trois entiers* γ, I, μ *répondant à un point* M *de cette trajectoire, sont en ligne droite* [1]. *Si la trajectoire* Φ *coupe sous un même angle constant toutes les courbes de la famille* (C), *le centre instantané correspondant* I *est aussi le centre de courbure de cette trajectoire répondant à ce point* M.

On sait que, si P et Q sont les deux points de contact respectifs des deux côtés $M\gamma$ et $M\mu$ de cet angle droit avec leurs enveloppes, le centre instantané I est le point de concours de la normale en M à la trajectoire Φ et des deux perpendiculaires élevées respectivement en P et Q à ces deux côtés.

Il s'ensuit que, pour avoir un centre I, il suffit d'adopter une trajectoire Φ telle que sa normale au point M soit connue et que l'un des deux points P et Q soit déterminé aisément. Le centre de courbure μ sera alors à l'intersection de la droite γI avec la tangente en M à la courbe (C). Si la famille de courbes est définie par une transformation géométrique ponctuelle, on prendra, comme trajectoire convenable Φ, le lieu des points homologues du point M.

Comme exemples d'application de ce théorème à la recherche du centre de courbure μ en un point M d'une trajectoire orthogonale (T) nous envisagerons chacune des familles (C) ci-après, en supposant que l'on donne le centre de courbure γ de la courbe (C) répondant au point considéré M.

1° *Famille de courbes quelconques* (C) *homothétiques par rapport à un pôle* O. — Si l'on prend la droite OM comme trajectoire Φ du point M, on trouve que le centre μ est le pôle de la droite OM par rapport au cercle osculateur en M à la courbe (C). C'est la généralisation du théorème de M. d'Ocagne.

(1) Nous avons établi ce théorème en cherchant à démontrer celui qui a été énoncé par M. d'Ocagne dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (mars 1914, p. 140) sur le centre de courbure des trajectoires orthogonales d'un système de cercles homothétiques par rapport à un pôle.

2° *Famille de courbes obtenue par le déplacement continu d'une courbe plane quelconque* (C) *de forme invariable dans son plan.* — Si l'on prend, comme trajectoire Φ, la courbe décrite par le point M considéré entraîné dans le déplacement de la courbe (C), on trouve que le centre instantané correspondant à cette courbe (C) en M est aussi le centre instantané I correspondant à l'angle droit $\gamma M \mu$ dans sa position en M.

3° *Famille de courbes* (C) *décrites par les divers points d'une courbe plane quelconque* (M) *de forme invariable qui se déplace d'une manière continue.* — Si l'on prend cette courbe (M) comme trajectoire Φ, on trouve que le centre instantané correspondant à la position de cette courbe est le point de contact P du côté $M\gamma$ de l'angle droit avec son enveloppe. Il en résulte que le centre I est l'intersection de la normale en M à la courbe (M) avec la perpendiculaire en P à la droite PM.

4° *Famille de courbes quelconques homologiques par rapport à un centre d'homologie* O *et un axe d'homologie* HQ. — Si l'on prend la droite OM comme trajectoire Φ, le point d'intersection de la tangente en M à la courbe (C) avec l'axe HQ est le point de contact Q du côté $M\mu$ avec son enveloppe. Il s'ensuit que le centre I est l'intersection des deux perpendiculaires en M et Q, respectivement aux droites MO et QM.

5° *Famille quelconque de coniques* (C) *dépendant d'un paramètre variable. On donne les quatre points* A, B, C, D *où la conique* (C) *passant au point considéré* M *touche les quatre courbes enveloppes de cette famille.* — Considérons une conique (C′) de cette famille infiniment voisine de la conique (C). Soit O le point de concours de deux tangentes réelles communes à ces deux coniques et telles que ces deux courbes soient comprises dans le même angle de ces deux tangentes ou dans les angles opposés par leur sommet.

On sait, en Géométrie projective, que ces deux coniques (C) et (C′) sont deux figures homologiques ayant le point O pour centre d'homologie et une corde commune à ces deux coniques pour axe d'homologie correspondant à des arcs de ces coniques homologiques et infiniment voisins. La position de cet axe est donnée en remarquant que les tangentes à des points homologues infiniment voisins se coupent sur cet axe.

A la limite lorsque la conique (C′) se confond avec (C), le point O deviendra le point de concours de deux tangentes à la conique (C) en deux de ses quatres points A, B, C, D; soient B et D par exemple; et l'axe d'homologie deviendra une corde de contact de cette conique avec ses enveloppes; soit la corde AC par exemple.

A présent, comme ces deux coniques sont homologiques, si l'on prend comme trajectoire Φ la droite OM, le point de contact Q du côté Mμ de l'angle droit est le point de rencontre de ce côté avec l'axe AC. Il s'ensuit que le centre instantané I est l'intersection des deux perpendiculaires en M et Q aux deux droites MO et QM.

Si les coniques (C) sont des cercles de rayon variable l'axe d'homologie AC sera rejeté à l'infini et les deux coniques (C) et (C′) seront homothétiques par rapport à O.

Dans la Note où nous donnerons la démonstration du théorème ci-dessus, nous en ferons connaître d'autres applications.

REMARQUES SUR LA NOTE DE M. FARID BOULAD;

Par M. Gaston DARBOUX.

La proposition dont M. Farid Boulad fait d'intéressantes applications est un cas particulier de la suivante :

Lorsque la position d'une figure plane invariable dans son plan est déterminée par deux paramètres, tous les déplacements que cette figure peut prendre à partir d'une de ses positions donnent lieu à des centres instantanés qui sont en ligne droite.

Rapportons en effet cette figure à deux axes rectangulaires qui lui soient invariablement liés. Le déplacement d'un quelconque de ses points à partir d'une quelconque de ses positions sera déterminé par deux formules telles que les suivantes :

$$\mathrm{D}x = \xi\, du + \xi_1\, dv - (r\, du + r_1\, dv)\, y,$$
$$\mathrm{D}y = \eta\, du + \eta_1\, dv + (r\, du + r_1\, dv)\, x.$$

ξ, ξ_1, η, η_1 étant liés par des relations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial v} - \frac{dr_1}{du} = 0,\\ &\frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + r\eta_1 - \eta r_1 = 0,\\ &\frac{\partial \eta}{\partial v} - \frac{\partial \eta_1}{\partial u} - r\xi_1 + \xi r_1 = 0,\end{aligned}\right.$$

dont nous n'aurons pas à faire usage. Pour chaque valeur de $\frac{du}{dv}$, le centre instantané sera donné par les équations

$$\xi\, du + \xi_1\, dv - (r\, du + r_1\, dv)y = 0,$$
$$\eta\, du + \eta_1\, dv + (r\, du + r_1\, dv)x = 0.$$

L'élimination de $\frac{du}{dv}$ nous donnera l'équation

$$\frac{\xi - ry}{\eta + rx} = \frac{\xi_1 - r_1 y}{\eta_1 + r_1 x}$$

pour le lieu du centre instantané. Ce lieu sera donc une droite, comme nous l'avons annoncé.

Le cas particulier examiné par l'Auteur correspond à l'hypothèse

$$\eta = \xi_1 = 0.$$

On peut, du reste, et d'*une infinité de manières*, ramener le cas général à ce cas particulier. Il suffira par exemple d'intégrer les équations

$$\xi\, du + \xi_1\, dv = 0, \qquad \eta\, du + \eta_1\, dv = 0.$$

Alors, en posant

$$\xi\, du + \xi_1\, dv = \xi'\, du',$$
$$\eta\, du + \eta_1 dv = \eta'\, dv',$$

on sera ramené à un mouvement pour lequel

$$\xi'_1 = \eta' = 0$$

et qui rentre, par conséquent, dans la définition de M. Farid Boulad.

Il suffira de déplacer les axes mobiles pour obtenir d'autres réductions analogues.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Œuvres de G.-H. HALPHEN, publiées par les soins de C. Jordan, H. Poincaré, É. Picard, avec la collaboration de E. Vessiot. Tome I : 1 vol. gr. in-8° (25-16), XLIII-570 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1916.

Il y a quelques années, Mme Georges Halphen, ayant résolu de rassembler les Œuvres de son mari, avait prié MM. Jordan, Picard et Poincaré de surveiller cette publication. Nous avons été heureux en cette circonstance d'avoir le concours de M. Vessiot, qui, avec l'aide de Charles Halphen, Ingénieur des Arts et Manufactures, fils de notre regretté Confrère, a accepté de revoir le texte et de corriger les épreuves. Le premier Volume de ces Œuvres, qui était presque entièrement imprimé au début de la guerre, vient de paraître. Nous avons la tristesse de dire que Charles Halphen ne sera plus là pour s'occuper des Volumes suivants; il est tombé au champ d'honneur, près d'Arras, pendant l'été de 1915.

Suivant le désir exprimé par Mme Halphen, les deux Études que nous avons publiées en 1890, H. Poincaré et moi, sur la vie et l'œuvre de G.-H. Halphen, ont été reproduites au début du Volume. Nous avons pensé qu'il y aurait grand intérêt à réimprimer la Notice rédigée par Halphen sur ses travaux scientifiques à l'occasion de sa candidature à l'Académie des Sciences. On peut dire de cette Notice qu'elle a renouvelé un genre assez ingrat. Au lieu des sèches nomenclatures qu'étaient bien souvent jusque-là les écrits de cette nature, on y trouve exposées dans leur ordre logique les idées qui ont guidé l'Auteur dans son œuvre scientifique, et l'on en peut mieux apprécier la finesse en même temps que la profondeur. Ce sera un guide très sûr pour la lecture de l'Ouvrage.

Les géomètres remercieront Mme Halphen de son heureuse initiative. Voici vingt-sept ans que Halphen a été enlevé à la Science française dans tout l'éclat de son talent. Rien n'a vieilli dans ses

écrits d'une admirable perfection, et dont toutes les parties sont des œuvres d'art dignes d'être proposées comme modèles à ceux qui cultivent les Sciences mathématiques. Dans la solution de chaque question, Halphen s'efforçait de mettre en évidence les véritables éléments dont elle dépend. Les problèmes difficiles d'Algèbre et de Géométrie énumérative, par lesquels il débuta, et où une solution n'a de prix que si elle est complète et définitive, l'habituèrent à creuser à fond les questions qu'il étudiait. Mettant à profit avec un art consommé le secours que peuvent se prêter les diverses parties des Mathématiques, il a su pousser jusqu'à son dernier terme la solution des problèmes qu'il s'est posés, et son œuvre si achevée a laissé dans la Science une trace durable.

Ce n'est guère qu'à partir de 1869 que Halphen commença à se faire connaître. Ce Volume renferme les Mémoires qu'il a publiés jusqu'en 1876. En dehors de ses travaux sur la théorie des caractéristiques et sur les points singuliers des courbes planes algébriques, complètement achevés pendant cette période, on y trouve l'amorce de presque toutes les idées importantes que l'éminent mathématicien devait développer plus tard. C'est ainsi qu'une courte Note de 1870 sur les courbes gauches algébriques, renfermant des énoncés du plus haut intérêt, resta pendant douze ans une énigme pour les géomètres qui s'occupaieut du même sujet. De même, à plusieurs reprises, apparaît incidemment dans des travaux de Géométrie énumérative la notion d'invariant différentiel, dont Halphen devait faire longtemps après une étude approfondie, et qui le conduisit à la solution d'importants problèmes de Calcul intégral.

Nous avons lieu d'espérer que les autres Volumes pourront paraître assez rapidement. Il est superflu de louer le soin, dont il est coutumier, avec lequel M. Gauthier-Villars a imprimé cet Ouvrage.

ÉMILE PICARD.

Proceedings of the fifth international Congress of Mathematicians (*Cambridge*, 22-28 *August* 1912). Edited by the general Secretaries of the Congress E.-V. Hobson and A.-E.-H. Love. Vol. I : Part I : Report of the Congress; Part II : Lectures, Communications (Section I). Vol. II : Communications to Sections II-IV. 2 vol. in-8 jésus, 500 pages et 657 pages. Cambridge, at the University Press, 1913.

A la Séance d'ouverture du Congrès international des Mathématiciens à Cambridge, Sir *George Darwin* prononça une Allocution où il débutait en disant que le monde entier est affecté par la mort de l'illustre Français Henri Poincaré. Au cours de cette Allocution, il cite cette opinion de Henri Poincaré que les démonstrations mathématiques non seulement intéressent l'intelligence, mais peuvent aussi mettre en jeu la sensibilité.

A la première Séance générale, sur la proposition de M. Mittag-Leffler, appuyée par M. Enriques, Sir George Darwin est élu Président du Congrès.

A la fin de la Séance de clôture du Congrès, M. *Mittag-Leffler* a prononcé en français, au nom de ses collègues, quelques paroles chaleureuses de remerciements au sujet de l'accueil charmant que firent les Anglais à leurs hôtes venus à Cambridge des diverses contrées de l'Europe. Il s'est ensuite attaché à montrer que les Congrès sont pour les Mathématiques d'une importance peut-être plus grande que pour les autres Sciences.

A la première Séance de chaque Section, des Allocútions ont été prononcées par les Présidents suivants :

Elliot, de la Section I (Arithmétique, Algèbre, Analyse), qui a terminé en appelant Henri Poincaré le « prince des analystes »;

Baker, de la Section II (Géométrie), qui a rappelé les travaux de Cayley, Salmon, Clebsch, Abel, Riemann, Sir Robert Ball, Noether, Zeuthen, Picard dont le livre marque une étape dans l'histoire de la Géométrie; Humbert, Castelnuovo, Enriques, Severi;

Lamb, de la Section III (*a*) (Mécanique, Physique mathématique, Astronomie);

Edgeworth, de la Section III (*b*) (Science économique, Science

actuaire, Statistique), qui a rappelé que « le D[r] Marshall a montré que le raisonnement mathématique en Économie peut être non seulement brillant, mais fructueux » ;

Russell, de la Section IV (*a*) (Philosophie et Histoire), qui a déploré, comme une grande perte, le décès de Henri Poincaré ;

Godfrey, de la Section IV (*b*) (Didactique), qui a parlé des écrits de Sir George Darwin, Bourlet, Klein, Zeuthen, et qui a terminé en demandant de déléguer dans sa charge le Professeur Smith, l'initiateur de la création de la Section IV (*a*).

En Assemblées générales 8 Lectures ou Conférences ont été faites. En voici le résumé très succinct :

1. La Conférence *sur la signification de la critique des principes dans le développement des Mathématiques* de M. *Federigo Enriques* a pour sommaire :

Introduction. — Le continu et les procédés infinitésimaux dans l'Antiquité. — La fondation du calcul infinitésimal. — La critique des concepts infinitésimaux et les nouveaux développements sur le calcul des variations. — Les fonctions arbitraires et l'élaboration moderne du concept du continu. — Le développement intensif des Mathématiques : les équations et les nombres imaginaires. — La théorie des fonctions algébriques selon Riemann et la critique des principes de la Géométrie. — Nouveaux développements de l'Algèbre. — Conclusions ; pragmatisme et naturalisme mathématiques. — Les Mathématiques comme instrument et comme modèle de la Science.

2. Au début de sa Conférence *sur les Périodicités dans le système solaire*, M. *Ernest-W. Brown* expose les méthodes apportées par les découvertes de Newton pour traiter les problèmes de Mécanique céleste. Puis il entre dans quelques détails sur les séries employées en Astronomie, sur les périodes des mouvements des corps célestes : la Lune et les planètes, les astéroïdes. A la fin de sa Conférence, il dit que Henri Poincaré a grandement contribué à l'avancement général des diverses branches des Mathématiques, que c'est en Mécanique céleste qu'il est le plus grand de tous, que le monde savant déplore sa disparition et espère construire sur les fondements établis par une main aussi sûre.

3. M. *Edmond Landau* a exposé, avec de nombreuses équations et formules, des travaux relatifs à la théorie des nombres premiers.

4. La Lecture du Prince B. Galitzin sur *les principes de la Sismologie instrumentale* contient quelques équations et formules, un tracé graphique et les noms des savants qui se sont occupés d'une façon remarquable de Sismologie.

5. M. *Émile Borel*, dans sa Conférence intitulée : *Définition et domaine d'existence des fonctions monogènes uniformes*, a exposé les origines de l'idée de fonction, la théorie de Cauchy, les limites de la théorie de Cauchy-Weierstrass, la théorie de Cauchy-Riemann, les domaines de Cauchy, le prolongement par les séries divergentes, les intégrales doubles analogues à l'intégrale de Cauchy, les propriétés des fonctions monogènes, les analogies entre la théorie des fonctions d'une variable complexe et la théorie du potentiel.

6. Sir *W.-H. White* a cherché à montrer la place que les Mathématiques doivent occuper dans l'art de l'ingénieur. Sa conclusion est que les ingénieurs n'ont pas usuellement à trouver les solutions mathématiques complètes, mais qu'il doit toujours exister des relations amicales et suivies entre les mathématiciens et les ingénieurs.

7. M. *Maxime Bôcher* a défini le problème limite (*boundary*) à une dimension et a considéré quelques points de ce vaste sujet : la fonction de Green, les petites variations des coefficients, les résultats fondamentaux dus à Sturm et leurs récentes extensions, les expressions asymptotiques, la méthode des approximations successives, le principe du minimum, la méthode des équations intégrales et son état actuel, les développements de Sturm-Liouville de fonctions arbitraires, les développements de Birkhoff.

8. Sir *Joseph Larmor* a fait une Conférence *sur la Dynamique de radiation*. Parmi les travaux qu'il a résumés, citons ceux de Maxwell, Lord Rayleigh, Bartoli-Boltzmann, Poynting, Lorentz. Un Appendice contient l'extrait d'une lettre de T. Levi-Civita relative au modèle mécanique de Sir J. Larmor pour la pression de radiation.

Il y a eu 122 Communications dans les diverses Sections. Le nombre restreint de pages qui nous sont réservées pour présenter les deux gros Volumes, très bien imprimés, relatifs au Congrès ne nous permet pas de donner même les titres de chacune d'elles. D'ailleurs, elles sont très variées et chacune n'intéresse qu'un petit nombre des lecteurs du *Bulletin*.

Mais nous pouvons, sans crainte d'être contredit, affirmer que l'on pourra faire, dans ces *Proceedings*, une ample moisson de renseignements importants.

Er. L.

FUBINI (Guido). — Lezioni di Analisi matematica. Seconda edizione, interamente rifusa. (*Grande Biblioteca tecnica*.) 1 vol. in-8° jésus, VIII–541 pages. Società tipografico-editrice nazionale. Torino, 1915.

Les Leçons d'Analyse mathématique du Dr Guido Fubini, dont voici la deuxième édition, sont, à peu de chose près, la rédaction du cours qu'il professe depuis quelques années déjà, au *Reale Politecnico* de Turin. C'est donc avant tout un Livre d'enseignement. Ces Leçons correspondent au programme d'Analyse mathématique du Certificat de Mathématiques générales de nos Facultés. Je ne pense pas me tromper en écrivant qu'elles s'adressent à la même catégorie d'élèves. En tout cas, elles ont été écrites pour des jeunes gens qui ont des connaissances scientifiques élémentaires et pour qui les Mathématiques sont plus un moyen qu'une fin. La nécessité d'un tel enseignement est indéniable. En France, où il est de création récente, on l'a adjoint à l'enseignement supérieur des Facultés, c'est discutable ; à l'étranger, nous le voyons dans le cas actuel, il fait partie de la première année d'études dans les écoles techniques spéciales, et là est véritablement sa place. Mais quelle que soit l'opinion que l'on puisse avoir sur ce sujet, il est certain que l'exposition d'un tel programme comporte plus d'une difficulté.

Si l'on ne cherche pas à y approfondir les bases de l'Analyse, on n'en est pas moins amené à développer certaines questions fort délicates. Les notions de nombre incommensurable, de limite, de continuité, de convergence uniforme, par exemple, ne sont

pas toujours des plus faciles à faire saisir de manière à ne laisser dans l'esprit aucun doute possible qui viendrait l'assaillir au moment des applications. Étant donné le rôle que joue maintenant la théorie des ensembles dans bon nombre de questions, il devient de plus en plus difficile de ne pas en toucher quelques mots, même dans un Ouvrage élémentaire. L'Auteur l'a fort bien compris, en particulier dans l'exposition de la notion d'aire et de volume suivant la définition de MM. Peano et Jordan, extension naturelle de celle que l'on donne en Mathématiques élémentaires pour le volume de la sphère. Par son amplitude, ce programme touche à toutes les parties de l'Analyse : fonctions d'une ou plusieurs variables, dérivées et intégrales de tout ordre, équations différentielles et aux dérivées partielles. Les ingénieurs et physiciens auxquels est destiné cet enseignement doivent y trouver les outils mathématiques qui leur permettront d'exécuter des œuvres mathématiques dignes de ce nom et les jeunes étudiants, futurs professeurs, y puiser un enseignement utile, préparatoire à l'étude approfondie de l'Analyse.

On se rend compte alors des qualités que doit chercher à posséder un tel enseignement, qu'il soit verbal ou écrit. Savoir se limiter, réduire toutes les théories aux parties strictement essentielles est un point capital. Si en outre l'auteur, à côté de qualités réelles de mathématicien, possède ce don de savoir simplifier les questions les plus complexes et mettre de l'aisance dans l'exposition des problèmes les plus ardus, l'Ouvrage sera certainement profitable à ses lecteurs. Les habitudes d'extrême rigueur qui, à juste titre, se sont introduites dans les Mathématiques ont rendu peu à peu la lecture des ouvrages de science pure fort difficile. L'ingénieur et le physicien qui y cherchent les matières nécessaires à l'étude des phénomènes expérimentaux dont ils s'occupent risquent fort de se perdre dans les précisions dont ils sont remplis et de ne pas toujours trouver les quelques clairières auxquelles elles aboutissent. Est-ce à dire que, sous prétexte d'applications, il faut abandonner toute rigueur? Il y a un juste milieu à chercher et le mérite de l'auteur est de le trouver. Parmi les démonstrations dont sont susceptibles les théories exposées, il faut toujours choisir les plus simples. Si encore, malgré leur facilité relative, ces expositions contenaient quelques points délicats, l'auteur doit

prendre le sage parti, à l'encontre de certains écrivains dangereux qui les escamotent, de les mettre plutôt en lumière. Suivant les cas, ou bien il les élucidera dans quelques notes, ou les ayant signalés priera le lecteur d'admettre ce qu'il ne démontrera pas. Mais il doit éviter toute interprétation fausse de sa pensée et toute méprise.

En France, divers auteurs ont tenté d'écrire un traité de Mathématiques générales, destiné aux praticiens, ingénieurs ou physiciens. Il n'y en a pas, à ma connaissance, qui ait pu réaliser d'une façon intéressante et inédite le programme que j'exposais plus haut. Tous se ressentent de l'enseignement de nos classes de Mathématiques spéciales. Chez la plupart on a supprimé le caractère de rigueur et de précision qui fait la valeur de cet enseignement, on a conservé les résultats et les méthodes disposés dans un ordre à peu près arbitraire, en sorte que l'ensemble apparaît comme des notes absolument quelconques prises dans un bon cours préparatoire à nos grandes écoles.

Le Livre de M. Fubini mérite quelque attention. L'Auteur a cherché à se rapprocher des qualités que nous envisagions précédemment ; sa valeur mathématique, qu'attestent ses travaux antérieurs, lui permettait de tenter cet effort. Il répugne avant tout à introduire dans son enseignement des idées qui ne soient pas de première importance ; mais celles-là il les développe longuement ; ainsi la notion de nombre et de mesure des grandeurs sont à la base même de ses Leçons. Les autres il les exposera en notes ou dans des compléments variés. Certaines d'entre elles, intégrale de Riemann, calcul des variations, sont-elles bien utiles ? Ce qui frappe, à la lecture de ce Livre, c'est le souci de l'Auteur de faire saisir par ses lecteurs les principes qu'il pose, les définitions qu'il énonce, les démonstrations qu'il expose. Il n'a cessé, en écrivant ce Livre, de penser à ceux auxquels il était destiné. Présentant une notion nouvelle, telle que celle de limite, il en cherche de suite des applications physiques ou mécaniques, oscillations d'un pendule amorti par exemple. Il l'expose sous ses différents aspects, il ne veut pas qu'il reste un doute dans l'esprit de son lecteur. Peut-être trouvera-t-on que cela l'entraîne un peu dans quelques longueurs ; le Livre y perd en concision et là aussi le mieux est l'ennemi du bien. La répétition, qui est excellente

dans l'enseignement oral, alourdit souvent l'enseignement écrit. Songeant aussi à ceux qui pourraient, en le lisant, prendre goût aux Mathématiques, il a ouvert plus d'un aperçu intéressant sur des questions que, dans la première lecture, le lecteur peut facilement passer. C'est le cas du calcul de la fonction implicite par approximations successives. Peut-être pourra-t-on trouver que ces questions n'ont pas toutes un développement en rapport avec leur importance. La théorie des déterminants et des équations linéaires n'a pas, dans la pratique, tout l'intérêt que semble leur attacher l'Auteur. Là encore je crains que celui-ci ne se soit laissé entraîner à des considérations un peu hors de proportion avec le cadre qu'il s'était tracé et qu'il n'ait ainsi, par des notes insérées en petit caractère dans le cours de son texte, donné malgré tout quelque longueur à celui-ci ; citons par exemple la détermination de la limite supérieure des modules des racines réelles ou complexes d'une équation algébrique.

Au point de vue pédagogique, le Livre possède une réelle qualité. Il apparaît comme partagé, dans tous ses Chapitres en deux parties : le cours, les exercices. Je ne dis pas des problèmes, mais des exercices simples et clairs qui sont des applications directes des théories, montrent les moyens pratiques de s'en servir et fort souvent les complètent. L'Auteur a choisi ses exercices résolus ou proposés soit dans le domaine abstrait, soit très souvent dans le domaine concret. En particulier, il en a emprunté un certain nombre à la Physique et la Mécanique; ainsi il applique les séries entières à l'intégration du mouvement du pendule simple. Peut-être ces exercices n'ont-ils pas tous, à ce point de vue, une grande valeur éducative pour l'élève, mais est-ce absolument nécessaire?

L'ordre suivi par l'Auteur, dans son exposition, ne paraît pas être le meilleur. Certes, là, chacun a son idée, mais enfin on regrette, par exemple, de ne pas voir traiter simultanément les différentielles d'une fonction d'une variable et les différentielles totales, les formules de Taylor pour les fonctions d'une ou plusieurs variables, etc. Les points communs comme les divergences risquent d'échapper plus facilement aux élèves. Mais il ne faut pas oublier que l'enseignement de l'Auteur fait partie d'un ensemble d'études; les cours de Physique et de Mécanique que suivent simultanément ses élèves sont venus influencer, par des

nécessités plus ou moins pressantes, l'ordre d'exposition. On comprend à quel sentiment l'Auteur a obéi : il n'était pas entièrement libre, personne ne songerait à lui en faire un grief.

Sur bien des points, l'Auteur a rompu avec les démonstrations classiques et leur en a substitué d'autres qui lui sont, je crois, personnelles, ou auxquelles il a apporté tout au moins une certaine contribution. Il a eu souvent recours aux procédés intuitifs. Il introduit même dans l'étude de l'intégrale définie, ce qui peut être considéré comme une nouveauté dans un Livre élémentaire, la notion de fonction additive d'un ensemble.

Ce Livre écrit par un mathématicien de valeur sera, je pense, utile et profitable au lecteur. En tout cas il soutient facilement la comparaison avec certains Ouvrages français dont je parlais plus haut.

Ed. Ouivet.

ROUBAUDI (C.) — Traité de Géométrie descriptive, à l'usage des élèves des classes de Mathématiques spéciales et des candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure, aux Écoles Centrales des Arts et Manufactures, des Ponts et Chaussées et des Mines de Paris et de Saint-Étienne. 1 vol. grand in-8, VI-552 pages, 549 figures dans le texte. Paris, Masson et Cie, 1906.

C'est avec un réel plaisir que j'ai parcouru cet Ouvrage qui est destiné aux élèves de Mathématiques spéciales et aux candidats aux Grandes Écoles. Je suis persuadé qu'il sera très utile à ces jeunes gens et qu'il les intéressera.

Il est divisé en cinq Livres :

I. Principes de la Géométrie descriptive. Polyèdre.
II. Cônes et cylindres. Sphère. Trièdres.
III. Surfaces de révolution.
IV. Quadriques. Compléments.
V. Projections cotées. Surfaces topographiques.

Dans l'Introduction, l'Auteur examine la méthode des projections. Cette partie de l'Ouvrage appartient plutôt à la Géométrie pure ; tout le monde sait qu'entre les mains de Poncelet la

Perspective, qui jusqu'alors n'était utilisée que pour les constructions graphiques, devint une féconde méthode de découvertes en Géométrie. Quelques-unes de ces applications géométriques sont données dans cet Ouvrage; citons, par exemple, l'homologie, la propriété des triangles homologiques, du rapport anharmonique, etc. L'introduction des éléments à l'infini est établie d'une façon très nette. Ces notions géométriques sont, non seulement intéressantes au point de vue théorique, mais elles sont encore très utiles pour les constructions graphiques : l'Auteur les utilise fréquemment.

Bien que cet Ouvrage s'adresse à des élèves qui ont déjà fait de la Descriptive, il contient l'exposition des méthodes élémentaires; cette exposition est faite d'une façon très complète avec de nombreuses applications.

Au début du deuxième Livre, on trouve des propriétés générales sur les courbes gauches algébriques, sur leur projection cylindrique ou conique dans les différents cas qui peuvent se présenter suivant la position du centre de projection. L'étude de ces cas particuliers a une grande importance au point de vue graphique, puisqu'elle permet de voir la forme de la projection dans le voisinage de certains points singuliers. La théorie du développement des cônes et des cylindres est faite d'une façon rigoureuse grâce à l'introduction des infiniment petits; je signale aussi une relation entre le rayon de courbure d'une courbe et de sa transformée par développement, relation qui permet de trouver les points d'inflexion de la tranformée. Dans l'intersection des cônes et des cylindres, l'Auteur ne s'est pas borné aux théories générales; il a fait une étude complète de tous les cas particuliers qui peuvent se présenter.

Pour l'étude descriptive des quadriques, M. Roubaudi rappelle un certain nombre de propriétés établies en Géométrie analytique. Il est tout naturel de faire appel à ces notions qui sont familières aux élèves auxquels cet Ouvrage est destiné; on doit, lorsqu'on veut atteindre un but, utiliser toutes les ressources dont on dispose. Je ne suis pas de ceux qui désirent établir une cloison étanche entre l'Algèbre et la Géométrie. Toutefois, j'aurais vu avec plaisir une démonstration purement géométrique de l'existence des deux systèmes de génératrices de l'hyperboloïde à une nappe. Mais

n'oublions pas que cet Ouvrage est un livre d'enseignement; M. Roubaudi connaît, bien mieux que moi, les élèves auxquels il s'adresse et il a certainement de bonnes raisons pour s'imposer l'obligation de ne pas dépasser telle ou telle limite.

Les notions élémentaires sur la courbure des lignes tracées sur une surface (théorème de Meusnier, d'Euler, etc.) font, aujourd'hui, partie de l'enseignement des Mathématiques spéciales. L'Auteur s'en est servi avec succès pour donner la solution d'un certain nombre de problèmes graphiques : construction de l'indicatrice, du rayon de courbure de la courbe de contour apparent d'une surface sur un plan, des tangentes au point double de l'intersection de deux surfaces tangentes, etc.

La loi de Chasles sur la variation du plan tangent à une surface réglée le long d'une génératrice est établie d'une façon purement géométrique. La théorie du raccordement de deux surfaces réglées le long d'une génératrice, qui s'en déduit, est traitée d'une façon complète avec des applications à certains problèmes de Descriptive. Je signalerai encore, dans cet ordre d'idées, la construction des lignes de striction de l'hyperboloïde.

Chaque Chapitre de l'Ouvrage est suivi de l'énoncé de nombreux problèmes. Dans la plupart de ces questions posées, il y a à résoudre d'abord un problème de géométrie. C'est qu'en effet, comme le fait remarquer l'Auteur dans la Préface : « La Géométrie descriptive ne peut se séparer de la Géométrie pure. »

A la fin de l'Ouvrage se trouvent les sujets d'épures proposés aux concours de l'École Polytechnique et de l'École Centrale depuis 1905, et de l'École Normale supérieure depuis 1909. En outre, ce qui fera plaisir aux professeurs, l'Auteur y a ajouté un choix de cinquante-deux énoncés d'épures, précédés d'une brève instruction sur leur exécution. Toutes ces épures ont été faites et donnent lieu à des exercices graphiques instructifs et intéressants.

C. Guichard.

MONTESSUS (R. de). — Exercices et Leçons de Mécanique analytique. *Centres de gravité, attraction, potentiel, moments d'inertie, dynamique des corps solides et des systèmes, les fonctions elliptiques dans le domaine réel.* 1 vol. iv-334 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1915.

Parmi les jeunes gens qui abordent les études supérieures, les uns se sentent plutôt attirés vers les réalités, les autres donnent la préférence aux problèmes abstraits, susceptibles de solutions définitives. Bien rares sont ceux qui peuvent se flatter d'exceller dans les deux directions ; il faut qu'un jour ou l'autre leur choix se prononce. Si l'on en juge par les questions posées dans les Facultés françaises, l'enseignement de la Mécanique rationnelle, s'adressant à la fois à ces deux catégories d'étudiants, vise à empêcher qu'il ne se produise entre elles une scission trop prompte. Chez les futurs physiciens, il maintient le goût des solutions nettes et quantitatives. Il engage les futurs mathématiciens à porter leurs efforts sur les combinaisons analytiques qui se sont montrées aptes à représenter les phénomènes réels et qui se trouvent être aussi les plus fécondes pour la théorie.

Il est assez visible que M. de Montessus est, par ses préférences, plutôt analyste. Les questions de frottement, d'élasticité, de viscosité, souvent imposées par le spectacle de la nature, sont évitées dans le Livre qu'il nous offre. Il est vrai qu'elles ne comportent guère de réponses élégantes et brèves et sont rarement matière à examens. Nos candidats sont invités à montrer leur savoir sur des êtres évidemment fictifs, points massifs, mais sans dimension, corps homogènes et indéformables, lignes et surfaces parfaitement polies. Comme dédommagement de ces restrictions voulues, on acquiert la faculté d'aller jusqu'au bout des conséquences, de soutenir le raisonnement par des images géométriques extrêmement claires, d'élucider des questions d'apparence très variée par des artifices analytiques réguliers et uniformes, parmi lesquels figure en première ligne le changement de variables de Lagrange.

L'étudiant qui aura suivi M. de Montessus dans les solutions qu'il développe, qui aura fait l'application des mêmes procédés aux problèmes seulement énoncés, aurait peut-être tort de se croire très avancé dans l'intelligence des phénomènes physiques.

Mais il aura sûrement perfectionné ses dons de calculateur, s'ils ne sont pas déjà remarquables. Il aura conquis la dextérité nécessaire dans le maniement d'un outil très souple et à peu près infaillible entre les limites où son emploi est légitime. Les énoncés habituellement donnés en composition écrite dans nos Universités n'auront plus, pour le travailleur ainsi préparé, ni mystère ni appréhension.

Assez souvent il aurait été possible d'arriver plus vite au but, par des aperçus géométriques à peu près intuitifs. Cela se remarque, en particulier, au Chapitre des chocs et percussions, où l'emploi des quantités de mouvement semble avoir été proscrit. Le physicien sera toujours assez tôt séduit par ces expédients adaptés aux circonstances, et il est bon qu'il soit exercé d'abord aux méthodes générales.

Dans de rares occasions nous avons trouvé matière à une critique un peu sérieuse. Le n° 48 (p. 57) serait, à notre avis, à supprimer. Il jette sur un résultat établi un peu plus haut (n° 38, p. 50) un doute injustifié, qu'une analyse exacte ne confirmerait pas. Au n° 108 (p. 152), on décompose la force vive d'un solide, en mettant à part la force vive de la masse totale supposée réunie en un point O. Ce théorème, souvent employé quand le point O est le centre de gravité, n'est pas exact si O a été arbitrairement pris dans le corps, comme le texte pourrait le laisser supposer. La transformation de Landen, mentionnée seulement page 282, aurait pu être formellement indiquée en quelques lignes. Son utilité pratique est plus certaine que celle des périodes imaginaires, qui ont fait l'objet de développements assez longs.

On doit, à ce qu'il nous semble, louer d'une façon générale la clarté de la disposition typographique, la division des sujets, l'heureux choix des notations, la persévérance révélée dans l'exécution complète de calculs épineux, comme celui du centre de gravité de l'aire d'un demi-ellipsoïde. Le meilleur maître est celui qui possède l'art de décider les élèves, au besoin par son exemple, à se donner beaucoup de peine.

P. Puiseux.

MANCINI (G.). — *L'Opera* « De Corporibus regularibus » *di* Pietro Franceschi *detto* Della Francesca *ursurpata da fra Luca Pacioli.* Memoria con dodici Tavole. (*Reale Accademia dei Lincei*, Anno CCCXII, 1915.) 1 vol. in-4 jésus, 144 pages; 17 planches. Roma, Pio Befani; 1915.

Ce Mémoire de M. G. Mancini, précédé d'un Rapport de M. G. Loria dont nous ferons largement usage dans cette analyse, a été présenté, sous les auspices de MM. Loria et Volterra, à la Classe des Sciences morales, historiques et philologiques de l'Académie des Lincei. Il contient le texte encore inédit d'un manuscrit de la bibliothèque du Vatican ([1]) intitulé *Petri pictoris Burgensis De quinque corporibus regularibus*, œuvre mathématique qui doit être attribuée, sans aucun doute, après les arguments absolument convaincants que donne M. Mancini au sujet de cette attribution, au célèbre peintre Pietro Franceschi, dit Della Francesca, de Borgo San-Sepolcro, mort en 1492 à un âge très avancé.

L'intérêt de cette publication réside surtout dans l'étude critique très documentée de M. Mancini qui précède l'édition du manuscrit. Cette étude constitue un réquisitoire terriblement précis à l'encontre de Luca Pacioli, célèbre mathématicien du xve siècle auquel tous les historiens des Mathématiques, depuis Montucla jusqu'à Cantor, ont assigné une place éminente parmi les savants qui contribuèrent à l'évolution de cette partie des Mathématiques qui devint finalement l'Algèbre. Fra Luca Pacioli, de l'ordre des Franciscains, naquit, comme le peintre Della Francesca, à Borgo San-Sepolcro; il enseigna dans diverses Universités italiennes; son œuvre principale, la *Summa* ([2]), est un des premiers livres de Mathématiques qui furent imprimés. On s'accorde en général pour estimer que c'est l'œuvre d'un compilateur plutôt que celle d'un créateur : mais ce Livre est des plus précieux pour l'histoire des Mathématiques, par la vue d'ensemble qu'il donne sur l'état de la Science mathématique au xve siècle, et il dut être très répandu à son époque puisque, imprimé à Venise en 1494, il fut réimprimé dès 1523. Outre la *Summa*, Luca Pacioli écrivit le traité de la

([1]) Ce manuscrit est catalogué sous la rubrique. *Cod. Vaticano-Urbinate* 632.

([2]) *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, Venise, 1494.

Divina Proporzione, imprimé en 1509 et dont les figures, représentant en perspective les corps réguliers, furent, nous dit l'Auteur, dessinées par Léonard de Vinci.

Et c'est à propos de la *Divina Proporzione* que s'est posée depuis longtemps une question de propriété scientifique que M. Mancini paraît bien avoir résolue d'une façon définitive. Dès le XVIe siècle, Vasari, dans sa *Vita di Pier Della Francesca*, accusa Luca Pacioli d'avoir usurpé sa réputation de mathématicien au détriment de son compatriote et maître Della Francesca, qui l'aurait initié aux Mathématiques et dont il aurait, sans aucun scrupule, fait imprimer les œuvres sous son propre nom, après la mort du peintre et même pendant la vieillesse de ce dernier devenu aveugle. Vasari va jusqu'à traiter Luca Pacioli de quelqu'un qui aurait recouvert sa peau d'âne des dépouilles glorieuses du lion, *attribuendosi l'altrui pregio ricuopre la pelle dello asino con le gloriosissime spoglie del leone*. Plusieurs auteurs ont entrepris, depuis lors, de justifier Luca Pacioli du jugement porté sur lui par Vasari. La plupart ont repoussé, ou même négligé purement et simplement, cette accusation portée contre un homme qui enseigna les Mathématiques dans les villes les plus célèbres de l'Italie et qui fut honoré de l'amitié, de l'estime et même de la collaboration de Léonard de Vinci. Mais aucun érudit n'avait cherché à examiner les manuscrits mêmes de Pietro Della Francesca et à les comparer aux œuvres de Pacioli.

C'est seulement en 1903 que M. Pittarelli, professeur de Géométrie descriptive à l'Université de Rome, voulant déterminer la place qui revient à Pietro Della Francesca dans l'histoire de la Perspective, fit au Congrès international des Sciences historiques de Rome une Communication sur l'œuvre célèbre *De Perspectiva pingendi* de ce peintre et annonça incidemment à cette occasion qu'il y avait *identité parfaite* entre un manuscrit de la bibliothèque du Vatican, provenant des Archives du Duché d'Urbino, et attribué à Della Francesca, et l'un des traités constituant la *Divina Proporzione* de Luca Pacioli. M. Pittarelli revint sur cette question cinq ans après au quatrième Congrès des Mathématiciens à Rome [1].

Après cette Communication de M. Pittarelli, M. Mancini a entre-

---

[1] *Atti del IV° Congresso dei Matematici*, t. III, p. 436 (Rome, 1909).

pris l'étude qui fait l'objet de son Mémoire et il vient d'éditer le manuscrit encore inédit de Pietro Della Francesca. Il établit d'abord, sans aucune objection possible, que le traité *De Corporibus regularibus* doit être attribué au célèbre peintre et même que le manuscrit du Vatican, unique exemplaire connu de ce traité, a été sinon entièrement écrit par l'auteur, du moins revu, corrigé et annoté par lui : ceci résulte d'une comparaison d'écritures avec des autographes authentiques de Della Francesca qu'un profane même peut effectuer facilement sur les belles phototypies qui ornent le Mémoire de M. Mancini. En second lieu, M. Mancini donne le texte complet du traité d'après le manuscrit du Vatican, de manière que chacun puisse le comparer à la *Divina Proporzione* de Luca Pacioli. Il résulte, paraît-il, de cette comparaison que la partie principale de la *Divina Proporzione* n'est que la traduction à peu près textuelle, en un italien barbare, mélange de tous les dialectes de l'Italie, du traité latin *De Corporibus regularibus*. Les problèmes traités dans ce dernier Ouvrage sont relatifs à des polygones et à des polyèdres, le plus souvent réguliers, et ils ont pour but le calcul de certaines longueurs, aires ou volumes en partant de données numériques : ce sont des problèmes conduisant à des équations du premier ou du second degré. Or les deux Ouvrages contiennent non seulement les mêmes matières, les mêmes problèmes traités dans le même ordre, mais encore les mêmes données numériques. Ainsi que le fait remarquer M. Loria, ceci confirme l'opinion émise par divers auteurs d'après laquelle la loyauté scientifique serait un sentiment d'origine moderne; les questions de priorité scientifique et de propriété littéraire n'existaient pour ainsi dire pas pour les auteurs de l'époque de Pacioli qui citaient rarement leurs sources. Mais aucun des contemporains de Luca Pacioli n'est tout de même allé aussi loin que lui dans cette voie, puisqu'il en est arrivé à publier textuellement sous son propre nom l'œuvre du célèbre peintre, son compatriote.

M. Mancini donne des détails intéressants sur la vie et l'œuvre mathématique du peintre Della Francesca. Comme beaucoup d'autres artistes du XVe siècle, comme Léonard de Vinci un peu plus tard, il cultiva les sciences exactes et, dans son traité *De Perspectiva pingendi*, il établit les bases mathématiques de la Perspective. M. Mancini ne pense pas toutefois qu'il ait enseigné

les Mathématiques et que Luca Pacioli, son compatriote, ait pu être, à proprement parler, son élève, comme l'écrit Vasari, qui fait ressortir avec véhémence l'ingratitude du disciple, devenu le plagiaire de son maître.

Au sujet de l'Ouvrage lui-même *De Corporibus regularibus*, M. Loria pense, en l'absence de toute référence, que Pietro Della Francesca s'inspira, non seulement d'Euclide, mais peut-être aussi d'Archimède. L'un des problèmes traités est la recherche du volume commun à deux cylindres droits égaux dont les axes se croisent à angle droit : or c'est précisément là l'un des problèmes de calcul intégral résolus par Archimède dans l'œuvre nouvelle découverte il y a quelques années à Constantinople. Un nouveau problème est ainsi posé à la sagacité des érudits : Pietro Della Francesca aurait-il eu connaissance de cette œuvre d'Archimède?

Le Mémoire de M. Mancini est édité avec soin : il est accompagné de planches contenant les figures du manuscrit et de phototypies reproduisant quelques pages du manuscrit ainsi que d'autres écrits du célèbre peintre ; il contient enfin de belles reproductions de trois tableaux de Della Francesca; dans deux de ces tableaux, le peintre s'est représenté lui-même sous les traits de l'un des personnages du tableau; le troisième tableau représente son compatriote Fra Luca Pacioli, expliquant un problème au duc d'Urbino, devant une table sur laquelle se trouvent un dodécaèdre régulier et quelques instruments de mathématiques.

S. LATTÈS.

RICHARDSON (ROBERT-P.) and LANDIS (EDWARD-H.). — FUNDAMENTAL CONCEPTIONS OF MODERN MATHEMATICS. Variables and Quantities with a discussion of the general conception of functional relation. 1 vol. in-8, XXI-216 pages. Chicago and London, The Open Court, 1916.

Les Auteurs de cet Ouvrage ont attiré l'attention, à son sujet, avant sa publication proprement dite. En juillet 1915 ils publiaient, dans *The Monist*, une étude étendue intitulée *Numbers, Variables and Mr. Russel's Philosophy*, laquelle pouvait déjà laisser présager des développements plus étendus sur un tel sujet. De plus, en réimprimant, à part, l'étude en question (Chicago and

London, 1915), ils la faisaient suivre d'une annonce du présent Ouvrage ou, plus exactement, d'un plan fort détaillé relatif à une sorte d'encyclopédie relative aux principes des Mathématiques. Le projet de cette encyclopédie comprenait les divisions suivantes : Variables et quantités, Domaines, Limites, Continuité, Transfini, Symboles, Algèbre et équations, Transformations, Relations fonctionnelles, Différentiation, Intégration, Continuité fonctionnelle, Fonctions analytiques. Le Volume qui paraît aujourd'hui est relatif à la première de ces treize rubriques.

L'œuvre entreprise paraît surtout de nature philosophique : c'est un discours à peu près dépourvu de formules, d'un intérêt dont nous ne pouvons guère donner idée que par quelques citations faites un peu au hasard. Ainsi (p. 14) un ordre de succession d'instants correspond aussi bien au déplacement d'un point décrivant une courbe qu'à l'expansion d'un volume gazeux. Ceci est juste, car, dans les applications, nous voyons que le rapport du déplacement au temps donne une *vitesse* et le rapport de l'expansion au temps la notion analogue de *flux*. Après des études concernant l'ordre et où l'on retrouve la notion du « bien ordonné » de Cantor, les Auteurs déplorent la mauvaise qualité de la terminologie relative aux principes (p. 24). Ils proposent la notion de *sortes* de quantités, deux quantités de même sorte étant susceptibles d'addition effective ou symbolique. Ils peuvent aisément passer de là à la constitution des quantités vectorielles les plus générales. A signaler aussi des lignes bien intéressantes sur le choix des zéros (p. 85) dont tout l'arbitraire est marqué par des comparaisons thermométriques.

L'endroit capital où les Auteurs semblent donner une opinion nettement personnelle est celui où ils critiquent d'une manière serrée (et quelquefois sévère) les conceptions du nombre provenant de l'idée de classe, ce qui n'est pas plus clair, pour beaucoup d'esprits, et joue cependant un rôle considérable pour l'école Peano-Russell. Nous n'éprouvons pas le besoin de prendre parti ; pour les logiciens au courant de ces dilemmes, nous pronostiquons simplement un renouveau d'intérêt suffisamment justifié par les pages en question.

L'Ouvrage se termine par une discussion sur la conception générale de relation fonctionnelle. C'est une anticipation sur

l'une des douze Parties devant faire suite à la première. On y trouve la critique des notions de fonctions chez Leibnitz, Bernoulli, Euler, D'Alembert, Dirichlet, etc. On y trouve même « l'erreur de Riemann », car Riemann aurait donné, pour les fonctions de variable complexe, une définition trop étroite en assignant l'unicité de la dérivée. Dans de tels cas le mot *erreur* semble un peu tranchant; si une définition, même imparfaite au point de vue strictement logique, donne des développements étendus, cohérents, où l'on pourrait corriger partout la forme du langage sans en détruire le fond, ce n'est pas, à notre humble avis, une erreur. Nous ne voyons guère d'erreur que là où l'on peut faire apparaître le rôle nettement destructif d'une contradiction.

Mais, encore une fois, il faut laisser à MM. Richardson et Landis la responsabilité d'une entreprise grandement originale et souhaiter, comme ils le souhaitent eux-mêmes, que leurs lecteurs fournissent une collaboration étendue à l'achèvement de la grande œuvre critique projetée.

La R.

MÉLANGES.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DES ÉPOUX MITTAG-LEFFLER.

Extrait du TESTAMENT DRESSÉ ET SIGNÉ LE 16 MARS 1916 PAR G. MITTAG-LEFFLER ET SIGNE MITTAG-LEFFLER, NÉE AF LINDFORS.

Nous soussignés, modifiant le testament mutuel dressé entre nous le 6 janvier 1883, déclarons ici notre dernière volonté, qui est de léguer tous nos biens, pour lui revenir après notre mort à tous deux, à une fondation qui prendra le nom de : INSTITUT MATHÉMATIQUE DES ÉPOUX MITTAG-LEFFLER.

Cet Institut aura pour tâche de conserver aux Mathématiques *pures* et de développer encore, dans les quatre pays scandinaves, Suède, Danemark, Finlande et Norvège, mais tout particulièrement en Suède, la position qu'elles y occupent aujourd'hui,

comme aussi de faire connaître et estimer à sa juste valeur, en dehors de leurs frontières, l'apport de ces pays dans la sphère la plus haute de la vie de l'esprit.

Nous proscrivons expressément, dans l'accomplissement de cette tâche, toute considération autre que celles qui viennent d'être indiquées. Il ne devra être tenu compte, par conséquent, ni des relations personnelles d'amitié, ni du désir de prêter à qui que ce soit, dans des circonstances difficiles, un appui pécuniaire. Il ne devra pas être tenu compte davantage de vœux ou de besoins pratiques, de questions d'examen, des opinions politiques, ou de considérations qui pourraient être tirées de sciences autres que les Mathématiques *pures*.

L'Institut s'acquittera de sa tâche :

1° En vouant des soins attentifs à l'entretien et à l'enrichissement de la bibliothèque mathématique du soussigné G. Mittag-Leffler, avec tout ce qui y appartient en fait de manuscrits, de portraits, de collections de famille, de souvenirs de famille et d'autres objets.

La bibliothèque continuera d'être déposée dans la grande villa de pierre, sise dans notre propriété du quartier n° 16, dit Midgard, à Djursholm, et ne devra être incorporée à aucune autre collection de livres. La villa a été édifiée et aménagée en vue de servir de local à la bibliothèque et contient, à cet effet, plusieurs chambres de travail où les chercheurs pourront utiliser en toute tranquillité les ressources de la bibliothèque.

La partie peu considérable de la villa servant actuellement de logement sera, après notre mort, également affectée à la bibliothèque.

La bibliothèque sera ouverte à tous les mathématiciens, mais, pour éviter des abus, sur autorisation du président du Comité directeur ou du directeur de l'Institut. Les livres ne pourront pas être emportés au dehors et ne devront être utilisés que dans les locaux de la bibliothèque.

2° En accordant des bourses, pour des études dans leur pays ou hors de leur pays, à des jeunes gens des deux sexes appartenant aux quatre pays susnommés et ayant fait preuve d'aptitudes réelles pour les recherches et les découvertes dans le domaine des Mathématiques *pures*.

En outre, les ouvrages d'une importance jugée supérieure à la moyenne, ayant pour auteurs des ressortissants de ces quatre pays, pourront faire l'objet d'une distinction, qui consistera en une médaille d'or, du même module et du même titre que la petite médaille Nobel et, tant que des exemplaires s'en trouveront disponibles, en une série aussi complète que possible des *Acta mathematica*, dont les volumes, munis d'une belle reliure, porteront le nom de l'auteur couronné.

3° En décernant des prix pour les découvertes réellement dignes de ce nom dans le domaine des Mathématiques *pures*. Ces prix devront être donnés sans égard à la nationalité du lauréat. Celui-ci pourra appartenir à n'importe quel pays, et les ressortissants des quatre pays scandinaves ne jouiront, sur ce point, d'aucun privilège. Le prix ne devra être décerné que pour une découverte apportant des idées neuves d'une portée telle que la Science en reçoive une nouvelle impulsion. Il est désirable, toutefois, que le prix puisse être décerné une fois au moins tous les six ans. Ce prix consistera en une médaille d'or grand module artistement exécutée, et en un diplôme d'un caractère également artistique, motivant scientifiquement l'attribution du prix; enfin en une série aussi complète que possible des *Acta mathematica*, dont les volumes, munis d'une solide et belle reliure, porteront le nom du lauréat. Celui-ci sera invité à se rendre personnellement à Djursholm, afin d'y recevoir le prix. Il touchera, à cet effet, une indemnité de voyage convenable, dont le montant sera fixé chaque fois. Le prix lui sera remis au cours d'une cérémonie solennelle organisée dans la grande salle de la bibliothèque.

4° Lorsque les revenus annuels de l'Institut dépasseront le montant ci-dessous indiqué, il pourra être créé, outre le poste de directeur, d'autres emplois rétribués, dont les titulaires auront pour tâche d'exercer une activité de plume et d'enseignement exclusivement scientifique, dans le domaine des Mathématiques *pures*.

Aux dispositions qui précèdent s'ajoutent les suivantes :

A. Le Comité directeur de l'Institut se composera des membres suédois de la première classe (Mathématiques pures) de l'Académie royale des Sciences, ainsi que, pendant leur vie, de

MM. les professeurs Ivar Fredholm et N. E. Nörlund. Sera, en outre, de droit membre du Comité, le directeur ci-dessous nommé....

B. Dès que faire se pourra, il sera fait appel, pour occuper le poste de directeur scientifique et d'administrateur de l'Institut, à un mathématicien, d'un rang éminent, paraissant particulièrement qualifié pour cette charge, et dont l'activité devra s'exercer entièrement dans les limites de ses recherches scientifiques personnelles et tendre, en même temps, au but poursuivi par l'Institut. Il devra, par suite, assister de ses conseils tous ceux qui voudront se livrer à des études scientifiques à l'Institut. Il devra également, lorsqu'il y aura avantage à le faire, mais toujours dans un but exclusivement scientifique, faire des cours pour un nombre limité d'auditeurs réellement doués et prenant un vivant intérêt à ses leçons....

Sa nomination aura lieu, sur présentation du Comité directeur, par Sa Majesté le Roi, si, comme nous osons l'espérer, Sa Majesté daigne y consentir....

E. Tous les six ans au moins, l'Institut célébrera sa séance solennelle.

Il serait désirable que le jour de la cérémonie fût choisi de manière à coïncider avec la date de la réunion à Stockholm du Congrès des mathématiciens scandinaves.

En terminant, je soussigné, G. Mittag-Leffler, tiens à déclarer que le modèle que j'ai eu devant les yeux, pour l'Institut fondé par ma femme et par moi, est l'Institut Pasteur à Paris. Mieux qu'aucune université et qu'aucune académie actuelle, en effet, cet Institut me paraît avoir rempli la mission d'un établissement appelé à être exclusivement un foyer de recherches scientifiques. Les universités ont partout, à côté de leur tâche scientifique, celle — qui nuit souvent et singulièrement à la première — de former des maîtres et des fonctionnaires. Quant aux académies, qui répondaient le mieux jadis aux exigences purement scientifiques, elles souffrent de deux inconvénients : d'une part, l'activité propre de leurs membres s'exerce, en général, hors de leur sein et, d'autre part, même dans les cas exceptionnels où il en est autrement, il leur manque le stimulant que le savant trouve, pour ses investiga-

tions, dans l'obligation de guider ou d'assister d'autres chercheurs. Notre Institut n'est pas rattaché à un établissement où des recherches expérimentales pourraient être poursuivies, mais par contre — ce qui est conforme aux besoins des Mathématiques *pures* — à une bibliothèque spéciale d'une grande richesse....

Notre testament doit son origine à la vivante conviction qu'un peuple qui n'accorde pas aux Mathématiques un rang élevé dans son estime ne sera jamais en état de remplir les plus hautes tâches civilisatrices et de jouir, par suite, de la considération internationale qui, elle aussi, constitue à la longue un moyen efficace de conserver notre situation dans le monde et de sauvegarder notre droit à vivre notre propre vie....

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Abenbéder. — *Compendio de Algebra.* Texto árabe, Traducción y Estudio por José A. Sánchez Pérez (Junta para ampliación de estudios e investigaciones cientificas *Centro de estudios históricos.*) 1 vol. in-8, XLVIII + 117 + 76 (texte arabe) pages. Madrid, Moreto, 1, 1916. Precio : 6 pesetas.

Andoyer (H.). — *Nouvelles Tables Trigonométriques Fondamentales* (*Valeurs naturelles*). Ouvrage publié à l'aide d'une subvention accordée par l'Université de Paris (Fondation Commercy). Tomes I et II : 2 vol. in-4° jésus, XVIII-341 pages et III-275 pages. Paris, A. Hermann et Fils, 1915 et 1916. Prix : 24fr et 18fr.

Coolidge (Julian Lowell). — *A Treatise on the Circle and the Sphere.* 1 vol. gr. in-8, 603 pages. Oxford, at the Clarendon Press, 1916. Price : 21 S.

Viti (Rodolfo). — *Elementi di Scienza attuariale per gli Istituti tecnici.* Teorie matematiche elementari della Finanza e della Previdenza. 1 vol. gr. in-8, x-285 pages. Rocca S. Casciano (Bologna); Licinio Cappelli, Libraio Editore di S. M. la Regina Madre; 1916. Prezzo : L. 7.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ENRIQUES (Federigo). — Questioni riguardanti le Matematiche elementari raccolte e coordinate da F. Enriques. — Volume I : Critica dei principii. Articoli di U. Amaldi, R. Bonola, F. Enriques, D. Gigli, A. Guarducci, G. Vailati, G. Vitali. 1 vol. in-8 de VIII-649 pages. Bologna, Nicola Zanichelli, 1912.

M. Enriques a publié en 1900 un recueil d'Articles relatifs aux principes de la Géométrie, aux méthodes de résolution des problèmes de géométrie et en général aux questions d'ordre philosophique ou pédagogique qui se rattachent à l'étude de la Géométrie. Ces Articles écrits par divers Auteurs, parmi lesquels M. Enriques lui-même, avaient été recueillis et coordonnés par ce dernier sous le titre de *Questioni riguardanti la Geometria elementare* (1).

La deuxième édition de cet Ouvrage paraît maintenant en deux Volumes avec un titre un peu différent. Le sujet a été élargi et à côté des questions relatives à la Géométrie figurent des Articles nouveaux sur des questions concernant l'Arithmétique, l'Algèbre ou l'Analyse, de sorte que, si l'esprit de l'œuvre dirigée par M. Enriques n'a pas changé, la portée en a été considérablement augmentée.

L'étude des Mathématiques élémentaires soulève une foule de questions sur lesquelles une lumière complète ne peut être projetée qu'en faisant appel aux théories les plus élevées et les plus récentes de l'Algèbre ou de l'Analyse. Il suffit pour s'en convaincre de songer au problème de la quadrature du cercle et aux autres problèmes relatifs à la possibilité de certaines constructions géométriques à l'aide d'instruments donnés : la réponse définitive aux questions posées dans ces problèmes n'a pu être apportée que par la théorie des équations algébriques, la notion de corps de nombres, la classification des nombres en nombres algébriques et en nombres transcendants. Il en est de même en ce qui concerne l'étude des principes de la Géométrie ; la théorie des groupes, l'étude des

---

(1) Cet Ouvrage a été analysé dans le *Bull. des Sc. math.*, t. XXIV, p. 168-171.

formes différentielles, la notion de courbure, l'étude des surfaces à courbure constante ont permis d'élucider certains d'entre eux et de comprendre la possibilité des Géométries non euclidiennes ; le rôle de certains autres résulte de l'étude du continu numérique à une ou plusieurs dimensions.

Le but de l'Ouvrage de M. Enriques est d'élucider les questions ou les problèmes qui se présentent ainsi dans l'étude des Mathématiques élémentaires, en faisant appel aux théories d'ordre plus élevé auxquelles se rattachent ces questions ou ces problèmes. On s'est beaucoup préoccupé dans tous les pays depuis quelques années de la formation pédagogique des futurs professeurs de l'enseignement secondaire. Ceux-ci font dans les Universités les études supérieures de Mathématiques qui doivent leur permettre de dominer leur enseignement ; mais, au cours de ces études, ils n'ont pas toujours l'occasion de réfléchir suffisamment aux Éléments qu'ils auront à enseigner. N'ayant pas revu ces éléments depuis l'époque où ils étaient eux-mêmes de tout jeunes élèves, ils n'ont plus eu l'occasion de se trouver en présence de difficultés qui ne leur apparaissaient alors que très vaguement et que souvent ils ne soupçonnaient même pas ; mais ils retrouveront ces difficultés et elles leur apparaîtront dans toute leur étendue lorsque, devenus professeurs, ils auront à enseigner les Mathématiques ; alors, tout en s'attachant à ne soulever aucune question incompréhensible pour les jeunes intelligences qu'ils auront à former, et en se gardant de soulever des doutes sur la valeur des principes dans l'esprit de leurs jeunes élèves, ils ne voudront pas éluder certaines questions qu'ils seront fatalement conduits à se poser au cours de leur enseignement. Est-il admissible par exemple qu'après ses études universitaires, consacrées surtout il est vrai à l'étude de l'Analyse, un professeur ne soit pas en état de savoir pourquoi le polygone régulier de sept côtés ne peut pas être construit à l'aide de la règle et du compas et quels sont exactement les problèmes de géométrie résolubles à l'aide de ces instruments ou encore quelles sont les équations résolubles par radicaux carrés ? Ces questions et beaucoup d'autres de la même nature, ou de nature différente, qui viennent fatalement à l'esprit de ceux qui enseignent les Mathématiques, demandent une réponse complètement satisfaisante pour l'esprit du maître, et les études que ce dernier a faites

ne lui permettent pas toujours d'obtenir cette réponse, car les questions ainsi posées ne rentrent pas toujours dans le cadre des enseignements qu'il a reçus dans les Facultés des Sciences.

De plus, une même question ne s'est pas présentée à toutes les époques sous la même forme : aussi M. Enriques et ses collaborateurs ont-ils attaché une grande importance au développement historique des doctrines ; en dehors de la large vision qu'on a ainsi sur la formation de ces doctrines, il est important, lorsqu'on doit s'adresser à de jeunes esprits, de connaître la forme simple, rudimentaire, primitive sous laquelle se sont présentées au début certaines parties de la Science et de savoir à quel moment, sous quelles influences et sous quelles formes se sont introduites les complications nécessaires. Une des lois fondamentales de la Biologie veut que, dans le développement de l'embryon, on retrouve en abrégé l'histoire de l'espèce entière. Si cette loi s'applique aussi, au delà de la vie embryonnaire, au développement de la pensée de l'enfant, il est bon que l'éducateur connaisse l'histoire de la science qu'il enseigne, afin de mieux adapter la forme de son enseignement à la loi naturelle du développement intellectuel de l'enfant et d'obtenir ainsi les meilleurs résultats avec le moins d'effort possible, en n'oubliant pas toutefois qu'il s'agit de franchir rapidement les étapes et de repasser en quelques années par les points de vue successifs que la pensée humaine a mis des siècles à franchir.

Ainsi, dans le Livre publié par M. Enriques, les Mathématiques élémentaires sont envisagées au point de vue à la fois philosophique et historique : cette histoire des doctrines aboutit nécessairement aux théories mathématiques les plus récentes. Celles-ci seront le plus souvent déjà connues du lecteur : aussi, M. Enriques et ses collaborateurs ne font-ils que rappeler les résultats, lorsque les théories envisagées font partie des études universitaires classiques, et ils insistent alors surtout sur le parti qu'on peut tirer de ces résultats pour résoudre les questions qui s'y rattachent dans l'étude des Éléments et qu'on était obligé de laisser sans réponse satisfaisante tant qu'on ne voulait pas faire appel à des théories plus élevées. Au contraire, certaines théories moins classiques, telles que la théorie des nombres complexes à n unités, sont traitées avec toutes les démonstrations nécessaires. Dans la préface du Tome I,

M. Enriques résume en ces mots le but que se sont proposé les Auteurs : « Élever l'esprit philosophique de ceux qui enseignent les Mathématiques et ouvrir à leurs yeux une vision plus large des doctrines et du progrès historique de la Science. » L'Ouvrage que nous analysons a donc sa place toute désignée dans les bibliothèques de nos Facultés et dans les bibliothèques de professeurs de nos Lycées. Il rendra les plus grands services à ceux des étudiants ou des professeurs qui connaissent la langue italienne et qui, il faut l'espérer, deviendront désormais de plus en plus nombreux, non seulement à cause de l'amitié renouvelée des deux nations, mais surtout à cause du grand développement des études mathématiques en Italie depuis un siècle, de l'importance capitale de l'œuvre des mathématiciens italiens, de la forme agréable et limpide que la plupart d'entre eux ont su donner à leurs travaux, et peut-être ne verra-t-on plus alors aussi souvent la traduction en allemand d'œuvres mathématiques italiennes remplacer sur les rayons de nos bibliothèques universitaires les œuvres originales absentes !

Nous avons dit plus haut que la nouvelle édition de l'Ouvrage de M. Enriques et ses collaborateurs comprend deux Volumes. Les Auteurs ont été d'avis qu'il ne convenait pas de diviser l'Ouvrage en deux parties relatives l'une à l'Analyse et l'autre à la Géométrie. Ils ont pensé avec raison que cette classification a perdu aujourd'hui toute valeur et que, si l'organisation des études en conserve la trace, c'est par un respect exagéré de la tradition. Ils ont préféré montrer au contraire par leur œuvre même que l'Analyse et la Géométrie s'unissent et se complètent lorsqu'on envisage les questions du point de vue le plus élevé. Il suffira au lecteur, pour se convaincre de cette vérité, de lire par exemple dans le Tome II l'Article de M. Castelnuovo sur la résolubilité des problèmes de géométrie à l'aide des instruments élémentaires, ou celui de M. Enriques sur les équations résolubles par radicaux carrés et les polygones réguliers qu'on peut construire élémentairement. M. Enriques a préféré diviser l'Ouvrage en deux Volumes, le premier consacré à la Critique des Principes, le second contenant les autres questions qu'on ne pouvait pas faire figurer sous cette rubrique. Nous analyserons le Tome II dans un autre article du *Bulletin* et nous en indiquerons alors le contenu exact. Nous

nous limiterons ici à l'analyse du Tome I. Ce Volume comprend un certain nombre d'Articles qui figuraient dans la première édition et trois Articles nouveaux fort importants formant un ensemble de plus de 400 pages. Le premier, dû à G. Vailati et relatif à la Théorie des proportions, avait été introduit déjà dans la traduction allemande de la première édition. Les deux autres entièrement nouveaux sont des Articles de M. Enriques et de M. D. Gigli [1].

G. Vailati. — *Sur la théorie des proportions* (de la page 199 à la page 244) :

L'Auteur expose d'abord la définition et les propriétés des proportions d'après la théorie attribuée à Eudoxe et qu'Euclide a exposée dans les Livres V et VI des *Éléments*. L'introduction des nombres irrationnels rend aujourd'hui immédiates la plupart des propositions établies de cette façon. L'intérêt de l'exposé de M. Vailati consiste précisément en ce qu'il nous permet de voir comment Eudoxe et Euclide ont pu bâtir une théorie parfaitement rigoureuse sous une forme géométrique dans laquelle on trouve en germe la définition moderne des nombres irrationnels et des opérations sur ces nombres, lorsqu'on les définit à l'aide de coupures faites dans l'ensemble des nombres rationnels.

La théorie des proportions telle que l'établit Euclide est géné-

[1] Il est regrettable, pour nos étudiants français candidats à l'Agrégation, que les Auteurs n'aient pas cru devoir introduire dans l'un des deux Volumes un Article relatif à l'impossibilité de résoudre par radicaux l'équation générale du cinquième degré, au lieu de se limiter, comme ils l'ont fait dans le Tome II, à étudier les équations résolubles par des radicaux carrés. En France, cette impossibilité n'était enseignée jusqu'ici au futur professeur ni dans les classes de Mathématiques spéciales, ni dans les études ultérieures, de sorte que, lorsque les professeurs disaient à leurs élèves qu'on ne peut pas trouver pour toutes les équations algébriques des formules de résolution comme pour l'équation du second degré, ils affirmaient un résultat dont il n'était pas toujours sûr qu'ils eussent eux-mêmes la démonstration. C'est sans doute pour éviter cet inconvénient que les derniers programmes de l'Agrégation de Mathématiques publiés pour le concours de 1915, concours qui n'a pas eu lieu à cause de la guerre, prévoyaient, parmi les leçons de Mathématiques spéciales, quelques leçons sur cette question et les questions voisines d'impossibilité. Plusieurs de ces questions sont d'ailleurs traitées dans le Tome II de l'Ouvrage que nous analysons et cet Ouvrage pourra, malgré la lacune que nous signalons, rendre de réels services aux candidats à l'Agrégation.

ralement considérée comme l'une des parties les plus parfaites des *Éléments*. M. Vailati nous montre même comment on a pu se servir de quelques objections que certains commentateurs ont cru pouvoir faire à cette théorie pour conclure que les passages qu'ils attaquaient provenaient des mutilations que le texte grec avait subi dans certaines éditions, et cette opinion se trouve confirmée par la comparaison des divers textes que l'on possède de l'œuvre d'Euclide, texte grec attribué à Théon d'Alexandrie, traduction latine provenant elle-même d'une traduction arabe faite sur un texte grec antérieur au précédent ; avec cette dernière édition, les objections faites à la théorie tombent complètement.

M. Vailati expose ensuite les différentes tentatives faites depuis Euclide jusqu'à nos jours pour attribuer au rapport ou au produit de deux lignes un sens basé sur des considérations purement géométriques et indépendant par suite de toute hypothèse relative à la commensurabilité des lignes entre elles. On peut en particulier rattacher à cet ordre d'idées la théorie des vecteurs donnée par Grassmann dans l'*Ausdehnungslehre* (1844). D'autres travaux plus récents ont été faits dans le même but. M. Vailati analyse ceux de Rajola Pescarini, de Hoppe, de Biasi. Les uns ramènent la définition des proportions à la considération d'aires équivalentes, les autres prennent pour base la réciproque du théorème de Thalès : dans ce dernier cas la difficulté est de montrer, en partant de la définition donnée, qu'on peut intervertir l'ordre des moyens d'une proportion. M. Vailati reproduit les démonstrations données à cet effet par certains auteurs (Hilbert, Beppo Levi) à partir de divers postulats.

F. Enriques. — *Les nombres réels* (de la page 365 à la page 493) :

L'Article de M. Enriques est consacré aux nombres et aux ensembles de nombres étudiés au point de vue de la puissance et de l'ordre. Il étudie les généralisations successives de la notion de nombre à partir du nombre entier, en laissant toutefois de côté les nombres complexes. Les titres des principaux paragraphes de cet Article, que nous donnons ci-après, montreront au lecteur la vaste étendue des questions étudiées par M. Enriques et lui indiqueront

mieux qu'une analyse sommaire le point de vue très élevé auquel s'est placé l'Auteur.

Partie I. — Les nombres naturels : *Le sens empirique des nombres.* Nombres cardinaux. Abstraction et égalité. Nombres ordinaux. Comparaison des nombres cardinaux avec les nombres ordinaux. *La suite infinie des nombres* (1). Empirisme et idéalisme. Classes finies ou infinies. Puissance des classes infinies. Suites finies ou infinies. Le principe d'induction mathématique et les nombres transfinis. *Opérations fondamentales de l'Arithmétique.* Opérations sur les nombres ordinaux. Bases de l'Arithmétique d'après Peano.

Partie II. — Les nombres rationnels : *Extension du concept de nombre.* Pourquoi on introduit les nombres négatifs, fractionnaires, etc. Rapports entre la théorie analytique et la théorie synthétique. *Nombres négatifs.* Théorie synthétique. La suite des nombres relatifs caractérisée par des postulats. Théories analytiques : théorie des couples. Les nombres considérés comme des opérateurs. *Nombres fractionnaires.* Théories synthétiques : les nombres comme rapports de grandeurs commensurables. Nombres rationnels ordinaux. Postulats qui caractérisent la suite rationnelle. Théories analytiques : théorie des couples. Nombres fractionnaires considérés comme des opérateurs.

Partie III. — Les nombres irrationnels : *Nombres et grandeurs.* Nombres considérés comme rapports de grandeurs. Continuité et intégrité. Expression des nombres irrationnels par des fractions continues. *Nombres irrationnels ordinaux.* Les nombres irrationnels considérés comme les abscisses des points de la droite. *Théories analytiques des nombres irrationnels.* Théorie de Dedekind. Théorie de Cantor. Théorie de Weierstrass. Calculs approchés effectués sur les nombres décimaux. *La puissance du continu.* Continu numérique. Continu à plusieurs dimensions.

Partie IV. — Les nombres non archimédiens et la généralisation du continu numérique : *Nombres non archimédiens.* Les nombres transfinis de Cantor considérés comme nombres non archimédiens. Produit de nombres non archimédiens. Corps de nombres non archimédiens. Nombres fonctionnels non archimédiens. Comparaison des nombres non archimédiens avec les nombres réels. *Sur quelques interprétations possibles des nombres non archimédiens.* Ordres d'infinitude de Du Bois Reymond. Probabilité. Angle de deux courbes. *Conditions qui caractérisent le continu comme suite ordonnée.* Conditions pour qu'un ensemble continu puisse être rapporté au continu numérique. Ordre continu d'espèce supérieure au continu numérique. Continu à plusieurs dimensions.

---

(1) M. Enriques emploie le mot *serie* qu'il nous paraît plus conforme aux habitudes françaises de traduire par *suite*.

Nous insisterons seulement ici sur la Partie IV qui est destinée à montrer comment, en laissant tomber certains postulats, on peut obtenir des classes de nombres nouveaux, de même qu'en Géométrie l'abandon de certains postulats conduit à des géométries nouvelles. M. Enriques commence par énoncer un certain nombre de propriétés caractéristiques des nombres réels définis d'une façon abstraite comme un corps de symboles soumis à certaines opérations. Ces propriétés sont relatives aux opérations, à l'existence du zéro et de l'unité, à l'ordre, à la continuité (postulat de Dedekind), aux inégalités, à l'existence des entiers formant une suite *bien ordonnée* dans l'ensemble ordonné des nombres réels. Enfin, un dernier postulat est le *postulat d'Archimède :* étant donnés deux nombres réels et positifs a, b, il existe toujours un entier positif n pour lequel on a $na > b$. C'est en laissant tomber ce postulat qu'on obtient les nombres *non archimédiens* et il s'agit de voir alors jusqu'à quel point on peut conserver pour ces nouveaux nombres les autres propriétés des nombres réels. La conclusion est qu'un corps de nombres non archimédiens positifs dans lequel sont possibles l'addition, la soustraction, la multiplication et la division comprend nécessairement un *infini actuel* ω et un *infiniment petit actuel* η tels que l'on ait

$$n < \omega \quad \text{et} \quad n > \eta,$$

quel que soit l'entier positif n ; les nombres de ce corps sont de la forme

$$a_n\omega^n + a_{n-1}\omega^{n-1} + \ldots + a_1\omega + a_0 + \sum_1^{\infty} b_m\eta^m,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et $b_0, b_1, \ldots, b_m, \ldots$ sont des nombres positifs réels. Dans un pareil système, qui comprend les nombres transfinis de Cantor, la continuité au sens de Dedekind n'existe plus, de sorte que l'abandon du postulat d'Archimède entraîne l'abandon de la continuité au sens de Dedekind.

M. Enriques montre comment un pareil corps de nombres non archimédiens a pu être réalisé effectivement par M. Hilbert. Le lecteur pourra trouver l'étude de ce système dans l'analyse du Mémoire de M. Hilbert sur les fondements de la Géométrie publiée par Henri Poincaré dans le *Bulletin* (1902, p. 249) et nous n'y

reviendrons pas. Mais en outre M. Enriques s'attache à montrer comment l'introduction de nombres non archimédiens peut être utile ou nécessaire dans certaines questions. Une première question où il en est ainsi est l'étude de la croissance des fonctions et la théorie des ordres d'infinitude de Du Bois Reymond : parmi les ordres d'infinitude possibles, il y a des infinis et des infiniment petits actuels, de sorte que la comparaison des ordres d'infinitude conduit à constituer un système de nombres non archimédiens. Une autre question où l'on peut faire intervenir utilement de pareils nombres est l'étude de l'angle de deux courbes tangentes : au lieu de considérer cet angle comme nul, ainsi qu'on le fait d'habitude en l'assimilant grossièrement à un angle rectiligne, on peut vouloir distinguer les uns des autres les angles de cette nature et l'Auteur montre qu'on est conduit alors à considérer d'une façon générale l'angle de deux courbes comme élément d'une classe de grandeurs non archimédiennes mesurées par des nombres de la forme

$$b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \ldots \qquad (b_0 \geqq 0).$$

Enfin une autre application où l'on ne s'attendait guère à voir intervenir les nombres non archimédiens est une question de probabilités. Supposons qu'on lance un point P dans un carré et que l'on fasse les deux hypothèses suivantes : 1° étant données deux aires égales, les probabilités pour que P tombe dans l'une ou l'autre de ces aires sont égales ; 2° étant données deux lignes de même longueur, les probabilités pour que P tombe sur l'une ou l'autre de ces lignes sont égales. Dans ces conditions, étant données dans le carré une aire S et une ligne s extérieure à S, la probabilité pour que P tombe sur l'ensemble S + s s'exprime par un nombre de la forme $a + b\eta$, où η est un infiniment petit. La probabilité totale et la probabilité composée conduisent à définir la somme et le produit de pareils nombres et l'on est ainsi conduit à un système de nombres non archimédiens.

D. Gigli. — *Des nombres complexes à deux unités ou à plus de deux unités* (de la page 495 à la page 632) :

L'Auteur fait d'abord un exposé historique très intéressant de la théorie des imaginaires. Il place les origines de cette théorie

dans les travaux des algébristes italiens du seizième siècle relatifs aux équations du troisième degré et en particulier au cas irréductible. L'utilité des imaginaires pour la résolution de problèmes réels est apparue dès lors aux mathématiciens et leur calcul s'est développé peu à peu en un système ne présentant aucune contradiction, mais dont la théorie demeurait obscure. Leibnitz, en 1702, émerveillé des résultats qu'on obtenait à l'aide de ce nombre imaginaire dont il n'était pas parvenu à saisir la nature l'appelait *analyseos miraculum, idealis mundi monstrum, pene inter Ens et non Ens amphibium.* On sait que c'est l'interprétation géométrique des imaginaires qui a permis de bâtir leur théorie sur des bases solides en les considérant comme une extension des nombres réels correspondant au passage d'un domaine à une seule dimension à un domaine à deux dimensions, et ce n'est qu'au XIXe siècle avec Wessel, Argand, Gauss et Cauchy que cette interprétation a jeté une pleine lumière sur le calcul des imaginaires.

M. Gigli, laissant ensuite de côté le point de vue historique, donne deux exposés différents de la théorie. Dans le premier exposé, le point de départ est la construction géométrique par laquelle on peut déduire dans un plan un vecteur OB d'un vecteur OA en multipliant OA par un nombre positif ρ et en faisant tourner le nouveau vecteur d'un certain angle θ. On posera $\overline{OB} = (\rho, \theta).\overline{OA}$ et l'on appelera (ρ, θ) un nombre complexe de module ρ, d'argument θ. Le nombre complexe est ainsi introduit comme un opérateur relatif aux vecteurs d'origine O. La définition et les propriétés de l'égalité, de la somme et du produit sont faciles à établir en restant dans cet ordre d'idées. L'introduction du nombre $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ou i permet alors de mettre tout nombre complexe sous la forme $x + iy$, ou sous la forme $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. On voit que cet exposé diffère de ceux que l'on trouve le plus souvent dans nos ouvrages d'enseignement en ce que l'imaginaire est d'abord introduite sous la forme trigonométrique, la forme $x + iy$ ne venant qu'en second lieu : les règles de calcul des imaginaires sous cette dernière forme sont alors immédiates ; elles résultent des propriétés des opérations qui ont déjà été établies sous la forme géométrique. Cette façon de présenter la

théorie paraît très bien convenir à l'enseignement, par sa forme relativement concrète : ce n'est d'ailleurs pas autre chose que l'exposé sous une forme moderne des idées contenues dans les Mémoires mêmes de Wessel et d'Argand à qui l'on doit la représentation géométrique des imaginaires.

Le second exposé est une théorie analytique du nombre imaginaire introduit d'une façon abstraite comme couple de deux nombres réels (x_1, x_2) soumis à certaines règles de calcul. Dans cet exposé, M. Gigli a tenu à présenter les choses de façon à pouvoir lever l'objection suivante qui se présente naturellement à l'esprit lorsqu'on pose ainsi *a priori* les définitions des opérations : quelles sont les considérations qui imposent les définitions qu'on prend pour les opérations et ne pourrait-on pas donner d'autres définitions conduisant sans contradiction à un système de nombres pouvant remplir le même but que les nombres imaginaires ? M. Gigli définit d'abord l'égalité, la somme, le produit par un nombre réel et jusque-là les définitions sont toutes naturelles et s'imposent en quelque sorte à l'esprit. Il résulte de ces définitions que tout nombre imaginaire peut se mettre sous la forme

$$x = \xi_1 u + \xi_2 v,$$

où u, v sont deux nombres imaginaires particuliers fixes (unités du système) et où ξ_1, ξ_2 sont des nombres réels variables avec x. Quelle que soit la définition adoptée, le produit xy du nombre imaginaire

$$x = \xi_1 u + \xi_2 v$$

par le nombre imaginaire

$$y = \eta_1 u + \eta_2 v$$

devra alors être défini comme un nombre imaginaire

$$xy = \varphi_1 u + \varphi_2 v,$$

où φ_1, φ_2 seront des fonctions des quatre variables ξ_1, ξ_2, η_1, η_2. M. Gigli cherche quelle forme il faut donner à ces fonctions φ_1, φ_2 pour que le produit possède les quatre propriétés fondamentales du produit des nombres réels que nous allons énumérer :

1° Le produit est commutatif ;

2° Il est associatif ;

3° Il est distributif par rapport à la somme ;

4° Il ne peut s'annuler que si l'un de ses facteurs au moins est nul.

On montre aisément que la propriété commutative résulte comme conséquence des trois autres propriétés. Dans un système possédant ces propriétés, on démontre qu'il existe un nombre r et deux nombres i (opposés) tels que l'on ait

$$r.r = r, \qquad r.i = i, \qquad i.r = i, \qquad i.i = -r.$$

On peut prendre r et i comme unités u, v et tout nombre du système peut alors se mettre sous la forme

$$x = \xi_1 r + \xi_2 i.$$

Le nombre r s'appellera l'unité *réelle*, le nombre i l'unité *complexe*. Les multiples λr de r, où λ est réel, constituent à eux seuls un corps : on peut alors sans ambiguïté identifier le nombre complexe λr au nombre réel λ et écrire en conséquence $\xi_1 + \xi_2 i$ au lieu de $\xi_1 r + \xi_2 i$.

Ainsi, il y a un corps *et un seul* de nombres complexes à deux unités dans lequel subsistent les propriétés des opérations effectuées sur les nombres réels. La définition adoptée pour le produit

$$xy = (\xi_1 \eta_1 - \xi_2 \eta_2) r + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) i$$

apparaît ainsi comme nécessaire et comme la seule possible si l'on veut pouvoir appliquer aux nouveaux nombres les règles de calcul des nombres réels.

L'Auteur consacre ensuite un Chapitre au théorème de D'Alembert et aux diverses démonstrations qui en ont été données par D'Alembert, Gauss, Argand et Cauchy, Mourey et Holst. Le Chapitre suivant est consacré à la notion de fonction monogène d'une variable complexe dont l'Auteur se sert surtout pour établir la théorie de l'exponentielle : ici encore la théorie est présentée de telle sorte que la définition de l'exponentielle pour le cas de l'exposant complexe, ou de la base complexe, apparaît comme la seule forme de définition qui permette de conserver à la fonction les propriétés caractéristiques qu'elle possède dans le cas d'une base réelle et positive et d'un exposant réel.

Enfin M. Gigli consacre un dernier Chapitre aux nombres complexes à n unités. La théorie développée précédemment pour les nombres complexes ordinaires s'étend aisément à ces nouveaux nombres. Après avoir défini l'égalité, la somme, le produit par un nombre réel et montré que tout nombre du système peut se mettre sous la forme

$$x = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \ldots + \xi_n u_n,$$

où u_1, u_2, ..., u_n sont n nombres fixes (unités) du système et ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n des nombres réels variables avec x, on arrive à la définition du produit d'un nombre complexe par un autre. Lorsqu'il y a plus de deux unités, on démontre qu'il est impossible de définir le produit de façon qu'il possède simultanément les quatre propriétés énoncées plus haut pour les nombres imaginaires : on peut réaliser la propriété distributive et la propriété associative, mais les deux autres propriétés s'excluent mutuellement. Si l'on veut conserver les propriétés 2° et 4°, on obtient trois corps et trois seulement de nombres complexes possédant simultanément ces deux propriétés. Ce sont : 1° le corps des nombres réels ($n = 1$), 2° le corps des nombres complexes ordinaires ($n = 2$), 3° le corps des quaternions ($n = 4$). C'est là le théorème de Frobenius. Les quaternions jouent ainsi un rôle spécial dans l'ensemble des nombres complexes : ils ne possèdent d'ailleurs pas la propriété commutative.

L'Auteur reprend ensuite la théorie des nombres complexes à n unités à un point de vue géométrique, en rattachant la théorie de ces nombres à celle des homographies de l'espace à n dimensions et il reprend dans cet ordre d'idées la démonstration des propositions que nous venons d'énoncer relativement au produit.

S. Lattes.

ANDOYER (H.). — Nouvelles Tables Trigonométriques Fondamentales (Valeurs naturelles). Ouvrage publié à l'aide d'une subvention accordée par l'Université de Paris. Tomes I et II. Deux vol. in-4° jésus, xviii-341 pages et iii-275 pages. Paris, A. Hermann et Fils, 1915 et 1916.

Les deux Volumes consacrés aux valeurs des lignes trigonométriques publiés en 1915 et en 1916 par M. H. Andoyer comprennent :

Le Premier, 1° une Table des formules, avec 24 décimales, pour le calcul des lignes trigonométriques; 2° des Tables des valeurs, avec 20 décimales, des lignes trigonométriques et de deux fonctions *g* et *h*, de centième en centième du quadrant, et des variations des divers ordres du sinus, du cosinus, de la tangente, de la sécante et des fonctions *g* et *h*; 3° des Tables des valeurs, avec 17 décimales, des lignes trigonométriques, de 9′ en 9′ jusqu'à 45°; des valeurs avec 17 décimales, de deux fonctions G et H, de 9′ en 9′ jusqu'à 15°; des variations pour 10″ du sinus, du cosinus et de la sécante, de 18′ en 18′ jusqu'à 30°; des variations pour 5″ de la tangente, de 9′ en 9′ jusqu'à 30°, et des variations pour 10″ de la fonction H, de 18′ en 18′ jusqu'à 15°; 4° des Tables des valeurs, avec 15 décimales, des sinus et des cosinus de tous les angles du quadrant de 10″ en 10″, avec leurs différences;

Le Second, des Tables IV B des valeurs, avec 15 décimales, des tangentes et des cotangentes de tous les angles du quadrant de 10″ en 10″, avec leurs différences.

Un Troisième Volume, qui sera ultérieurement publié, contiendra des Tables des valeurs des sécantes et des cosécantes, ainsi que deux Tables complémentaires destinées à faciliter le calcul des tangentes et des cosécantes des petits angles jusqu'à 15°.

Ces trois Volumes et celui qui a paru en 1911 pour les logarithmes des lignes trigonométriques ([1]) constituent une œuvre de bénédictin entreprise en 1908 par M. H. Andoyer et appelée à rendre de grands services de divers ordres. Pour la nouvelle publication comme pour l'autre, tous les calculs ont été faits par l'Auteur, sans aucune aide; ce travail peut donc servir en toute sécurité de base vraiment solide à toutes les publications relatives aux lignes trigonométriques naturelles, avec moins de décimales, et destinées à satisfaire aux besoins de la pratique. La nécessité de publier à présent, après tant d'autres ouvrages du même genre, un livre contenant des Tables plus étendues de lignes trigonométriques naturelles est exposée par M. H. Andoyer dans la Préface du Premier de ces deux nouveaux Tomes au cours d'une revue critique des Tables, presque toutes très rares, publiées par Rhaeticus et Otho (1596), Pitiscus (1613), et Briggs (1633), des ma-

([1]) Voir ce *Bulletin*, 1911, p. 277.

nuscrits dus à de Prony (XVIII[e] siècle) et à Sang (XIX[e] siècle); etc. (1). Mais M. H. Andoyer fait remarquer, avec justesse, que toutes ces Tables trigonométriques ont besoin d'être amenées à un degré plus élevé de perfection.

De tout ce qui précède il résulte que les trois Volumes publiés en 1911, 1915 et 1916 par M. Andoyer constituent bien des Tables *nouvelles* que l'on peut appeler *fondamentales*.

Comme il est toujours pénible de faire des recherches dans des Tables, il importe que l'impression en soit très nette. Les Tableaux publiés par MM. A. Hermann et Fils sont imprimés sur fort papier, en beaux chiffres; aussi les praticiens n'éprouveront-ils aucune fatigue en faisant leurs recherches.

ER. L.

NAPIER TERCENTENARY MEMORIAL VOLUME *edited by* CARGILL GILSTON KNOTT. 1 vol. in-4°, XI-441 pages, avec le portrait de Napier et 15 planches. London, Longmans, Green and Company, 1915.

Le résumé de la vie de John Napier et quelques indications sur son admirable invention ont été publiés dans ce *Bulletin* (novembre 1914, p. 318-319), d'après une *Lecture* de M. *E. V. Hobson*.

Nous allons compléter ce premier travail par l'analyse succincte des Documents présentés au Congrès international tenu à Édimbourg à la fin du mois de juillet 1914 pour commémorer le Tricentenaire de l'invention des Logarithmes par John Napier. Ces Documents se trouvent dans un magnifique Ouvrage publié, pour la Société royale d'Édimbourg, par *C. G. Knott*, Secrétaire général du Congrès, imprimé avec luxe, contenant en couleur le portrait de John Napier.

Dans sa belle Adresse inaugurale, Lord *Moulton*, Président du Congrès, expose la genèse et les progrès de l'invention des Logarithmes. Après avoir retracé la voie parcourue par Napier pour

(1) On trouve une liste étendue des ouvrages sur les lignes trigonométriques dans le *Napier Tercentenary* (voir ce numéro du *Bulletin*, p. 337).

arriver à la découverte qui marque une importante époque dans la Science, Lord Moulton conclut que, depuis trois siècles, rien n'a été ajouté aux deux systèmes de Logarithmes dus au génie de John Napier.

M. *P. Herme Brown* expose la vie de John Napier de Merchiston, en insistant sur ses écrits religieux.

M. *George Smith* donne la description et l'historique du Château de Merchiston.

M. *J. W. L. Glaisher* (Cambridge) expose comment Napier a introduit une nouvelle fonction en Mathématiques.

M. *David Eugene Smith* (Colombie) fait une savante dissertation sur la loi des exposants dans les travaux du XVI[e] siècle.

M. *Florian Cajori* (Colorado), bien connu par ses travaux historiques, après avoir dit que peu d'inventeurs ont un plus éclatant titre à la priorité que Napier pour l'invention des Logarithmes, parle des travaux de Stifel, d'Alvarus Thomas, de Burgi, d'un Ouvrage de Benjamin Martin, qui a écrit que « l'invention des Logarithmes a été injustement attribuée à Lord Neper » et qui attribue cette invention à Edward Wright. D'une méticuleuse discussion M. Cajori conclut que « les faits tels qu'ils sont connus à ce jour assignent à Napier la gloire d'une étoile de première grandeur comme l'inventeur de logarithmes qui le premier les donna au monde, et à Burgi la gloire d'une étoile de moindre grandeur, mais brillant d'une lumière indépendante ».

M. *George A. Gibson* (Glasgow) a présenté une très claire exposition du système de Logarithmes de Napier et les changements que fit Briggs à ce système, avec l'autorisation de l'inventeur. Il termine par des détails sur les rapports cordiaux de Napier et de Briggs.

M. *Salih Mourad* (Turquie) fait l'historique de l'introduction des Logarithmes en Turquie, d'après des Articles dus à Salih Zeki Bey et à Tahir Bey.

M. *J. E. A. Steggall* (Dundee) fait une courte analyse du Traité *De Arte Logistica* de John Napier, où l'on trouve un mode ingénieux de multiplication de deux grands nombres, des exemples de racines carrées et cubiques, etc.

M. *Giovanni Vacca* (Rome) a lu deux Notes intitulées : Le premier logarithme népérien calculé avant Napier; la théorie

des logarithmes népériens exposée par Pietro Mengoli dans sa *Geometria speciosa*.

M. *D. M. Y. Sommerville* (New-Zealand) a expliqué les Règles de Napier pour les polygones trigonométriquement équivalents en géométrie circulaire, elliptique et hyperbolique.

M. *R. A. Sampson* (Édimbourg) a rédigé une Bibliographie descriptive des Livres exposés au Congrès du Tricentenaire de Napier (p. 177-242).

M. *Henri Andoyer* (Paris) appelle l'attention sur les Tables fondamentales trigonométriques et logarithmiques qui ont été publiées à la fin du XVIe siècle et au commencement du XVIIe siècle et qui peuvent être comparées à une mine inépuisable. Il fait une bibliographie analytique des Ouvrages de Rheticus, de Pitiscus, de Briggs, de Vlacq, en faisant remarquer que la réédition par Vega de l'Ouvrage de Vlacq contient des fautes. Il parle des *Tables du Cadastre* (1764 à 1799) et des manuscrits de Tables dus à Sang et conservés par la Société Royale. L'insuffisance des Tables usuelles à sept décimales pour les calculs précis de Géodésie et d'Astronomie moderne est depuis longtemps reconnue. Afin d'y remédier, M. Andoyer a commencé, sous les auspices de l'Université de Paris, la publication de Tables fondamentales trigonométriques et logarithmiques à quatorze décimales; il en expose le mode de construction.

M. *C. G. Knott* complète la Communication de M. *Andoyer* en donnant des détails sur les 47 volumes manuscrits dus à Edward Sang et contenant des logarithmes calculés dans la ville même où John Napier inventa les logarithmes.

M. *J. Bauschinger* (Strasbourg) a parlé des formules destinées à obtenir les coefficients d'une fonction de deux variables, la distance polaire et la longitude sur une surface sphérique. Pour rendre immédiatement intelligibles au lecteur les notations de l'Auteur, M. *G. Knott* a fait une importante addition à la Communication de M. J. Bauschinger.

Le Professeur à l'École Polytechnique M. *Maurice d'Ocagne* (Paris), dans sa Communication sur les Tables numériques et sur les Nomogrammes, a parlé des travaux sur la représentation géométrique des fonctions de deux variables, et, dans celle sur l'origine des machines de multiplication directe, a cité l'invention de

Pascal, les idées de Leibnitz, la mise en pratique par Thomas de ces idées et a insisté sur l'invention de Léon Bollée.

Mme *E. Lifford* a présenté la Table des sinus naturels à 8 décimales pour chaque seconde d'arc, qu'elle a été amenée à construire parce qu'elle trouvait insuffisante la Table de Jordan dont son mari se servait pour ses travaux d'optique.

M. *J. R. Milne* (Édimbourg) a présenté un Mémoire où il discute le mode d'arrangement des Tables mathématiques, au point de vue typographique et au point de vue de l'interpolation.

M. *M. T. C. Hudson* (Londres) a présenté quelques remarques destinées à compléter le Mémoire de M. *Milne*.

M. *J. E. A. Steggall* (Dundee) a signalé des modifications qui, apportées à la manière d'écrire les nombres, amèneraient une importante économie.

M. *A. Hutchinson* (Cambridge) s'est occupé de la manière de résoudre graphiquement quelques problèmes de Cristallographie.

M. *William Schooling* a présenté une méthode pour trouver les logarithmes par une simple addition.

M. *A. K. Erlang* (Copenhague) a montré comment on peut réduire au minimum les erreurs dans les Tables de logarithmes.

M. *W. F. Sheppard* a parlé d'abord d'une méthode qu'il avait fait connaître en 1893 et en 1913 pour l'extension de l'exactitude des Tables mathématiques en se servant de différences de plus en plus précises, et ensuite de Tables d'approximation qui n'ont pas encore été publiées.

M. *Artemas Martin* (Washington) a indiqué une méthode pour trouver, sans l'emploi de Tables, le nombre correspondant à un logarithme naturel donné.

M. *H. S. Gay* (Shamokin) a expliqué la détermination approchée des fonctions d'angle.

M. *Albert Quiquet* (Paris) a présenté un Article où il expose le critérium logarithmique du Dr Goldziher relatif aux probabilités viagères.

Ce beau Volume se termine par un intéressant Compte rendu de la Célébration et du Congrès du Tricentenaire de John Napier, rédigé par le Secrétaire général le Dr *C. G. Knott* (p. 377-432).

C'est dans ce Compte rendu que se trouve le Sermon du Dr Fisher

qui rappelle que Napier aspirait au titre de *servant of Christ* et qui parle de ses idées théologiques exposées dans son Livre intitulé : *A Plain Discovery of the whole Revelation of St. John.*

ER. L.

MÉLANGES.

SUR LES POINTS SINGULIERS DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

PAR M. M. SOUBBOTINE.

1. Considérons une équation différentielle

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

dont le premier membre est un polynome en $y, y', \ldots, y^{(n)}$.

La nature des intégrales de cette équation autour d'un point x_0 au voisinage duquel les coefficients du polynome f sont holomorphes (ou, plus généralement, algébroïdes) est suffisamment connue ; mais on ne sait presque rien dire à l'heure actuelle des intégrales de l'équation (1) au voisinage d'un point x_0 qui est un point singulier essentiel des coefficients du polynome f [1].

En abordant l'étude des intégrales de l'équation (1) autour d'un tel point, il est naturel de se demander avant tout si cette équation possède des intégrales holomorphes pour $x = x_0$. On rencontre souvent des assertions qu'il n'en existe pas en général [2] ; mais ces assertions sont basées, à ma connaissance, sur des exemples très particuliers. Je me propose de donner dans cette Note, à ce sujet, une proposition d'une certaine généralité.

2. Supposons que les coefficients de l'équation (1) sont, dans

---

(1) *Cf.* FORSYTH, *Theory of Differential Equations*, vol. II, p. 209-210.

(2) *Voir*, par exemple, P. BOUTROUX, *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, p. 13.

le voisinage du point $x_0 = 0$, de la forme

$$(2) \qquad \psi_0 + \psi_1 x^{\lambda_1} e^{\alpha_1\left(\frac{1}{x}\right)} (\log x)^{l_1} + \ldots + \psi_i x^{\lambda_i} e^{\alpha_i\left(\frac{1}{x}\right)} (\log x)^{l_i},$$

où $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_i$ sont des fonctions de x holomorphes à l'origine ; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ sont des nombres constants ; par $\alpha_1\left(\frac{1}{x}\right), \cdots, \alpha_i\left(\frac{1}{x}\right)$ sont désignés des polynomes en $\frac{1}{x}$ et enfin $l_1, \ldots, l_i$ sont des nombres entiers positifs.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Si une fonction y, holomorphe à l'origine, satisfait à une équation différentielle

$$(1) \qquad f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

dont le premier membre est un polynome en $y, \ldots, y^{(n)}$ *avec les coefficients de la forme* (2), *cette fonction satisfait aussi à une équation différentielle de la même forme où les coefficients sont des fonctions holomorphes à l'origine; l'ordre et le degré de cette dernière équation ne surpassent pas l'ordre et le degré de l'équation* (1).

La démonstration sera fondée sur les trois lemmes que je vais établir.

3. Lemme I. — *L'identité*

$$(3) \qquad A_0 + A_1 e^{\alpha_1\left(\frac{1}{x}\right)} + \ldots + A_n e^{\alpha_n\left(\frac{1}{x}\right)} = 0,$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *sont des fonctions de x holomorphes à l'origine, et les polynomes* $\alpha_1(n), \ldots, \alpha_n(n)$ *diffèrent entre eux autrement que par une constante, entraîne*

$$A_0 \equiv A_1 \equiv \ldots \equiv A_n \equiv 0.$$

Nous pouvons évidemment supposer que A_0 n'est pas nul. En divisant par A_0, nous obtiendrons

$$1 + P_1 e^{\alpha_1\left(\frac{1}{x}\right)} + \ldots + P_n e^{\alpha_n\left(\frac{1}{x}\right)} = 0,$$

en posant

$$P_k = \frac{A_k}{A_0}.$$

On en tire, par différentiation,

$$\left[P_1' + P_1 \frac{d\alpha_1\left(\frac{1}{x}\right)}{dx}\right] e^{\alpha_1\left(\frac{1}{x}\right)} + \ldots = 0;$$

d'où, en multipliant par une fonction convenable,

$$Q_0 e^{\alpha_1\left(\frac{1}{x}\right)} + \ldots + Q_{n-1} e^{\alpha_n\left(\frac{1}{x}\right)} = 0,$$

où $Q_0, \ldots, Q_{n-1}$ sont des fonctions holomorphes à l'origine, ne pouvant êtres nulles.

De cette dernière égalité on déduit

$$Q_0 + Q_1 e^{\alpha_2\left(\frac{1}{x}\right) - \alpha_1\left(\frac{1}{x}\right)} + \ldots + Q_{n-1} e^{\alpha_n\left(\frac{1}{x}\right) - \alpha_1\left(\frac{1}{x}\right)} = 0,$$

relation de la même forme que (3).

En continuant ainsi de proche en proche nous obtiendrons une identité de la forme

$$M_0 + M_1 e^{\mu\left(\frac{1}{x}\right)} = 0,$$

où les fonctions M_0 et M_1 sont holomorphes à l'origine et différentes de zéro, et $\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ est un polynome en $\frac{1}{x}$, qui ne se réduit pas à une constante.

Cette dernière identité étant impossible, nous devons conclure que

$$A_0 = A_1 = \ldots = A_n = 0.$$

4. Lemme II. — *L'identité*

$$B_0 + B_1 x^{\mu_1} + \ldots + B_m x^{\mu_m} = 0,$$

où $B_0, B_1, \ldots, B_m$ sont des fonctions développables dans le voisinage de l'origine en série de Laurent; $\mu_1, \ldots, \mu_m$ sont des nombres tels qu'aucune des différences

$$\mu_i - \mu_k \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, k;\ \mu_0 = 0;\ i \gtrless k)$$

n'est égale à un entier, cette identité, dis-je, n'est possible que si

$$B_0 = B_1 = \ldots = B_m = 0.$$

Faisons, en effet, faire un tour à x autour de l'origine, nous

aurons
$$B_0 + B_1 x^{\mu_1} \omega_1 + \ldots + B_m x^{\mu_m} \omega_m = 0,$$
en posant
$$\omega_k = e^{2\pi i \mu_k},$$

et donc, d'une manière générale,
$$B_0 + B_1 x^{\mu_1} \omega_1^i + \ldots + B_m x^{\mu_m} \omega_m^i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, m).$$

Comme les fonctions B_0, B_1, ..., B_m ne sont pas nulles, il en résulte
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega_1 & \ldots & \omega_n \\ . & .. & \ldots & \ldots \\ 1 & \omega_1^n & \ldots & \omega_n^n \end{vmatrix} = 0;$$
ce qui exige, ou bien
$$\omega_k = 1$$
et, par suite,
$$\mu_k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
ou bien
$$\omega_k = \omega_l,$$
c'est-à-dire
$$\mu_k - \mu_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Mais ceci est contre nos hypothèses. Donc
$$B_0 \equiv B_1 \equiv \ldots \equiv B_m \equiv 0.$$

5. Lemme III. — *L'identité*
$$C_0 + C_1 \log x + \ldots + C_n (\log x)^n = 0,$$
où les coefficients C_0, C_1, ..., C_n *sont de la forme*
$$B_0 + B_1 x^{\mu_1} + \ldots + B_n x^{\mu_n},$$
B_i et μ_i *ayant la même signification que dans le lemme précédent, n'est possible que si*
$$C_0 \equiv C_1 \equiv \ldots \equiv C_n \equiv 0.$$

Nous commencerons par démontrer que cette identité est impossible si $n = 1$.

Soit
$$C_0 = K_1 x^{\lambda_1} + \ldots + K_n x^{\lambda_n},$$
$$C_1 = L_1 x^{\mu_1} + \ldots + L_m x^{\mu_m},$$

K et L étant des fonctions de x développables en série de Laurent dans un certain domaine T comprenant l'origine. Nous supposerons que toutes ces fonctions sont différentes de zéro.

Nous avons donc à démontrer l'impossibilité de l'identité

$$(4) \qquad K_1 x^{\lambda_1} + \ldots + K_n x^{\lambda_n} + (L_1 x^{\mu_1} + \ldots + L_m x^{\mu_m}) \log x = 0,$$

ou bien

$$(5) \qquad -\log x = \frac{K_1 x^{\lambda_1} + \ldots + K_n x^{\lambda_n}}{L_1 x^{\mu_1} + \ldots + L_m x^{\mu_m}}.$$

Posons

$$\lambda_g = \lambda'_g + i\lambda''_g \qquad (g = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\mu_h = \mu'_h + i\mu''_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

On peut toujours supposer que le plus petit des nombres

$$(6) \qquad \lambda''_1, \quad \ldots, \quad \lambda''_n, \quad \mu''_1, \quad \ldots, \quad \mu''_m$$

est égal à zéro : il suffirait, en effet, de multiplier le numérateur et le dénominateur de la dernière formule par $x^{-i\lambda}$, λ étant le plus petit des nombres (6), pour réaliser ce cas.

Nous pouvons donc supposer que

$$\lambda''_g = 0 \quad \text{si} \quad g \leq \alpha, \qquad \text{et} \qquad \lambda''_g > 0 \quad \text{si} \quad g > \alpha,$$
$$\mu''_h = 0 \quad \text{si} \quad h \leq \beta, \qquad \text{et} \qquad \mu''_h > 0 \quad \text{si} \quad h > \beta,$$

et qu'au moins un des nombres α et β est plus grand que zéro.

6. Considérons d'abord le cas

$$\beta > 0.$$

Il est évidemment permis de supposer que la fonction

$$L_1(x) x^{\mu_1} + \ldots + L_\beta(x) x^{\mu_\beta}$$

n'est pas identiquement nulle. Soit x_0 un point du domaine T dans lequel cette fonction est différente de zéro. Posons, en séparant les parties réelles et purement imaginaires,

$$K_g(x_0) x_0^{\lambda_g} = M_g + i N_g \qquad (g = 1, 2, \ldots, n),$$
$$L_h(x_0) x_0^{\mu_h} = P_h + i Q_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Faisons décrire à la variable x un contour entourant k fois l'origine, et situé tout entier à l'intérieur du domaine T ; la

formule (5) deviendra

$$(5') \qquad -\log x - 2\pi i k = \frac{\displaystyle\sum_{g=1}^{g=n} K_g x^{\lambda_g} e^{2\pi i k \lambda_g}}{\displaystyle\sum_{h=1}^{h=m} L_h x^{\mu_h} e^{2\pi i k \mu_h}}.$$

En faisant $x = x_0$ et en posant

$$M = M' + M'', \qquad N = N' + N'',$$

$$M' = \sum_{g=1}^{g=\alpha} (M_g \cos 2\pi k\lambda'_g - N_g \sin 2\pi k\lambda'_g),$$

$$M'' = \sum_{g=\alpha+1}^{g=n} e^{-2\pi k\lambda''_g}(M_g \cos 2\pi k\lambda'_g - N_g \sin 2\pi k\lambda'_g),$$

$$N' = \sum_{g=1}^{g=\alpha} (M_g \sin 2\pi k\lambda'_g + N_g \cos 2\pi k\lambda'_g),$$

$$N'' = \sum_{g=\alpha+1}^{g=n} e^{-2\pi k\lambda''_g}(M_g \sin 2\pi k\lambda'_g + N_g \cos 2\pi k\lambda'_g)$$

et

$$P = P' + P'', \qquad Q = Q' + Q'',$$

$$P' = \sum_{h=1}^{h=\beta} (P_h \cos 2\pi k\mu'_h - Q_h \sin 2\pi k\mu'_h),$$

$$P'' = \sum_{h=\beta+1}^{h=m} e^{-2\pi k\mu''_h}(P_h \cos 2\pi k\mu'_h - Q_h \sin 2\pi k\mu'_h),$$

$$Q' = \sum_{h=1}^{h=\beta} (P_h \sin 2\pi k\mu'_h + Q_h \cos 2\pi k\mu'_h),$$

$$Q'' = \sum_{h=\beta+1}^{h=m} e^{-2\pi k\mu''_h}(P_h \sin 2\pi k\mu'_h + Q_h \cos 2\pi k\mu'_h),$$

nous aurons

$$(7) \qquad -\log x_0 - 2\pi i k = \frac{M + iN}{P + iQ} = \frac{M' + iN' + M'' + iN''}{P' + iQ' + P'' + iQ''},$$

cette égalité devant avoir lieu pour toutes valeurs de k.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DUMONT (E). — Théorie générale des nombres. Définitions fondamentales. (Collection *Scientia*). 1 vol. in-8 (20-13), 194 pages, avec figures. Paris, Gauthier-Villars et Cie; 1915.

L'Auteur de cet Ouvrage s'y est proposé deux buts principaux : 1° introduire l'uniformité dans les définitions des diverses catégories de nombres : nombres absolus (réels positifs), nombres qualifiés (réels négatifs), nombres complexes, quaternions, biquaternions ; 2° ne faire appel, dans ces définitions qu'aux seuls postulats de la Géométrie euclidienne, sans faire intervenir ceux qu'on rencontre en Arithmétique logique.

La définition uniforme proposée par M. Dumont est la suivante : *Un nombre est une loi de formation d'un vecteur à l'aide d'un vecteur*. Il montre, en effet, que cette loi s'applique à toutes les catégories de nombres.

Si l'on considère d'abord deux segments portés sur une même droite et de même sens, la loi de formation d'un de ces segments au moyen de l'autre définit un nombre positif. Si l'on considère ensuite deux segments portés sur une même droite, mais de sens contraires, la loi de formation de l'un de ces segments au moyen de l'autre définit un nombre négatif. La considération, dans un certain plan, de deux vecteurs concourants donne le nombre complexe; la considération, dans l'espace, de deux vecteurs concourants encore donne les quaternions; enfin la considération de deux vecteurs quelconques donne les biquaternions.

Mais, si l'on maintient cette définition uniforme dans toute sa généralité, elle ne pourra donner grand'chose, car, pour commencer, elle ne donnera aucun critérium pour reconnaître l'égalité de deux vecteurs déduits d'un même vecteur par des lois de formation différentes. On est donc obligé de considérer des lois de formation particulières.

Soit, par exemple, la définition du nombre positif. L'Auteur considère la loi de formation qui consiste à ajouter un segment plusieurs fois de suite à lui-même, elle donne naissance au nombre

entier; puis celle qui consiste à ajouter plusieurs fois de suite à elle-même une partie aliquote d'un segment, elle donne naissance au nombre fractionnaire; enfin celle qui consiste à former une suite indéfinie de segments correspondant à des nombres rationnels, croissant sans cesse et restant plus petits qu'un segment fixe, elle donne naissance au nombre irrationnel.

Mais ainsi l'Auteur retombe dans les définitions ordinaires. Il y aurait d'ailleurs, croyons-nous, quelques petites choses à reprendre dans son exposition. Comment un point mobile peut-il (p. 20) passer *successivement* par *tous* les points d'un segment. Cependant l'ensemble des points d'un segment n'est pas dénombrable. A la page 21 se trouve énoncé, sans démonstration, et cependant sous le nom de *théorème*, la proposition : *Les multiples successifs* G, 2G, 3G, ... *d'un segment* G *forment une suite infinie croissant sans limite*. La démonstration est-elle donc évidente? Est-elle seulement possible? La proposition n'est-elle pas ce qu'on appelle ordinairement le *postulat d'Archimède?* Une autre objection encore est la suivante : la définition donnée plus haut du nombre entier ne présuppose-t-elle pas la notion de ce nombre?

Pour les nombres complexes, la définition de M. Dumont ne diffère de la représentation géométrique ordinaire qu'en un point. La différence est insignifiante dans ce cas, mais elle devient capitale dans le cas des quaternions. Considérons un nombre complexe. D'après la définition adoptée par M. Dumont, c'est le rapport $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$ de deux vecteurs dans un plan xOy. Mais on peut, sans changer le nombre défini, supposer que OB soit un vecteur choisi à l'avance, le même pour tous les nombres et qu'on le représente par 1. Alors $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \mathrm{OA}$, de sorte que le nombre complexe est défini simplement par le vecteur OA. Cela, c'est la représentation ordinaire. Une généralisation naturelle de la représentation ordinaire serait de définir, ou de représenter, de nouveaux nombres par des vecteurs OA dont l'espace $Oxyz$. Mais cette généralisation-là ne réussit pas et ne peut réussir. Hamilton, le premier, s'en rendit compte, et définit un quaternion non pas par un vecteur, mais par le rapport de deux vecteurs. Dans le nombre $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$ ainsi défini, le

dénominateur ne peut pas être un vecteur quelconque. C'est donc la définition de M. Dumont qui se généralise.

En somme, l'idée de M. Dumont est de reprendre la définition d'Hamilton, mais de l'appliquer immédiatement dès la définition du nombre ordinaire. Est-ce une bonne idée? Ne vaut-il pas mieux, au contraire, suivre la marche qu'ont suivie les inventeurs, définir le nombre réel et le nombre complexe par un seul vecteur, chercher à généraliser, montrer que ce n'est pas possible immédiatement, et alors seulement, modifier la première définition de manière à la rendre généralisable? C'est là une question qui n'a rien de mathématique et que chacun résoudra suivant son goût et sa tournure d'esprit.

Examinons maintenant le second but que s'est proposé M. Dumont. Dans l'Arithmétique qu'il appelle *Arithmétique logique*, on considère, pour définir les nombres entiers, des objets qu'on ne définit pas et des modes de composition de ces objets qu'on ne définit pas non plus. On dit seulement que ces objets et ces modes de composition satisfont à certains postulats. Ensuite on définit un nombre fractionnaire par un couple de nombres entiers, et un nombre irrationnel par une suite infinie de nombres rationnels. Mais, d'abord, les définitions précédentes, tout au moins pour le nombre entier sont sujettes à des objections sérieuses. De plus, cette façon, uniquement logique, de procéder, répugne à certains esprits. Enfin, l'Arithmétique ainsi constituée ne pourra s'appliquer au calcul des grandeurs qu'au moyen de nouveaux postulats. Pour toutes ces raisons, plusieurs auteurs ont cherché à fonder l'Arithmétique sur la considération des grandeurs; M. Dumont est l'un deux.

« Si ma thèse, dit-il en terminant, pouvait être prise en sérieuse considération par les professeurs enseignants, je suis convaincu que la théorie arithmétique générale aurait fait un grand progrès. »

Disons, tout au moins, que la lecture de l'Ouvrage de M. Dumont sera très utile aux professeurs, en les faisant réfléchir, une fois de plus, aux fondements de la science qu'ils enseignent.

E. CAHEN.

VITI (Rodolfo). — Elementi di Scienza attuariale per gli Istituti tecnici. *Teorie matematiche elementari della Finanza e della Previdenza.* 1 vol. gr. in-8, x-285 pages. Rocca S. Casciano (Bologna), Licinio Cappelli, 1916.

Cet Ouvrage, publié par un professeur de l'Institut technique royal de Bologne, est un traité élémentaire, à la fois mathématique et technique des opérations de finance; il contient les théories et la pratique des intérêts simples, des intérêts composés, des annuités, des probabilités, de la statistique, des types principaux de l'assurance sur la vie ; on y trouve l'exposé des opérations, à court terme et à long terme, de bourse et de change; quelques indications sur les valeurs mobilières.

Dans les Chapitres relatifs aux Intérêts, signalons un aperçu historique sur les variations du taux; la méthode des diviseurs fixes y compris le procédé anglais; celle des parties aliquotes ; des indications sur le change; les règles de l'escompte simple et de l'escompte rationnel; un aperçu historique sur les comptes courants et les méthodes employées pour obtenir ces comptes; la théorie de l'intérêt composé continu, le calcul de l'annuité perpétuelle, un aperçu sur la nue propriété et l'usufruit, les calculs de l'amortissement, l'indication des applications des théories financières relatives aux intérêts simples et composés et aux annuités.

L'étude de la Probabilité mathématique, exposée avec quelques détails, comprend la loi des grands nombres et celle des expériences répétées, la fonction θ des actuaires anglais et ses applications, la théorie des jeux de hasard avec le cas de la loterie, le théorème sur la ruine des joueurs.

En Statistique, signalons des notions historiques sur les Tables de survivance, de mortalité, de maladies; l'étude de ces Tables; l'explication des diagrammes statistiques, les équations de survivance et de mortalité.

Les problèmes des Assurances sur la vie sont résolus dans les cas qui peuvent se présenter, avec des Tables numériques. Il importe de signaler la solution de diverses questions relatives à l'assurance contre les maladies et à l'épargne en général.

Comme les formules contenues dans cet Ouvrage sont du domaine des Mathématiques élémentaires et spéciales, M. Viti a composé une œuvre appelée à rendre service au grand nombre de personnes qui s'occupent de finances et à la plupart des professeurs de l'enseignement technique.

Er. L.

LAISANT (C.-A.) et LEMOINE (Émile), fondateurs; MAILLET (Ed.), MALUSKI (A.) et BOULANGER (A.), rédacteurs. — Intermédiaire des Mathématiciens : Table des Tomes I à XX (1894-1913). 1 vol. in-8° (23-14), III-279 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie; 1916.

Cette Table des matières des Tomes I à XX (1894-1913) a été préparée avant la guerre, par M. M. Lecat, de Bruxelles, d'après ses notes personnelles et les Tables manuscrites générales que la Rédaction tient à jour. La correspondance avec M. Lecat étant devenue impossible en raison des événements, les épreuves ont été corrigées par M. H. Brocard.

Les questions et réponses y sont classées d'après l'Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques (Paris, Gauthier-Villars; 1898). Le sujet de chaque question est rappelé en quelques mots, et vis-à-vis figure l'indication (année et page) des réponses parues. L'année et le mois de publication de chaque question se retrouvent facilement à l'aide du Tableau de la page 278 qui termine la Table (1).

Les lecteurs de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* sauront gré à MM. Lecat et Brocard de leur très utile travail.

Er. L.

---

(1) Cette Table est mise en vente au prix de 8fr. Les abonnés des deux dernières années pourront se procurer cette Table au prix de 4fr.

MÉLANGES.

SUR LES POINTS SINGULIERS DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;

Par M. M. SOUBBOTINE.

(*Suite et fin.*)

Or, nous allons montrer qu'on peut indiquer une suite infinie des valeurs de k,

$$k = k_1, k_2, \ldots,$$

pour lesquelles le module du second membre de la formule (7) reste inférieur à un nombre fixe; il en résultera l'impossibilité de l'égalité (7) et, par suite, de l'identité (4).

Remarquons tout d'abord qu'on peut trouver un nombre K tel que l'on ait, pour $k > K$,

$$|M'' + iN''| < \varepsilon, \qquad |P'' + iQ''| < \varepsilon,$$

quelque petit que soit le nombre positif ε. Ceci étant : des inégalités

$$|M + iN| \leqq |M' + iN'| + |M'' + iN''|$$

et

$$|M' + iN'| \leqq 2\sum_{g=1}^{g=\alpha}(|M_g| + |N_g|),$$

on conclut que $|M + iN|$ reste, pour toutes les valeurs de k, inférieur à un nombre fixe A.

Montrons maintenant qu'il existe des valeurs de k aussi grandes qu'on le veut pour lesquelles $|P + iQ|$ est supérieur à un nombre positif fixe.

Étant donné un nombre quelconque de quantités réelles $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_\beta$, on sait qu'on peut en approcher simultanément par

des fractions rationnelles

$$\frac{g_1^{(s)}}{H_s}, \quad \frac{g_2^{(s)}}{H_s}, \quad \ldots, \quad \frac{g_\beta^{(s)}}{H_s},$$

dont le dénominateur commun H_s croît indéfiniment avec s, de telle sorte qu'on ait

$$\mu'_h = \frac{g_h^{(s)}}{H_s} + \frac{\varepsilon_h^{(s)}}{H_s^{\frac{\beta+1}{\beta}}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, \beta),$$

où

$$|\varepsilon_h^{(s)}| < 1 \quad (^1).$$

Nous pouvons donc écrire, pour $k = H_s$,

$$P' = \sum_{h=1}^{h=\beta} \left(P_h \cos \frac{2\pi\varepsilon_h^{(s)}}{\sqrt[\beta]{H_s}} + Q_h \sin \frac{2\pi\varepsilon_h^{(s)}}{\sqrt[\beta]{H_s}} \right),$$

$$Q' = \sum_{h=1}^{h=\beta} \left(P_h \sin \frac{2\pi\varepsilon_h^{(s)}}{\sqrt[\beta]{H_s}} + Q_h \cos \frac{2\pi\varepsilon_h^{(s)}}{\sqrt[\beta]{H_s}} \right).$$

Ces formules montrent que, si s augmente indéfiniment, P' et Q' tendent respectivement vers

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_\beta \quad \text{et} \quad Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_\beta.$$

Mais nous avons choisi x_0 de telle sorte que la quantité

$$P_1 + \ldots + P_\beta + 2(Q_1 + \ldots + Q_\beta) = L_1(x_0) x_0^{\mu_1} + \ldots + L_\beta(x_0) x_0^{\mu_\beta}$$

soit différente de zéro. Donc, pour les valeurs suffisamment grandes de s,

$$|P' + iQ'| > B_1 > 0.$$

Or,

$$P + iQ = P' + iQ' + P'' + iQ'',$$

par suite, on peut trouver deux nombres B et s' tels que

$$|P + iQ| > B > 0,$$

pour

$$k = H_{s'}, H_{s'+1}, \ldots$$

---

(1) *Voir* Hermite, *Œuvres*, t. I, p. 105-106. — *Cf.* aussi Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, 2e édition, p. 241-242.

En résumé, nous avons une suite infinie des valeurs de k pour lesquelles

$$|M + iN| < A, \qquad |P + iQ| > B > 0,$$

et, par suite,

$$|\log x_0 + 2\pi i k| = \left|\frac{M + iN}{P + iQ}\right| < \frac{A}{B},$$

ce qui est évidemment impossible.

7. Il nous reste encore à démontrer l'impossibilité de l'identité (4) dans le cas

$$\alpha > 0, \qquad \beta = 0.$$

Dans la formule (5') multiplions le numérateur et le dénominateur du second membre par

$$e^{2\pi k\mu},$$

μ étant le plus petit des nombres

$$\mu''_1, \quad \mu''_2, \quad \ldots, \quad \mu''_m.$$

Les considérations du numéro précédent montrent qu'on peut trouver deux nombres fixes C et D tels qu'on aura

$$|e^{2\pi k\mu}(P + iQ)| < D,$$

et

$$|M + iN| > C > 0,$$

x_0 étant choisi de sorte que la quantité

$$K_1(x_0)x_0^{\lambda_1} + \ldots + K_\alpha(x_0)x_0^{\lambda_\alpha}$$

ne soit pas nulle. La première de ces inégalités ayant lieu pour toute valeur de k, et la seconde pour des valeurs de k aussi grandes qu'on le veut.

Il en résulte que, pour les mêmes valeurs de k,

$$|\log x_0 + 2\pi i k| > \frac{C}{D} e^{2\pi k\mu},$$

inégalité évidemment impossible.

La démonstration de l'impossibilité de l'identité

$$C_0 + C_1 \log x = 0$$

est donc terminée.

8. Nous pouvons maintenant démontrer notre lemme. Supposons, en effet, que l'identité

$$C_0 + C_1 \log x + \ldots + C_n (\log x)^n = 0$$

est possible pour des valeurs de n plus grandes que l'unité. Soit k la plus petite de ces valeurs.

Nous aurons donc une identité de la forme

$$C_0 + C_1 \log x + \ldots + C_k (\log x)^k = 0 \qquad (k > 1),$$

où C_0 et C_k sont différents de zéro.

On en tire, par différentiation,

$$C'_0 + \frac{1}{x} C_1 + \left(C'_1 + \frac{2}{x} C_2 \right) \log x + \ldots + C'_k (\log x)^k = 0\,;$$

d'où, en éliminant $(\log x)^k$,

$$\left[C_k \left(C'_{k-1} + \frac{k}{x} C_k \right) - C_{k-1} C'_k \right] (\log x)^{k-1} + \ldots = 0.$$

Par suite, d'après la définition de k,

$$C_k \left(C'_{k-1} + \frac{k}{x} C_k \right) - C_{k-1} C'_k = 0,$$

ou bien

$$\frac{C'_k C_{k-1} - C_k C'_{k-1}}{C_k^2} = \frac{k}{x},$$

d'où

$$k C_k \log x + C_{k-1} + C_k \,\text{const.} = 0.$$

Mais cette identité entraîne, d'après ce que nous avons vu plus haut,

$$C_k \equiv C_{k-1} \equiv 0,$$

ce qui est contre nos hypothèses. Le lemme est démontré.

9. Il est facile maintenant de démontrer le théorème énoncé au n° 2.

L'équation différentielle

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

dont il est question dans ce théorème, peut être écrite de la manière

suivante :

$$(8)\quad \begin{aligned}\varphi_0(x, y, \ldots, y^{(n)}) &+ \varphi_1(x, y, \ldots, y^{(n)}) x^{\mu_1} e^{\beta_1\left(\frac{1}{x}\right)} (\log x)^{m_1} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \varphi_k(x, y, \ldots, y^{(n)}) x^{\mu_k} e^{\beta_k\left(\frac{1}{x}\right)} (\log x)^{m_k} = 0,\end{aligned}$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ sont des polynomes en $y, y', \ldots, y^{(n)}$, dont les coefficients sont holomorphes à l'origine. Nous supposerons que, dans cette dernière équation, il n'y a pas de termes semblables, c'est-à-dire des termes pour lesquels ont ait simultanément

$$\mu_h - \mu_g = \text{un entier},$$
$$\beta_h\left(\frac{1}{x}\right) - \beta_g\left(\frac{1}{x}\right) = \text{const.},$$
$$m_h = m_g.$$

Nous allons montrer qu'une fonction y holomorphe à l'origine et satisfaisant à l'équation (8) doit satisfaire aux équations

$$\varphi_0(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_k(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

En substituant la fonction y dans l'équation (8), nous obtiendrons une identité de la forme

$$\Psi_0(x) + \Psi_1(x) x^{\mu_1} e^{\beta_1\left(\frac{1}{x}\right)} (\log x)^{m_1} + \ldots = 0,$$

où $\Psi_0(x), \ldots, \Psi_x(x)$ sont holomorphes à l'origine.

Nous pouvons écrire cette identité de la façon suivante :

$$C_0 + C_1 \log x + C_2 (\log x)^2 + \ldots + C_n (\log x)^n = 0,$$

où

$$C_j = B_0^{(j)} + B_1^{(j)} x^{\mu_1^{(j)}} + \ldots + B_{m_j}^{(j)} x^{\mu_{m_j}^{(j)}} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n),$$

$$B_h^{(j)} = A_0^{(j,h)} + A_1^{(j,h)} e^{\beta_1^{(j,h)}\left(\frac{1}{x}\right)} + \ldots + A_{n_{j,h}}^{(j,h)} e^{\beta_{n_{j,h}}^{(j,h)}\left(\frac{1}{x}\right)} \qquad (h = 0, 1, \ldots, m_j),$$

les fonctions A étant les fonctions $\Psi(x)$ elles-mêmes.

Il ne reste maintenant qu'à appliquer les trois lemmes précédents pour avoir successivement

$$C_g = 0 \qquad (g = 0, 1, \ldots, n),$$

puis

$$B_h^{(j)} = 0 \qquad (h = 0, 1, \ldots, m_j;\ j = 0, 1, \ldots, n),$$

et enfin

$$A_k^{(j,h)} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Psi_0(x) = \Psi_1(x) = \ldots = \Psi_k(x) = 0.$$

Ce qui montre que la fonction y satisfait aux équations

$$\varphi_0(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_k(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0;$$

donc les coefficients sont holomorphes à l'origine. C. Q. F. D.

10. On peut exprimer le résultat obtenu sous une autre forme.

Soit

$$(9) \qquad f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

une équation différentielle, dont le premier membre est un polynome en $y, y', \ldots, y^{(n)}$ *avec les coefficients de la forme*

$$\sum_{k=1}^{k=n} \psi_k(x)\,[\varphi_k(x)]^{\lambda_k} e^{\omega_k(x)}\,[\log \theta_k(x)]^{l_k},$$

les fonctions ψ_k, φ_k, ω_k *et* θ_k *étant algébroïdes au voisinage de l'origine, et* l_k *étant des nombres entiers. Si une fonction* y, *satisfaisant à l'équation* (9), *est algébroïde au voisinage de l'origine, cette fonction satisfera à une équation de la même forme, dans laquelle les coefficients sont algébroïdes autour de l'origine. L'ordre et le degré de cette dernière équation ne surpassent pas l'ordre et le degré de l'équation* (9).

Les fonctions y, ψ_k, φ_k, ω_k, θ_k étant, dans le domaine de l'origine, de la forme

$$a_{-\mu} x^{-\frac{\mu}{p}} + a_{-\mu+1} x^{-\frac{\mu-1}{p}} + \ldots + a_0 + a_1 x^{\frac{1}{p}} + \ldots,$$

soit q le plus petit multiple commun des nombres p. Il suffirait alors de faire la substitution

$$t = x^{\frac{1}{q}}, \qquad z = y\,t^m,$$

où le nombre entier m est choisi de telle façon que z soit une fonction de t holomorphe pour $t = 0$, et de multiplier l'équation (9) par une puissance convenable de t, pour être ramené au cas précédemment considéré.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XL.



TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XL; 1916. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

D'ANALYSES.

FIN DES TABLES DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XL.

56325 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Ernest Lebon*, Secrétaire de la Rédaction, rue des Écoles, 4 *bis*, Paris, 5e.

56321 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD.

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. P. APPELL, E. CARTAN, J. DRACH, P. DUHEM, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, ER. LEBON, G. LORIA, S. RINDI, H. G. ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY
ET DE 1905 A 1910, PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XL. — ANNÉE 1916.

(LIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1916

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ATTI DEL R. ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI.

T. LXIII, 1903-1904 (*suite et fin*) (1).

Bordiga (*G.*). — [$N_1 3 a \beta$] Sur un complexe de cercles du quatrième ordre (733-748).

Massardi (*F.*). — [T 5 *a*] Sur le problème le plus général de l'électrostatique (865-872).

Démonstration de l'unicité de la fonction potentielle. Expression de cette fonction sous forme de série et convergence de cette série.

Viterbi (*A.*). — [S 2 *e* α] Formules elliptiques pour les mouvements stationnaires d'un solide plongé dans un liquide indéfini (873-913).

Voir la Note du même auteur, dans le Tome précédent, à la page 183.

Bernardi (*E.*). — [R 1 *e*] Système pratique de simples tiges arti-

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXIX_2, p. 141-152.

culées résolvant le problème du guidon corrigé pour les automobiles (914 *bis*-959, 1 planche).

Pasquini (*E.*). — [O3*c*] Sur la développable cyclificatrice et sur la généralisation du problème relatif (1077-1085).

Étant donnée une courbe quelconque, faire passer par cette courbe une développable telle que dans le développement de celle-ci par le plan, la courbe prenne une forme assignée. Cas où la forme assignée est circulaire.

Bernardi (*E.*). — [S2] Un paradoxe hydrodynamique (1111-1120).

Ricci (*G.*). — [C4*a*] Directions et invariants principaux dans une variété quelconque (1233-1239).

Soit

$$\varphi = \sum_{1}^{n} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

une forme différentielle quadratique positive, définissant une métrique de la variété V_n, $a^{(pq)}$ les coefficients de la forme réciproque et $a_{pr,qs}$ les symboles de Riemann; $\lambda_{1|r}, \ldots, \lambda_{n|r}$ ($r = 1, \ldots, n$) les systèmes coordonnés covariants de n congruences de lignes [1], ..., [n] constituant une n-uple orthogonale de V_n. La courbure de la surface géodésique passant par un point P et tangente aux lignes des congruences [h], [k], est

$$R_{hk} = \sum_{rstu}^{n} a_{rs,tu}\, \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_h^{(t)} \lambda_k^{(u)}.$$

En introduisant les symboles

$$\alpha_{rs} = \sum_{pq}^{n} a^{(pq)} a_{pr,qs},$$

on trouve

$$\sum_{k}^{n} R_{hk} = \sum_{rs}^{n} \alpha_{rs}\, \lambda_h^{(r)} \lambda_h^{(s)}.$$

et cette expression donne la *courbure moyenne* de V_n en P et dans la direction [h].

Une n-uple *principale* est telle que les α_{rs} en résultent réduites à la forme canonique

$$\alpha_{rs} = \sum_{h}^{n} \rho_h\, \lambda_{h|r}\, \lambda_{h|s},$$

et $\rho_1, \ldots, \rho_n$ sont les *invariants principaux*.

Si une V_{n+1} contient une famille simplement infinie d'hypersurfaces géodésiques V_n, les trajectoires orthogonales de celles-ci forment une congruence principale de V_{n+1}.

Severini (C.). — [D4] Sur les séries de fonctions analytiques (1241-1255).

Nouvelle démonstration du lemme de Weierstrass relatif aux séries de séries, sous la forme suivante :

Si l'on a

$$f_n(x) = \sum_0^\infty {}_\nu a_{n\nu} x^\nu \qquad (x = 1, \ldots, \infty),$$

ces fonctions f_n admettant un cercle commun de convergence (O, R), et si sur toute circonférence (O, r) intérieure à (O, R) on a pour toute valeur de m

$$\left| \sum_1^m {}_n f_n(x) \right| < G,$$

où G est une quantité positive et finie (pouvant aussi varier avec r), et sur une circonférence (O, r) la série

$$\sum_1^\infty {}_n f_n(x)$$

est uniformément convergente, il s'ensuit que la série

$$A_\nu = \sum_1^\infty {}_n a_{n\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, \infty)$$

est convergente; la série

$$\sum_0^\infty {}_\nu A_\nu x^\nu$$

est convergente en tout cercle intérieur à (O, R), et l'on a

$$\sum_1^\infty {}_n f_n(x) = \sum_0^\infty {}_\nu A_\nu x^\nu.$$

Suivent d'autres conditions pour l'existence d'un champ commun de convergence des séries données et pour la convergence uniforme de la série des séries. Résultats analogues pour les séries de fonctions analytiques, régulières dans une aire finie et convexe.

S. Rindi.

MEMORIE DELLA REALE ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI DI MODENA.

Tome I, 1re et 2e Partie, 1833.

Ruffini (*P.*). — Observations sur le mouvement des fusées à la Congrève (56-78, une planche).

Cremona (*J.-F.*). — Sur les points singuliers des courbes planes (79-88, une planche).

Bianchi (*J.*). — Essai d'Astronomie analytique (157-198, une planche).

Rangoni (*L.*). — Sur la décomposition et transformation des fonctions algébriques fractionnaires (254-318).

Tome I, 3e et 4e Partie, 1858.

Rangoni (*L.*). — Éloge du conseiller P. Cassani (3e Partie, 156-172).

Amici (*J.-B.*). — Sur un nouveau cercle répétiteur en altitude et en azimut (4e Partie, 25-33, une planche).

Pelloni (*J.-B.*). — Sur la forme des dents des roues des moulins (4e Partie, 59-89, une planche).

Araldi (*A.*). — La genèse des quantités démontrée au moyen de deux instruments mécaniques (4e Partie, 90-111, une planche).

Tome III, 1861.

Araldi (*A.*). — Sur la manière d'obtenir par l'élimination l'équation finale dépourvue de facteurs étrangers (3-12).

Marianini (*P.-D.*). — Sur une manière d'établir les principes de la méthode des infiniment petits (17-36).

Araldi (*A.*). — Sur le calcul approché des intégrales définies (65-90).

Il y a un *errata* à la page 137.

Razzaboni (*C.*). — Sur les effluves des liquides de récipients dans lesquels entre continuellement un volume d'eau différent de celui qui dans le même temps sort par l'orifice (101-112).

Araldi (*A.*). — Essai d'Analyse géométrique (113-136).

Mémoires de la Section de Lettres.

Veratti (*B.*). — Sur la crible d'Ératosthène et sur l'illustration qui en a été faite par Samuel Horsley (41-57).

Tome V, 1863.

Razzaboni (*C.*). — Sur la résultante des pressions qu'un liquide pesant homogène en équilibre exerce sur la surface d'un corps plongé, et sur le centre de pression de cette surface (3-11, une planche).

Mémoires de la Section de Lettres.

Veratti (*B.*). — Sur la terminologie mathématique des écrivains latins (3-96).

Tome VII, 1866.

Ruffini (*F.*). — Note sur un problème de Géométrie descriptive (17-19, une planche).

Ragona (*D.*). — Sur une propriété singulière du cercle de Reichenbach de l'Observatoire royal de Modène et sur les conséquences qui en découlent relativement à la détermination de la latitude (89-101).

Tome VIII, 1867.

Ruffini (*F.*). — Sur la manière de calculer le résultat moyen de plusieurs observations successives (65-75, une planche).

Riccardi (*P.*). — Éloge de A. Araldi (77-91).

Tome IX, 1868.

Razzaboni (*C.*). — Les formules de la parallaxe annuelle et de l'aberration de la lumière, déduites immédiatement de celles de la parallaxe astronomique (3-13, une planche).

Riccardi (*P.*). — Préface à une Bibliothèque mathématique italienne (15-28).

Araldi (*A.*). — Notices sur une nouvelle théorie de la déviation des projectiles sphériques et oblongs, lancés par les armes à feu (79-91).

Tome X, 1869.

Camuri (*A.*). — Sur une surface particulière engendrée par une conique (3-20, deux planches).

Pareto (*R.*). — Sur l'abus qu'on fait des moyennes dans les Sciences physiques et sociales (49-146).

Mémoires de la Section des Arts.

Camuri (*A.*). — Sur certaines espèces de voûtes à voile et sur la manière de déterminer les échafaudages pour leur construction (27-37, une planche).

Tome XII, 1871.

Ruffini (*F.*). — Sur la manière de définir la continuité des fonctions (3-14).

Ruffini (*F.*). — Sur la recherche de la conique par rapport à laquelle deux coniques données sont polaires réciproques (49-90).

Tome XIII, 1re Partie, 1872.

Ruffini (*F.*). — Sur la recherche de la conique par rapport

à laquelle deux coniques données sont polaires réciproques (3-17).

Nicoli (*F.*). — Sur les lignes de contact et sur les traces des surfaces cylindriques circonscrites à des surfaces de révolution (39-44).

Tome XIV, 1874.

Ragona (*D.*). — Rapport à l'Académie royale des Sciences, Lettres et Arts de Modène sur l'Ouvrage intitulé : *Astronomical Observations* made in the Royal Observatory Edimburgh by Charles Piazzi Smith (Vol. XIV, Edimburgh, 1871, (3-6).

Riccardi (*P.*). — Note sur quelques rares éditions des Ouvrages astronomiques de François Capuano de Manfredonia (25-46).

Riccardi (*P.*). — Sur quelques récents Mémoires relatifs au procès et à la condamnation de Galilée. Notes et documents ajoutés à la bibliographie galiléienne (69-151).

Araldi (*A.*). — Recherches sur le mouvement réel produit sur un corps par l'action d'une force excentrique (153-174, une planche).

Tome XV, 1875.

Riccardi (*P.*). — Appareil pour la détermination de la ligne parcourue par un mobile (41-43).

Tome XVI, 1876.

Riccardi (*P.*). — Exercitation géométrique (3-12, une planche).

Nicoli (*F.*). — Sur une interprétation géométrique des systèmes d'équations linéaires (141-158).

Tome XVII, 1877.

Riccardi (*P.*). — Exercitation géométrique IIe (3-16, deux planches).

Tome XVIII, 1878.

Favaro (*A.*). — Notices historiques et critiques sur la construction des équations (127-332, deux planches).

Mémoires de la Section de Lettres.

Bortolotti (*P.*). — Sur l'ancienne coudée égyptienne et sur ses rapports géométriques avec les autres unités de mesure et de poids égyptiennes et étrangères (63-238).

Tome XIX, 1879.

Favaro (*A.*). — Sur l'interprétation mathématique du papyre Rhind, publié et illustré par le professeur Auguste Eisenlohr (89-143).

Malavasi (*L.*). — Sur une représentation graphique du mouvement ondulatoire (185-203, deux planches).

Favaro (*A.*). — Appendice aux notices historiques et critiques sur la construction des équations (233-244).

Favaro (*A.*). — Les additions de Galilée au dialogue « Sopra i due massimi sistemi » dans l'exemplaire de la Bibliothèque du séminaire de Padoue (245-275).

Mémoires de la Section de Lettres.

Riccardi (*P.*). — Notice sur la vie et les Ouvrages de Geminian Rondelli (21-46).

Campori (*C.*). — Geminian Poletti (47-67).

Bortolotti (*P.*). — Sur l'ancienne coudée égyptienne et sur ses rapports géométriques avec les autres unités de mesure et de poids égyptiennes et étrangères (69-274, un tableau).

Tome XX, 1re Partie, 1880.

Riccardi (*P.*). — Note statistique d'histoire mathématique (299-310, une planche).

Tome XX, 2e Partie, 1881.

Campori (*G.*). — Correspondance galiléenne inédite avec notes et appendices (VII-XIV, 1-642).

Tome XX, 3e Partie, 1882.

Favaro (*A.*). — Glanures galiléiennes dans la collection d'autographes Campori en Modène (3-36).

Riccardi (*G.*) et *Lombardi* (*A.*). — Sur le marquis Louis Rangoni (115-135).

Ce Tome contient les indices généraux des Mémoires académiques de la première série (1833-1858-1882).

2e Série.

Tome I, 1883.

Nicoli (*F.*). — Sur un cas de mouvement d'une figure plane dans son plan, qui varie restant semblable à elle-même (59-71, une planche).

Nicoli (*F.*). — Sur un cas de mouvement d'une figure plane qui se conserve semblable à elle-même (171-178).

Nicoli (*F.*). — Sur deux cas de mouvement d'une figure solide restant semblable à elle-même (249-260).

Malavasi (*L.*). — Considérations mécaniques sur une droite rigide (305-319).

Mémoires de la Section de Lettres.

Bortolotti (*P.*). — Sur l'ancienne coudée égyptienne et sur ses rapports géométriques avec les autres unités de mesure et de poids égyptiennes et étrangères (continuation). Chapitre V. Mesures égyptiennes des blés (59-134).

Bortolotti (*P.*). — Appendice au Chapitre V sur l'ancienne coudée égyptienne (155-167).

Tome II, 1884.

Favaro (*A.*). — La défense de Galilée, écrite par Bernard Averani (209-239).

Tome III, 1885.

Malavasi (*L.*). — Sur la pile suivant le principe de Volta. Essai théorique (183-250).

Tome IV, 1886.

Valeri (*D.*). — Sur certains hyperboloïdes passant par quatre points (355-377).

Marianini (*P.-D.*). — Théorème général pour la recherche des valeurs limites correspondant à des formes indéterminées, suivi d'une démonstration du théorème de Taylor (379-423).

Tome V, 1887.

Ragona (*D.*). — Nouvelles formules relatives à la résolution des triangles sphériques (53-119).

Tome VI, 1888.

Malavasi (*L.*). — Les figures de Chladni et la méthode de Wheatstone, 1re Partie : Plaques rectangulaires (125-147, quatre planches).

Tome VII, 1890.

Nicoli (*F.*). — Interprétation géométrique du champ des solutions d'une équation linéaire à quatre variables (205-225).

Besso (*D.*). — Sur l'intégration de l'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre, lorsque l'on connaît une fonction entière du deuxième degré à coefficients constants de deux de ses intégrales fondamentales (239-244).

Basso (*D.*). — Sur l'intégration de l'équation différentielle linéaire homogène du troisième ordre, lorsque l'on connaît une fonction entière du deuxième degré de deux de ses intégrales fondamentales (245-252).

Nicoli (*F.*). — Sur les éléments unis de deux formes géométriques collinéaires (253-280, deux planches).

Tome VIII, 1892.

Malavasi (*L.*). — La méthode de Wheatstone et les figures de Chladni. 2e Partie : Plaques circulaires (3-39, six planches).

Valeri (*D.*). — Propriétés métriques des cubiques gauches (385-413, une planche).

Nicoli (*F.*). — Interprétation géométrique du champ des solutions réelles d'une équation quadratique à quatre variables (489-505, une planche).

Tome IX, 1893.

Albertotti (*G.*). — Manuscrits francais du XVIIe siècle relatifs à l'usage des lunettes (III-IX, un fac-similé, 3-124).

Chistoni (*C.*). — Sur la détermination du coefficient d'induction des aimants avec la méthode de Lamont (159-178).

Chistoni (*C.*). — Sur la mesure du coefficient de température des aimants avec le magnétomètre des sinus (299-329).

Del Re (*A.*). — Sur les surfaces du cinquième ordre à cubique double et deux ou trois points triples (331-344).

Tome X, 1894.

Loria (*G.*). — Les sciences exactes dans l'ancienne Grèce. Préface et Livre I (3-168, deux planches).

Nicoli (*F.*). — Sur les espaces linéaires de trois dimensions considérés dans notre espace. 1re Partie (257-275).

Del Re (*A.*). — Sur les caustiques par réflexion et sur les points brillants des surfaces algébriques illuminées (415-448).

Tome XI, 1895.

Loria (*G.*). — Les Sciences exactes dans l'ancienne Grèce. Livre II (2-237, deux planches).

Nicoli (*F.*). — Sur les espaces linéaires à trois dimensions considérés dans notre espace. 2e Partie (239-257).

Aschieri (*F.*). — Fondements de Géométrie analytique (301-338).

Tome XII, 2e Partie, 1902.

Loria (*G.*). — Les sciences exactes dans l'ancienne Grèce. Livres III, IV et V (dernier) (3-411).

Tome I, 3e série, 1898.

Chistoni (*C.*) et *De Vecchi* (*G.*). — Contribution à l'étude des aimants permanents (37-89).

Del Re (*A.*). — Sur une congruence homaloïdique du troisième degré (95-104).

Riccardi (*P.*). — Quelques lettres de Lagrange, Laplace et Lacroix adressées au mathématicien Pierre Paoli, et sept lettres de Paoli au professeur P. Ruffini (105-129).

Tome II, 1900.

Chistoni (*C.*) et *De Vecchi* (*G.*). — Contribution à l'étude des aimants permanents (125-272).

Tome III, 1901.

Mémoires de la Section de Lettres.

Riccardi (*P.*). — [Ouvrage posthume]. Notices historiques et biographiques sur l'étude des Sciences physico-mathématiques pures et appliquées dans la ville et la province de Modène (11-35).

Tome IV, 1902.

Pantanelli (*D.*). — Écoulement de l'eau à travers les sable (329-346).

Tome V, 1905.

Pantanelli (*D.*). — Sur la marche des eaux souterraines dans les environs de Modène (45-97, cinq planches).

Malagoli (*R.*). — Composition parallèle du mouvement vibratoire avec le mouvement progressif, appliquée à l'examen des corps sonores (141-146, une planche).

Chizzoni (*F.*). — Nombre des points doubles d'une surface réglée de l'espace à quatre dimensions (273-277).

Chizzoni (*F.*). — Sur les espaces linéaires contenus dans une variété algébrique à plusieurs dimensions (279-281).

Nicoli (*F.*). — Sur les espaces linéaires à trois dimensions considérés dans notre espace. 3e et 4e Partie (283-301, une planche).

Tome VII, 1908.

Pirondini (*G.*). — Sur une nouvelle méthode pour étudier les lignes tracées sur une surface, avec une extension aux lignes de l'hyperespace (49-75).

Pirondini (*G.*). — Une transformation géométrique spéciale dans le plan avec applications (103-123).

Bortolotti (*E.*). — Convergence d'algorithmes infinis (135-235).

Mémoire de la Section de Lettres.

Bortolotti (*E.*). — Sur la résolvante de Malfatti. Correspondance inédite de P. Paoli et P. Ruffini (77-97).

Tome VIII, 1909, et Appendice.

Bortolotti (*E.*). — Notice nécrologique sur E. Cesàro (77-82, avec la liste de ses 128 travaux).

Bortolotti (*E.*). — Sur le quotient des fonctions monotones (83-89).

Amaldi (*U.*). — Sur une classe particulière de groupes continus infinis de transformations de contact de l'espace (91-97).

Appendice.

Sforza (*G.*). — Recherches d'extensimétrie différentielle dans les espaces métrico-projectifs (21-40).

Sforza (*G.*). — Recherches d'extensimétrie intégrale dans les espaces métrico-projectifs (41-66).

Nicolis (*U.*). — Sur le cercle méridien de l'Observatoire de Madère (73-83).

Sforza (*G.*). — Mise au courant du Mémoire en deux Notes « Recherches d'extensimétrie, etc. » (117-120).

Tome IX, 1910.

Appendice.

Mémoires et Notes d'auteurs n'appartenant pas à l'Académie.

Amaldi (*I.*). — Sur le quadrangle plan (211-221).

Tome X, 1re Partie, 1912.

Amaldi (*U.*). — Les groupes continus infinis de transformations ponctuelles de l'espace à trois dimensions (277-349).

Tome X, 2e Partie, 1913.

Amaldi (*U.*). — Les groupes continus infinis de transformations ponctuelles de l'espace à trois dimensions. 2e Partie (3-345).

Del Re (*A.*). — Sur les réseaux de courbes algébriques à intersections variables alignées, et sur les systèmes linéaires ∞^3 de surfaces algébriques à intersections variables coplanaires (393-406).

Tome XI, 1914.

Ovio (*G.*). — La formule du grossissement donné par l'ouverture sténopéique (3-36).

Ovio (*G.*). — Sur la projection des images (37-56).

Ovio (*G.*). — Sur l'angle de vision (57-70).

Ovio (*G.*). — Le mécanisme de la vision perspective (71-157).

Mémoires de la Section de Lettres.

Bortolotti (*E.*). — Commémoration de V. Cerruti (3-10).

Bonacini (*G.*). — Commémoration de G. Schiaparelli (27-41).

S. Rindi.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK [1].

Tome CXLIV, 1914.

Steinitz (*E.*). — Séries non absolument convergentes et systèmes convexes (suite) (1-40).

(Voir l'analyse de la première Partie, *Bulletin*, t. XXXIX, p. 104-107.)

V. *Systèmes de rayons convexes.*

L'auteur entend indifféremment sous le nom de *système de rayons* soit un système de demi-droites ayant toutes même origine, soit l'ensemble des points de ces demi-droites.

17. *Systèmes de rayons.* — Si Γ est un ensemble de points absolument borné et fermé, ω un point n'appartenant pas à Γ, le plus petit système de rayons d'origine ω et contenant les points de Γ est fermé.

18. *Systèmes de rayons de différentes dimensions.* — Il peut arriver qu'un ensemble de points donné puisse être, de plusieurs manières différentes, regardé comme un système de rayons. Les différentes origines correspondantes forment alors une multiplicité linéaire, qu'on appelle l'*origine totale* de l'ensemble. Le système de rayons ordinaires a pour origine totale un point (dimension zéro).

Si Γ est un ensemble de points fermé et absolument borné, Λ une multiplicité linéaire ne contenant aucun point de Γ, le plus petit système de rayons d'origine totale Λ et contenant Γ est fermé.

19. *Systèmes de rayons convexes.* — Si Λ est un ensemble de points convexe, le plus petit système de rayons d'origine ω contenant Λ est aussi convexe. Si ω est l'origine des coordonnées, ce plus petit système de rayons est formé des

---

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXIX, p. 93-101.

points qui résultent de la composition d'un nombre fini de points de A affectés de *coefficients positifs*.

20. *Systèmes de rayons omnifronts.* — Un système de rayons totalement non borné est aussi appelé *omnifront* (allseitig) : si par son origine ω on mène un plan quelconque A, de chaque côté de A il existe au moins un rayon du système. Le système omnifront est dit *irréductible* s'il cesse d'être omnifront par la perte d'un quelconque de ses rayons.

Pour qu'un système de rayons d'origine O soit omnifront, il faut et il suffit qu'on puisse trouver dans ce système un nombre fini de rayons

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m$$

parmi lesquels n linéairement indépendants, et entre lesquels existe une relation à coefficients tous positifs. Le nombre m peut toujours être supposé au plus égal à $2n$.

Tout système de rayons omnifront contient au moins un système irréductible, formé au moins de $n+1$ et au plus de $2n$ rayons. Il existe des systèmes omnifronts irréductibles de $n+1$ rayons et aussi de $2n$ rayons. Si un système omnifront ne contient aucun système partiel omnifront irréductible de moins de $2n$ rayons, il est formé de n couples de rayons opposés.

21. *Systèmes de rayons relativement omnifronts.* — Un système de rayons d'origine ω est dit *relativement omnifront* s'il existe au moins une multiplicité linéaire A passant par ω telle qu'il existe au moins un rayon du système de chaque côté de tout plan passant par ω, *mais ne contenant pas* A.

Pour qu'un système de rayons d'origine O soit relativement omnifront, il faut et il suffit qu'il contienne un système fini de rayons

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_m$$

entre lesquels existe une relation à coefficients tous positifs.

Un système de rayons relativement omnifront ne possède aucun plan d'appui ne contenant aucun rayon. La réciproque est vraie pour les systèmes de rayons *fermés*.

Le plus petit ensemble de points convexe $\bar{A}$ contenant un ensemble de points donné A est formé des points de A et des points ω tels que le plus petit système de rayons d'origine ω contenant A soit relativement omnifront. Si A est fermé et absolument borné, $\bar{A}$ est fermé; il en est de même si A est un système de rayons fermé et non relativement omnifront.

22. *Séries de divergence décisive.* — L'auteur revient à la considération des séries et commence par poser quelques définitions.

Deux séries A et B sont dites *équivalentes* si la série obtenue en les retranchant terme à terme est convergente; l'équivalence est *propre* si la convergence est absolue.

Une série à termes *réels* C est dite *diverger décisivement vers* $+\infty$ si elle est équivalente (proprement ou improprement) à une série divergente à termes positifs.

Une série Γ à termes *complexes* est dite *décisivement divergente dans la direction* α si elle est équivalente à une série de la forme Cα, où C diverge décisivement vers $+\infty$. (Rappelons que la multiplication de deux nombres

complexes est ici une multiplication *géométrique* ou *intérieure* au sens de Grassmann).

Pour que Γ diverge décisivement dans la direction α, il faut et il suffit que la série réelle $\Gamma\alpha$ diverge décisivement vers $+\infty$ et que la série $\Gamma - (\Gamma\alpha)\alpha$ soit convergente.

23. *Entrelacement de séries.* — Une série C peut, de différentes manières, être formée de tous les termes de deux séries A et B, sans omission ni répétition. On dira que C résulte de l'entrelacement de A et de B si, en effaçant dans C tous les termes de l'une quelconque de ces deux séries, les termes restants forment les termes de l'autre série *dans le même ordre*.

Dans ce qui suit, l'auteur ne considère que des séries dont le terme général tend vers zéro.

Si A, B, C sont des séries à termes réels dont les termes généraux tendent vers zéro, la série A divergeant décisivement vers $+\infty$, la série B divergeant décisivement vers $-\infty$, on peut, par entrelacement de ces trois séries, en former une quatrième convergente et de somme donnée arbitrairement à l'avance.

Si les séries $A_1, \ldots, A_k$, dont les termes généraux tendent vers zéro, divergent décisivement respectivement dans les directions $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, et si la direction γ résulte de la composition des directions $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ affectées de coefficients positifs, on peut, par entrelacement des séries données, former une nouvelle série qui diverge décisivement dans la direction γ.

24. *Rayons principaux d'un ensemble de nombres.* — Considérons un ensemble élémentaire dénombrable Γ de nombres complexes. La direction α est dite *principale* pour cet ensemble si, quelque petit que soit l'angle ε, la somme des valeurs absolues de ceux des nombres de Γ, qui font avec α un angle inférieur à ε, est infinie.

Si un système de rayons fermé A d'origine O ne contient aucun rayon principal de l'ensemble Γ, la somme des valeurs absolues de ceux des nombres de Γ qui appartiennent à A est finie.

L'auteur désigne par $g(\alpha)$ la borne supérieure des angles x compris entre O et π et tels que la somme des nombres de Γ faisant avec α un angle inférieur à x soit finie. Pour un rayon principal, $g(\alpha)$ est nul.

Si $g(\alpha)$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, la somme de ceux des nombres de l'ensemble réel $\Gamma\alpha$ qui sont positifs est finie : la direction α est dite *direction de convergence*. Si $g(\alpha)$ est supérieur à $\frac{\pi}{2}$, cette même somme est infinie : la direction α est dite *direction de divergence*.

Pour que les séries formées des éléments de Γ divergent absolument et décisivement dans la direction α, il faut et il suffit que les rayons de convergence de Γ constituent le demi-espace $\alpha\xi \leqq 0$. Ou encore, il faut et il suffit que α soit seule direction principale : toutes les directions rectangulaires à α sont alors des directions de convergence.

Pour que α soit direction principale de Γ, il faut et il suffit qu'il existe un système ponctuel de Γ dont les éléments soient les termes d'une série divergeant absolument et décisivement dans la direction α. Parmi ces systèmes partiels, il y en a toujours qui sont tels qu'en les enlevant de Γ, le système restant Γ_1 admette les mêmes rayons principaux et les mêmes rayons de divergence que Γ.

25. *Deuxième démonstration d'un théorème précédent.* — Ce théorème est le suivant :

Si le système élémentaire dénombrable Γ *ne possède que des directions de divergence, on peut, au moyen de ses éléments, former une série convergente de somme arbitrairement donnée à l'avance.*

Dans le cas de $n = 1$, ce théorème est le théorème classique de Riemann sur les séries à termes réels non absolument convergentes. L'auteur le démontre par voie de récurrence, et en s'appuyant sur ce que le système A des rayons principaux de Γ est relativement omnifront.

L'auteur fait suivre la démonstration de considérations critiques sur le Mémoire de P. Lévy, qui a été l'origine de ses propres recherches.

(*A suivre.*)

Bôcher (Maxime). — Sur le phénomène de Gibbs (41-47).

Dans une lettre au journal anglais *Nature* (t. LIX, 1899, p. 606), J. Willard Gibbs a fait une remarque brève, mais importante, sur la manière dont la série de Fourier

$$\Psi(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots$$

se comporte au voisinage des points de discontinuité de $\Psi(x)$. L'auteur a développé l'idée de Gibbs dans un Mémoire inséré dans les *Annals of Mathematics*, 2e série, t. VII, 1906, p. 81-152. Le phénomène de Gibbs, comme il l'a montré, s'étend à toute fonction réelle $f(x)$, admettant un point de discontinuité α, telle qu'en ajoutant à la fonction d'un côté de α une constante convenablement choisie, on obtienne une fonction dont le développement en série de Fourier converge uniformément au voisinage de α. La fonction $f(x)$ a alors au voisinage de α deux limites $f(\alpha - 0)$ et $f(\alpha + 0)$ dont la différence est le *saut* de la fonction en α. Si alors $S_n(x)$ désigne la somme des $n+1$ premiers termes du développement de $f(x)$, la courbe $y = S_n(x)$, pour de grandes valeurs de n, passe très près du point

$$x = \alpha, \qquad y = \frac{1}{2}[f(\alpha + 0) + f(\alpha - 0)];$$

au voisinage de ce point, elle oscille d'une manière abrupte au-dessus et au-dessous de la courbe $y = f(x)$. Le plus haut (ou le plus bas) point de la $k^{\text{ième}}$ sinuosité correspond approximativement à l'abscisse

$$\alpha = \frac{2k\pi}{2n+1},$$

et la hauteur correspondante est approximativement $\frac{DP_k}{n}$, où D désigne le saut et où l'on a posé

$$P_k = \frac{\pi}{2} - \int_0^{k\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Certains résultats obtenus depuis par d'autres auteurs, en particulier Gronwall (*Math. Ann.*, t. LXXII, 1912, p. 221) et Fejér (*Journal de Crelle*, t. CXLII,

1913, p. 165), se déduisent immédiatement de ceux obtenus par l'auteur lui-même. En particulier, Fejér a indiqué une formule pour obtenir le saut d'une fonction d'après sa série de Fourier. Cette formule est un cas particulier d'une formule plus générale qui résulte immédiatement du Mémoire de l'auteur; c'est la suivante :

$$D = \frac{\pi}{\pi - 2F(c)} \lim_{n=\infty} \left[S_n\left(\alpha + \frac{1}{q_n}\right) - S_n\left(\alpha - \frac{1}{q_n}\right) \right],$$

où $q_1, q_2, \ldots$ sont des constantes positives augmentant indéfiniment de manière que

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{n}{q_n}\right) = c \qquad (c > 0 \text{ ou } c = +\infty);$$

$F(x)$ désigne la fonction

$$F(x) = \int_x^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

La formule de Fejér s'obtient en prenant $q_n = \frac{n}{g}$, où g désigne une racine de l'équation $F(x) = 0$.

Fejér (*Léopold*). — Sur les séries trigonométriques conjuguées (48-56).

Étant donnée une série trigonométrique

$$(1) \qquad a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \sin\nu\theta),$$

la série trigonométrique

$$(2) \qquad c + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-b_\nu \cos\nu\theta + a_\nu \sin\nu\theta),$$

où c est une constante arbitraire, est dite *conjuguée* de la première. Les deux séries conjuguées sont respectivement les parties réelle et imaginaire de la série de puissances

$$a_0 + ic + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu - ib_\nu) z^\nu \qquad (z = e^{i\theta}).$$

Si l'on désigne par $s_n(\theta)$ et $\sigma_n(\theta)$ les sommes des $n+1$ premiers termes des séries (1) et (2), par $\mathfrak{S}_n(\theta)$ et $\sum_n(\theta)$ les moyennes arithmétiques

$$\frac{s_0(\theta) + s_1(\theta) + \ldots + s_n(\theta)}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{\sigma_0(\theta) + \sigma_1(\theta) + \ldots + \sigma_n(\theta)}{n+1},$$

on démontre facilement les formules importantes

$$\mathfrak{S}_n(\theta) = s_n(\theta) - \frac{\sigma'_n(\theta)}{n+1}, \qquad \sum_n(\theta) = \sigma_n(\theta) + \frac{s'_n(\theta)}{n+1}.$$

L'auteur tire de ces formules des conséquences intéressantes relativement au problème suivant :

La série (1) *étant supposée uniformément convergente dans l'intervalle* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, *que peut-on en déduire sur la convergence de la série* (2) ?

Un théorème de S. Bernstein conduit d'abord au

THÉORÈME I. — *Si la série* (1) *converge uniformément dans l'intervalle* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, *la différence* $\sum_n (\theta) - \sigma_n(\theta)$ *tend vers zéro.*

De là résultent immédiatement les

THÉORÈMES II ET III. — *Si la série* (1) *converge uniformément dans l'intervalle* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, *la série conjuguée converge partout où elle est sommable; elle converge uniformément dans l'intervalle* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ *si elle est sommable uniformément dans cet intervalle.*

Le dernier théorème peut s'appliquer au cas où les deux séries conjuguées sont les séries de Fourier d'une fonction partout continue de θ, et l'auteur arrive ainsi au

THÉORÈME IV. — *Si la série de puissances*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

est convergente pour $|z| < 1$ *et si sa somme pour* $z < 1$ *est continue pour* $|z| \leqq 1$, *la convergence uniforme de sa partie réelle pour* $|z| = 1$ *entraîne la convergence uniforme de sa partie imaginaire, et réciproquement.*

Lorsque aucune des parties, réelle ou imaginaire, n'est uniformément convergente, elles peuvent présenter différentes sortes de singularités. *Si l'une de ces parties est convergente, elle présente nécessairement la singularité de Lebesgue* (convergence non uniforme) *dans le cas où l'autre partie présente la singularité de du Bois-Reymond* (divergence en un point).

Enfin, le problème proposé au début admet la solution suivante :

THÉORÈME VI. — *Si la série* (1) *est absolument convergente dans l'intervalle* $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, *la série conjuguée est presque partout convergente dans le même intervalle.*

Hensel (*K.*). — Sur les fondements d'une nouvelle théorie des corps de nombres quadratiques (57-70).

Dans la préface de sa *Zahlentheorie* (Berlin, 1913), l'auteur a fait remarquer que l'étude faite dans cet Ouvrage des anneaux de nombres g-adiques et de leur réduction à des corps de nombres était le seul problème qui se présentât dans la théorie des nombres, non seulement rationnels, mais encore algébriques. Dans cet Article, l'auteur s'occupe du cas le plus simple des nombres algébriques, à savoir les corps de nombres quadratiques.

1. ***Étude des nombres de*** K (δ) ***pour le domaine de g. L'anneau*** R (*g*, δ) ***des nombres g-adiques et sa décomposition complète en corps de nombres.***— Soit D un entier quelconque ne contenant aucun diviseur carré. A cet entier correspond un corps algébrique quadratique, dont tous les nombres entiers sont de la forme $a + b\xi$, où a et b sont des nombres entiers naturels quelconques et où $\xi = \sqrt{D}$ ou $\frac{1+\sqrt{D}}{2}$, suivant que $D = 4n + 2, 3$ ou $D = 4n + 1$. Le discriminant Δ du corps est dans les premiers cas 4D, dans le dernier D. Les diviseurs du discriminant sont les facteurs premiers qui entrent dans Δ.

Si g désigne un nombre entier naturel, tout nombre entier α du corps peut se mettre sous la forme

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 g + \alpha_2 g^2 + \ldots + \alpha_\rho g^\rho + \alpha^{(\rho+1)} g^{\rho+1},$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho$ sont *réduits* (c'est-à-dire que leurs coefficients a_i, b_i sont pris dans la suite 0, 1, ..., $g - 1$) et où $\alpha^{(\rho+1)}$ est un nombre entier du corps. On est ainsi conduit à introduire les nombres algébriques *g-adiques* définis par des séries

$$\alpha_\rho g^\rho + \alpha_{\rho+1} g^{\rho+1} + \ldots,$$

où $\alpha_\rho, \alpha_{\rho+1}, \ldots$ sont des nombres entiers algébriques réduits quelconques.

La théorie de ces nombres algébriques g-adiques est tout à fait analogue à celle des nombres rationnels g-adiques; du reste, tout nombre algébrique g-adique est de la forme

$$a + b\delta,$$

où a et b sont deux nombres rationnels g-adiques.

L'ensemble des nombres algébriques g-adiques forme un *anneau* R (g, δ), car la somme, la différence et le produit de deux de ces nombres est encore un nombre algébrique g-adique.

Si g est décomposable en un produit de facteurs premiers différents $p, q, \ldots, r$, tout nombre algébrique g-adique peut se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\alpha = \alpha_p + \alpha_q + \ldots + \alpha_r \ (g),$$

où le nombre g-adique α_p, par exemple, est déterminé par les équations

$$\alpha_p = \alpha\ (p), \qquad \alpha_p = 0\ (q), \qquad \ldots, \qquad \alpha_p = 0\ (r).$$

Il résulte de là que l'étude des anneaux R (g, δ) se ramène à celle des anneaux R (p, δ), où p est premier,

Tandis que les nombres *rationnels* p-adiques forment toujours un *corps*, la division étant toujours possible, il n'en est pas toujours de même pour les nombres *algébriques* p-adiques. Cela dépend de la réductibilité du polynome $x^2 - D$ dans le domaine des nombres rationnels p-adiques. *Si ce polynome est irréductible*, c'est-à-dire si $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, *l'anneau* R ($p$, δ) *est un corps.* ***Si le polynome est réductible***,

$$x^2 - D = (x - d)(x + d),$$

c'est-à-dire si $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, *l'anneau n'est pas un corps.*

Si $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$, l'auteur fait correspondre au nombre premier p une *position* $\mathfrak{p}$, et convient de dire que $\overline{\alpha} = \alpha$ est la valeur de α pour la position $\mathfrak{p}$. Le corps $R(p, \delta)$ est aussi désigné par $K(\mathfrak{p})$.

Si $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, et si $D = d^2(p)$, l'auteur fait correspondre à p deux positions $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ et convient de dire que

$$\overline{\alpha} = a + bd, \qquad \overline{\alpha'} = a - bd$$

sont les valeurs respectives de $\alpha = a + b\delta$ pour les positions $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$:

$$\alpha = \overline{\alpha}\ (\mathfrak{p}), \qquad \alpha = \overline{\alpha'}\ (\mathfrak{p}').$$

Les nombres rationnels p-adiques qui sont les valeurs des différents nombres algébriques p-adiques pour la position $\mathfrak{p}$, forment un corps $K(\mathfrak{p})$. Tout nombre algébrique p-adique peut être mis sous la forme

$$\alpha = \alpha_{\mathfrak{p}} + \alpha_{\mathfrak{p}'}\ (p),$$

où $\alpha_{\mathfrak{p}}$ et $\alpha_{\mathfrak{p}'}$ sont deux nombres algébriques p-adiques, définis d'une manière unique par les conditions

$$\alpha_{\mathfrak{p}} = \alpha\ (\mathfrak{p}), \qquad \alpha_{\mathfrak{p}} = 0\ (\mathfrak{p}');$$
$$\alpha_{\mathfrak{p}'} = 0\ (\mathfrak{p}), \qquad \alpha_{\mathfrak{p}'} = \alpha\ (\mathfrak{p}').$$

On a d'ailleurs

$$\alpha_{\mathfrak{p}} = (a + bd)\frac{d + \delta}{2d}, \qquad \alpha_{\mathfrak{p}'} = (a - bd)\frac{d - \delta}{2d}.$$

Une décomposition analogue est possible si g est un entier quelconque, de sorte que l'étude du corps $K(\delta)$ pour le domaine d'un entier quelconque g est ramenée à l'étude de ces nombres pour une position déterminée $\mathfrak{p}$.

2. *Étude des nombres d'un corps pour le domaine d'une position* $\mathfrak{p}$. — On convient de dire que la position $\mathfrak{p}$ qui correspond au nombre premier réel p est du premier ou du second ordre, suivant que $\left(\frac{D}{p}\right)$ est égal à $+1$ ou à -1. Le corps $K(\mathfrak{p})$ est alors du premier ou du second degré par rapport au corps $K(p)$.

Le nombre α sera dit *entier* pour la position $\mathfrak{p}$ si les coefficients de l'équation, irréductible dans $K(p)$, à laquelle satisfait α, sont des nombres entiers p-adiques. Si $\mathfrak{p}$ est du second ordre, cette équation

$$x^2 - \overline{a}x + \overline{b} = 0$$

est du second degré, et il suffit que $\overline{b}$ soit entier. Ce nombre

$$b = \alpha\alpha' = a^2 - Db^2$$

est dit la *norme* de α pour la position $\mathfrak{p}$; dans le cas où $\mathfrak{p}$ est du premier ordre, la *norme* de α est simplement la valeur $a + bd$ de α pour la position $\mathfrak{p}$,

Pour qu'un nombre α soit entier pour la position $\mathfrak{p}$, il faut et il suffit donc que sa norme soit entière.

De là résultent plusieurs conséquences importantes. En particulier, de deux nombres α et β l'un au moins est divisible par l'autre. On appelle *unité* ε un nombre qui est entier ainsi que son inverse. Tout nombre entier est divisible par toute unité. La somme, la différence et le produit de deux nombres entiers sont aussi des nombres entiers.

L'ensemble des nombres *entiers* pour la position $\mathfrak{p}$ forme donc un *anneau*. Ceux de ces nombres qui ne sont pas des unités ont leur norme divisible par p; parmi eux il y en a au moins un, soit π, dont la norme est divisible par la plus petite puissance de p. L'auteur appelle ce nombre π *nombre premier pour la position* $\mathfrak{p}$. Tout nombre entier ou fractionnaire α est, d'une manière et d'une seule, réductible à la forme $\varepsilon\pi^\rho$, où ε est une unité, ρ un exposant positif, nul ou négatif.

Il est facile de déterminer le nombre premier π. Si d'abord $\mathfrak{p}$ est du premier ordre, il est évident qu'on peut prendre $\pi = p$. Si $\mathfrak{p}$ est du second ordre et que p soit un diviseur de D, on peut prendre $\pi = \delta = \sqrt{D}$. Si $p = 2$ et $D = 4n + 3$, on peut prendre $\pi = 1 - \delta$. Dans tous les autres cas, on peut prendre $\pi = p$. En résumé, *π est égal à p, sauf si p est un diviseur du discriminant.*

Le nombre de tous les nombres entiers incongrus module π est égal à la norme de π, qu'on désigne par $n(\mathfrak{p})$. Un système de $n(\mathfrak{p})$ nombres incongrus entre eux s'appelle un *système de nombres réduits*.

Tout nombre α est représentable par une série

$$\alpha = \varepsilon^{(r)}\pi^r + \varepsilon^{(r+1)}\pi^{r+1} + \ldots \quad (\mathfrak{p}).$$

où les coefficients sont des nombres réduits et r un exposant positif, nul ou négatif ($\varepsilon^{(r)} \neq 0$). L'indice r est l'ordre de α.

On peut dire ainsi qu'on a des nombres π-*adiques*.

Étant donné un nombre g-adique quelconque, la connaissance des ordres $h, h', k, \ldots, l$ de ce nombre aux différentes positions, $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{q}, \ldots, \mathfrak{r}$ permet d'écrire une équivalence

$$\alpha \sim \mathfrak{p}^h \mathfrak{p}'^h \mathfrak{q}^k \ldots \mathfrak{r}^l;$$

le second membre de cette équivalence est ce qu'on appelle un *diviseur*.

Perron (Oskar). — Calcul de la solution de l'équation de Pell (71-73).

Dans le Tome CXLIII de ce journal, Remak a indiqué, pour la plus petite solution positive de l'équation de Pell

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

les limites supérieures

$$x \leqq (g+1)^{2g^3+1}, \qquad y \leqq (g+1)^{2g^3},$$

où g désigne la partie entière de $2\sqrt{D}$.

L'auteur indique, en s'appuyant sur la théorie des fractions continues, les

limites bien meilleures suivantes :

$$x < 2(b+1)^4\left(\frac{2}{3}b+1\right)^{2b(b+1)-4}, \qquad y < 2(b+1)^3\left(\frac{2}{3}b+1\right)^{2b(b+1)-4},$$

où b désigne la partie entière de $\sqrt{D}$.

Schur (*J.*). — Deux théorèmes sur les équations algébriques dont toutes les racines sont réelles (75-88).

On doit à E. Malo (*Journal de Mathématiques spéciales*, 4e série, t. IV, 1895, p. 7) le théorème suivant :

Si les racines de l'équation

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = 0 \qquad (a_m \neq 0)$$

sont toutes nulles, si celles de l'équation

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n = 0 \qquad (b_n \neq 0)$$

sont toutes réelles et de même signe, l'équation

$$h(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_k b_k x^k = 0,$$

où k est le plus petit des nombres m et n, a aussi toutes ses racines réelles. Si $m \leqq n$ et si $a_0 b_0 \neq 0$, ces racines sont distinctes.

On peut démontrer un théorème analogue (théorème I), mais d'une plus grande portée, en remplaçant dans l'énoncé précédent l'équation $h(x) = 0$ par l'équation

$$a_0 b_0 + 1!\, a_1 b_1 x + 2!\, a_2 b_2 x^2 + \ldots + k!\, a_k b_k x^k = 0.$$

L'auteur énonce et démontre en outre un second théorème :

Théorème II. — *Soit $f(x) = 0$ une équation de degré n dont toutes les racines sont réelles, soit x_n la plus grande racine de cette équation et x_{n-r} la plus grande racine de la $r^{\text{ième}}$ équation dérivée. On a non seulement, d'après le théorème de Rolle,*

$$x_n \geqq x_{n-1} \geqq x_{n-2} \geqq \ldots \geqq x_1,$$

mais encore

$$x_n - x_{n-1} \leqq x_{n-1} - x_{n-2} \leqq \ldots \leqq x_2 - x_1.$$

1. L'auteur démontre d'abord le lemme suivant :

Soit

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n = 0 \qquad (c_0 c_n \neq 0) :$$

une équation à racines toutes réelles, et soit $f(x)$ un polynome quelconque à racines egalement toutes réelles. L'équation

$$F(x) = c_0 f(x) + c_1 f'(x) + \ldots + c_n f^{(n)}(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles et toute racine multiple de cette équation est racine de $f(x)$.

La démonstration de ce théorème se ramène facilement au cas $n = 1$, et dans ce cas c'est une conséquence facile du théorème de Rolle.

2. L'auteur arrive à la démonstration du théorème I; des considérations de continuité permettent toujours de se ramener au cas

$$a_0 b_0 \neq 0, \qquad m \leqq n.$$

Dans ce cas, l'équation

$$\begin{aligned} F(x) &= b_0 f(x) + b_1 z f'(x) + \ldots + b_m z^m f^{(m)}(x) \\ &= P_0(z) + \frac{P_1(z)}{1!} x + \ldots + \frac{P_m(z)}{m!} x^m = 0 \end{aligned}$$

a, d'après le lemme précédent, toutes ses racines nulles, quel que soit z. Il en résulte que la suite des polynomes

$$P_0(z), \quad P_1(z), \quad \ldots, \quad P_m(z)$$

est une suite de Sturm; le théorème de Sturm montre alors que l'équation $P_0(z) = 0$ a ses racines réelles : c'est justement ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration s'applique encore au cas où $n > m$, où l'équation $g(x) = 0$ a ses racines toutes réelles, et où $b_0, b_1, \ldots, b_m$ sont de même signe.

3. Le théorème de Malo résulte du théorème précédent en remarquant qu'en même temps que l'équation

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = 0$$

a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$a_0 + \frac{a_1}{1!} x + \ldots + \frac{a_m}{m!} x^m = 0.$$

Le théorème peut être généralisé à plus de deux équations.

4. L'auteur démontre ensuite le théorème II : il suffit de démontrer l'inégalité

$x_n - x_{n-1}$ [illegible] $x_{n-1} - x_{n-2}$,

et cela dans le cas particulier où l'on a $x_{n-2} = 0$, $x_n = 1$.

Si des $n - 1$ différences $x_{i+1} - x_i$, deux sont égales entre elles, toutes les autres sont égales.

5. Le théorème II admet des applications intéressantes. On peut, par exemple, en déduire l'existence d'un entier m $(1 \leqq m \leqq n)$, tel qu'on ait

$\frac{x_1}{1} \leqq \frac{x_2}{2} \leqq \ldots \leqq \frac{x_m}{m}$, $\quad \frac{x_m}{m}$ [illegible] $\frac{x_{m+1}}{m+1}$ [illegible] $\ldots$ [illegible] $\frac{x_n}{n}$.

Voici une autre conséquence :

Soit

$\beta_1, \beta_2, \ldots$ [illegible]

une suite infinie de nombres tels que chacune des équations

$$G_n(x) = x^n + \binom{n}{1}\beta_1 x^{n-1} + \binom{n}{2}\beta_2 x^{n-2} + \ldots + \beta_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ait toutes ses racines réelles : il suffit pour cela que la série entière

$$\Psi(x) = 1 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \ldots$$

soit une fonction entière rationnelle ou transcendante de la forme

$$\Psi(x) = e^{-\gamma x^2 + \delta x} \prod_{\nu=1}^{\infty} (1 + \delta_\nu x)\, e^{-\delta_\nu x},$$

où les δ sont réels, γ étant positif ou nul. Dans ces conditions, si x_n désigne la plus grande racine de $G_n(x)$, la différence $x_n - x_{n-1}$ tend vers une limite λ quand n augmente indéfiniment, et λ est un nombre positif égal à l'inverse de la plus petite racine positive de $\Psi(x)$ [λ est nul si $\Psi(x)$ n'a pas de racine positive].

Pólya (G.) et Schur (J.). — Sur deux espèces de suites de facteurs dans la théorie des équations algébriques (89-113).

Cet Article se rattache intimement au précédent, dont il peut être considéré comme une suite.

Les suites de facteurs dont il est question ont déjà été considérées par Laguerre dans de nombreux cas particuliers. Une *suite de facteurs de première espèce* est une suite infinie de nombres réels

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots$$

telle que si

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = 0$$

est une équation quelconque à racines toutes réelles, l'équation

$$\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 x + \ldots + \alpha_m a_m x^m = 0$$

est également à racines toutes réelles. Une *suite de facteurs de seconde espèce*

$$\beta_0, \quad \beta_1, \quad \ldots, \quad \beta_n, \quad \ldots$$

est au contraire telle que si

$$b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m = 0$$

est une équation quelconque à racines toutes réelles *et de même signe*, l'équation

$$\beta_0 b_0 + \beta_1 b_1 x + \ldots + \beta_m b_m x^m = 0$$

a toutes ses racines réelles.

L'auteur indique des critères simples, nécessaires et suffisants, pour ces deux

espèces de suites de facteurs. Les uns sont de nature algébrique, les autres de nature transcendante. En particulier, la recherche des suites de facteurs est liée à la recherche de certaines fonctions entières de nature spéciale.

1. *Propriétés élémentaires des suites de facteurs.* — Si, dans une suite de facteurs de première espèce deux termes sont nuls, tous les termes intermédiaires sont également nuls; la suite de ceux des termes qui ne sont pas nuls ne présente que des permanences ou ne présente que des variations.

Si, dans une suite de facteurs de seconde espèce, deux termes consécutifs sont nuls, tous les termes précédents ou tous les termes suivants sont nuls. Deux termes non nuls séparés par un terme nul sont de signes contraires.

Deux suites de facteurs de première espèce donnent, par multiplication, une suite de facteurs de première espèce. Une suite de première espèce et une suite de seconde espèce donnent, par multiplication, une suite de seconde espèce.

Si les termes

$$\gamma_{n0}, \quad \gamma_{n1}, \quad \ldots, \quad \gamma_{n\nu}, \quad \ldots \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

forment, quel que soit n, une suite de facteurs de première (ou de deuxième) espèce, et si

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_{n\nu} = \gamma_\nu,$$

les nombres

$$\gamma_0, \quad \gamma_1, \quad \ldots, \quad \gamma_\nu, \quad \ldots$$

forment une suite de facteurs de première (ou de deuxième) espèce.

2. *Sur deux classes de fonctions entières à coefficients réels.* — L'auteur désigne sous le nom de *fonctions entières du type I* une fonction

$$\Phi(x) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!}x + \frac{\alpha_2}{2!}x^2 + \ldots$$

à coefficients réels dont la décomposition en facteurs primaires soit de la forme

$$\Phi(x) = \frac{\alpha_r}{r!}x^r e^{\gamma x} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + \gamma_\nu x),$$

où

$$\alpha_r \gtrless 0, \qquad \gamma \geq 0, \qquad \gamma_\nu \geq 0.$$

Il désigne sous le nom de *fonction entière du type II* une fonction

$$\Psi(x) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \ldots$$

à coefficients réels dont la décomposition en fonctions primaires soit de la forme

$$\Psi(x) = \frac{\beta_r}{r!}x^r e^{-\gamma x^2 + \delta x} \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + \gamma_\nu x) e^{-\gamma_\nu x},$$

où

$$\beta_r \gtrless 0, \qquad \gamma \geq 0.$$

Pour qu'une série de puissances $\Phi(x)$ à coefficients réels représente une

fonction entière du type I, il faut et il suffit qu'il existe une suite de polynomes $\Phi_n(x)$ à racines toutes réelles et de même signe, et convergeant uniformément vers $\Phi(x)$ dans un cercle $|x| \leqq \rho$.

Pour qu'une série de puissances $\Psi(x)$ à coefficients réels représente une fonction entière du type II, il faut et il suffit qu'il existe une suite de polynomes à racines toutes réelles, qui convergent uniformément vers $\Psi(x)$ dans le cercle $|x| \leqq \rho$.

Le premier théorème a déjà été démontré par Laguerre, mais en supposant que la convergence de $\Phi_n(x)$ vers $\Phi(x)$ soit uniforme *dans tout domaine borné*.

La démonstration donnée entraîne comme conséquence que si une suite de polynomes $\Omega_n(x)$, dont toutes les racines ont les parties imaginaires positives ou nulles, converge uniformément, pour $|x| \leqq \rho$, vers une série de puissances $\Omega(x)$, cette série représente une fonction entière de genre deux au plus.

3. *Critères algébriques pour les suites de facteurs.* — Pour qu'une suite de nombres réels

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots$$

soit une suite de facteurs de première espèce, il faut et il suffit que chacune des équations

$$\alpha_0 + \binom{n}{1}\alpha_1 x + \binom{n}{2}\alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ait toutes ses racines réelles et de même signe.

Pour qu'une suite de nombres réels

$$\beta_0, \quad \beta_1, \quad \beta_1, \quad \ldots$$

soit une suite de facteurs de seconde espèce, il faut et il suffit que chacune des équations

$$\beta_0 + \binom{n}{1}\beta_1 x + \binom{n}{2}\beta_2 x^2 + \ldots + \beta_n x^n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ait toutes ses racines réelles.

Dans la démonstration de ces critères, l'auteur se sert de la loi de composition énoncée dans le théorème I de l'article précédent.

De ces théorèmes résulte une nouvelle loi de composition plus générale que celle de Malo, et qui est la suivante :

« Étant données deux équations

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = 0,$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n = 0,$$

dont les racines sont toutes réelles, celles de la seconde étant de plus de même signe, l'équation

$$\gamma_0 a_0 b_0 + \gamma_1 a_1 b_1 x + \ldots + \gamma_k a_k b_k x^k = 0,$$

où k est le plus petit des entiers m et n, a aussi toutes ses racines réelles si

$$\gamma_0, \quad \frac{\gamma_1}{1!}, \quad \frac{\gamma_2}{2!}, \quad \ldots$$

est une suite de facteurs de première espèce, et réciproquement. »

4. *Critères transcendants pour les suites de facteurs.* — Pour qu'une suite

$$\alpha_0, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots$$

soit une suite de facteurs de première (ou de seconde) espèce, il faut et il suffit que la série entière

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!}x + \frac{\alpha_2}{2!}x^2 + \ldots$$

représente une fonction entière du type I (ou II).

5. *Exemples.* — La fonction entière $x^r e^x$ du type I, où r est un entier positif, donne une suite de facteurs de première espèce évidente. Les fonctions entières $e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\cos x$, $\sin x$, donnent des suites de facteurs de seconde espèce très simples.

Étant donnée une suite de m nombres réels

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots, \quad \gamma_m,$$

si l'on veut que l'équation

$$G(x) = g(x) + \gamma_1 \frac{x\, g'(x)}{1!} + \gamma_2 \frac{x^2 g''(x)}{2!} + \ldots + \gamma_m \frac{x^m g^{(m)}(x)}{m!} = 0$$

ait toutes ses racines réelles, quel que soit le polynome $g(x)$ à racines toutes réelles, il faut et il suffit qne l'équation

$$1 + \frac{\gamma_1}{1!}x + \frac{\gamma_2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\gamma_m}{m!}x^m = 0$$

ait toutes ses racines réelles et *négatives*. Si l'on veut que la propriété de $G(x)$ ait lieu simplement lorsque le polynome $g(x)$ a ses racines réelles et *de même signe*, il faut et il suffit que l'équation précédente ait toutes ses racines réelles. De là résulte, par exemple, que les nombres

$$1 + \nu + \nu^2, \qquad 1 + a\nu^2 \ (a \leqq 4) \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

forment deux suites de facteurs de première espèce et que les nombres

$$1 - 3\nu + \nu^2 \qquad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

forment une suite de facteurs de seconde espèce.

6. *Applications aux fonctions transcendantes entières de genres 0 et 1.* — La relation des fonctions entières des types I et II avec les polygones à racines réelles fournit une méthode permettant de pénétrer plus profondément les propriétés de ces fonctions entières. On peut ainsi démontrer facilement les théorèmes suivants :

La dérivée d'une fonction entière du type I (ou II) est encore une fonction entière du même type. — Ce théorème, appliqué à la fonction $e^{-\frac{x^2}{2}}$, montre immédiatement la propriété des racines des polynomes d'Hermite.

Les coefficients β_ν *de toute fonction entière du type II satisfont aux inégalités*

$$\beta_\nu^2 - \beta_{\nu-1}\beta_{\nu+1} \geqq 0.$$

Une fonction entière du type II, dont les coefficients sont tous positifs ou nuls, est une fonction du type I de la forme

$$e^{\gamma x}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1+\gamma_\nu x) \qquad (\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \geqq 0).$$

Pour qu'une série entière

$$\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{1!}x + \frac{\gamma_2}{2!}x^2 + \ldots$$

représente une fonction entière du type II (ou I), il faut et il suffit que chacune des équations

$$\gamma_0 x^n + \binom{n}{1}\gamma_1 x^{n-1} + \binom{n}{2}\gamma_2 x^{n-2} + \ldots + \gamma_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ait ses racines toutes réelles (ou réelles et de même signe).

Si les deux séries

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1!}x + \frac{\alpha_2}{2!}x^2 + \ldots,$$

$$\beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \ldots$$

représentent, la première une fonction entière du type I, la deuxième une fonction entière du type II, la série

$$\alpha_0\beta_0 + \frac{\alpha_1\beta_1}{1!}x + \frac{\alpha_2\beta_2}{2!}x^2 + \ldots$$

représente une fonction entière du type II.

Grommer (J.). — Fonctions transcendantes entières à zéros tous réels (114-166).

Ce Mémoire se rattache au même problème que les deux articles précédents; mais le point de vue est tout différent. On sait que, pour qu'un polynome

$$g(z) = 1 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$$

à coefficients réels ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit que les déter-

minants

$$A_m = \begin{vmatrix} s_{-2} & s_{-3} & \dots & s_{-m-1} \\ s_{-3} & s_{-4} & \dots & s_{-m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{-m-1} & s_{-m-2} & \dots & s_{-2m} \end{vmatrix} \qquad (m = 1, 2, \dots, n)$$

soient tous positifs, ou du moins que les ν premiers d'entre eux soient positifs, les suivants étant nuls. On a désigné par $s_{-\alpha}$ la somme des puissances semblables, d'exposant $-\alpha$, des racines du polynome; ces quantités sont encore définies par la formule

$$-\frac{g'(z)}{g(z)} = s_{-1} + s_{-2}z + s_{-3}z^2 + \dots$$

Cette dernière formule définit les quantités $s_{-\alpha}$ dans le cas où $g(z)$ est une fonction transcendante entière; dans ce cas, que signifie le fait que les déterminants A_m sont positifs? Si $g(z)$ est de genre 0 ou 1, il n'est pas difficile de démontrer directement que, si les zéros de $g(z)$ sont tous réels, les déterminants A_m sont positifs. Le résultat principal du Mémoire est que, *sans avoir à faire aucune hypothèse sur le genre de* $g(z)$, *le fait que les déterminanls* A_m *sont positifs entraîne la réalité des zéros de* $g(z)$; *de plus,* $g(z)$ *est nécessairement de genre* 0 *ou* 1, *à un facteur près de la forme* e^{-pz^2}, *où* p *est positif.*

Pour arriver à ce résultat, l'auteur utilise la théorie des fractions continues et la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables.

I. *Développements formels.* — Une série de puissances

$$F = \frac{t_0}{\lambda} + \frac{t_1}{\lambda^2} + \frac{t_2}{\lambda^3} + \dots \qquad (t_0 \neq 0)$$

donne en général naissance à une fraction continue de la forme

$$\cfrac{t_0}{\lambda + a_1 + \cfrac{c_1}{\lambda + a_2 + \cfrac{c_2}{\lambda + a_3 + \dots}}}$$

qui détermine à son tour complètement la série F. Les numérateurs partiels c_1, c_2, ... sont donnés par la formule

$$-c_n = \frac{A_{n+1}A_{n-1}}{A_n^2},$$

où l'on a posé

$$A_n = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{n-1} \\ t_1 & t_2 & \dots & t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1} & t_n & \dots & t_{2n-2} \end{vmatrix}, \qquad A_0 = 1.$$

Cette formule montre que le développement est possible si aucun des déterminants A_n n'est nul. On a de plus

$$a_n = \frac{\bar{A}_{n+1}}{A_{n+1}} - \frac{\bar{A}_n}{A_n},$$

où l'on a posé

$$\overline{A}_n = \begin{vmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} & t_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} & t_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1} & t_n & \dots & t_{2n-3} & t_{2n-1} \end{vmatrix}, \qquad \overline{A}_1 = t_1.$$

L'auteur se place maintenant dans le cas particulier où les a_n sont réels, les c_n étant réels et *négatifs* ($c_n = -b_n^2$); il suppose de plus $t_0 = 1$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les déterminants A_n soient tous *positifs*. Dans ce cas, si l'on désigne par $\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite et si l'on applique l'algorithme d'Euclide à la recherche du plus grand commun diviseur des polynomes $P_n(\lambda)$ et $Q_n(\lambda)$, on arrive à une suite de polynomes

$$Q_n(\lambda), \quad Q'_{n-1}(\lambda) = P_n(\lambda), \quad Q'_{n-2}(\lambda), \quad \dots, \quad Q_0^{(n)} = 1$$

dont le terme de plus haut degré a pour coefficient 1 et *qui forme une suite de Sturm*. Par suite, $Q_n(\lambda)$ *a toutes ses racines réelles ainsi que* $P_n(\lambda)$ *et les racines de* $P_n(\lambda)$ *séparent celles de* $Q_n(\lambda)$.

Réciproquement, si deux polynomes $k(\lambda)$, $l(\lambda)$, de degrés $n-1$ et n, ont toutes leurs racines réelles, et si les racines de $k(\lambda)$ séparent celles de $l(\lambda)$, la fraction $\frac{k(\lambda)}{l(\lambda)}$ est développable en une fraction continue à numérateurs tous négatifs. Ou encore les coefficients $1, t_1, t_2, \dots$ du développement

$$\frac{k(\lambda)}{l(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} + \frac{t_1}{\lambda^2} + \frac{t_2}{\lambda^3} + \dots$$

satisfont aux inégalités

$$A_i = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_{i-1} \\ \cdot & \dots & \dots & \dots \\ t_{i-1} & t_i & \dots & t_{2i-1} \end{vmatrix} > 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Si l'on applique le résultat précédent à la fraction $\frac{g'(\lambda)}{g(\lambda)}$, on retrouve la condition nécessaire et suffisante de réalité des racines du polynome $g(\lambda)$: c'est que les déterminants

$$A_i = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{i-1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_i & \dots & s_{2i-2} \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

soient tous positifs.

Le même résultat, appliqué à la fraction $-\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, où $\varphi(z)$ est un polynome de degré n, et où $z = \frac{1}{\lambda}$, donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome de degré n ait toutes ses racines distinctes et *positives* : c'est que les déterminants

$$A'_i = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_i \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_i & s_{i+1} & \dots & s_{2i-1} \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

soient tous positifs.

Plus généralement, *pour qu'un polynome réel* $g(\lambda)$ *de degré* n *ait toutes ses racines distinctes et* $\left\{ \begin{matrix} \textit{réelles} \\ \textit{positives} \end{matrix} \right\}$, *il faut et il suffit que les déterminants*

$$A_i^{(k)} = \begin{vmatrix} s_k & s_{k+1} & \dots & s_{k+i-1} \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \dots & s_{k+i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k+i-1} & s_{k+i} & \dots & s_{k+2i-2} \end{vmatrix} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

soient tous positifs; k désigne un entier quelconque $\left\{ \begin{matrix} \textit{pair} \\ \textit{impair} \end{matrix} \right\}$, et $g(0)$ *est supposé différent de zéro.*

II. *Convergence de la fraction continue engendrée par une série de puissances convergente.* — Supposons que la série de puissances

$$f(z) = z + t_1 z^2 + t_2 z^3 + \dots$$

soit convergente à l'intérieur d'un cercle K. Si elle engendre une fraction continue $K(\lambda) = K\left(\frac{1}{z}\right)$, les réduites $\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$ de cette fraction continue convergent uniformément vers $f(z)$ à l'intérieur de tout cercle intérieur à K.

Ce théorème de convergence repose au fond sur la propriété, démontrée par l'auteur, que les inverses des racines de $Q_n(\lambda)$ ne sont pas intérieures au cercle K.

III. *Représentation de la fraction continue par une intégrale définie.* — A toute fraction continue $K(\lambda)$, à numérateurs partiels négatifs, l'auteur fait correspondre, avec Stieltjes, une suite de fonctions $\varphi_n(u)$ d'une variable réelle u. Si l'on pose

$$\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^{(n)}}{\lambda - \lambda_i^{(n)}} \qquad (\lambda_1^{(n)} < \lambda_2^{(n)} < \dots < \lambda_n^{(n)}),$$

les résidus $M_i^{(n)}$ sont positifs. On pose alors

$$\begin{aligned} \varphi_n(u) &= 0, & &\text{pour} & u &< \lambda_1^{(n)}, \\ \varphi_n(u) &= M_1^{(n)} & &\text{»} & \lambda_1^{(n)} &< u < \lambda_2^{(n)}, \\ \varphi_n(u) &= M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \dots + M_n^{(n)} & &\text{»} & \lambda_n^{(n)} &< u. \end{aligned}$$

Cette fonction $\varphi_n(u)$ est comprise entre 0 et 1, et l'on a

$$\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_n(u)}{\lambda - u}.$$

Cela posé, il est possible de choisir une suite infinie d'entiers croissants

$$n_1, \quad n_2, \quad \dots, \quad n_h, \quad \dots$$

telle que la fonction $\frac{P_{n_h}(\lambda)}{Q_{n_h}(\lambda)}$ tende uniformément vers une limite dans tout domaine G du plan des λ, à abscisses finies, et admettant une distance minima

positive de l'axe réel; et l'on a alors

$$\lim_{h=\infty} \frac{P_{n_h}(\lambda)}{Q_{n_h}(\lambda)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Psi(u)}{\lambda - u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dX(u)}{\lambda - u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{\lambda - u},$$

où

$$\Psi(u) = \limsup_{h=\infty} \varphi_{n_h}(u),$$

$$X(u) = \liminf_{h=\infty} \varphi_{n_h}(u),$$

$$\Phi(u) = \frac{p\Psi(u) + qX(u)}{p+q} \qquad (p \geq 0,\ q \geq 0,\ p+q > 0).$$

Le choix de la suite des indices n_h est en général nécessaire; par exemple, si l'on suppose

$$a_n = 0, \qquad b_n^2 = c^n \qquad (c > 1),$$

on obtient une fraction continue dont les réduites successives *divergent* sur l'axe imaginaire.

Il existe cependant un cas particulier intéressant dans lequel la convergence uniforme des réduites $\frac{P_n(\lambda)}{Q_n(\lambda)}$ est assurée pour $n = \infty$: c'est celui où la convergence a lieu pour une infinité de valeurs de λ, ayant au moins un point limite non réel; la convergence uniforme a alors lieu dans tout domaine fini G du plan des λ situé à une distance minima positive de l'axe réel.

IV. *Application à la théorie des fonctions.* — L'auteur revient à une série de puissances

$$f(z) = z + t_1 z^2 + t_2 z^3 + \ldots$$

qu'il suppose convergente dans un cercle de rayon R; il suppose de plus les déterminants

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_2 & \ldots & t_{n-1} \\ t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n-1} & t_n & t_{n+1} & \ldots & t_{2n-2} \end{vmatrix} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

tous positifs.

Dans ces conditions, la fonction $f(z)$ engendre une fraction continue $K\left(\frac{1}{z}\right)$ à coefficients réels et numérateurs partiels négatifs. Cette fraction continue converge nécessairement à l'intérieur du cercle de rayon R, et, par suite, *pour toute valeur non réelle de* $\lambda = \frac{1}{z}$. Comme enfin les racines $\lambda_i^{(n)}$ de $Q_n(\lambda)$ sont toutes inférieures ou égales à $\frac{1}{R}$, on a

$$f(z) = K(\lambda) = \int_{-\frac{1}{R}}^{+\frac{1}{R}} \frac{d\Phi(u)}{\lambda - u},$$

formule qui montre que, *pour* λ *non réel,* $f(z)$ *est fini et différent de zéro.*

L'auteur suppose alors que la série $f(z)$ est élément d'une fonction *méromorphe.* Les pôles a (et les zéros) de cette fonction sont, d'après ce qui précède,

tous réels. L'étude de la fonction $\Phi(u)$ montre que, dans l'intervalle qui sépare les inverses de deux pôles consécutifs, cette fonction est constante. L'auteur arrive ainsi à la formule

$$-\frac{f(z)}{z} = -d\,\Phi(0) + \frac{\Sigma' d\,\Phi\left(\frac{1}{z_i}\right) z_i}{z - z_i} = -c + \sum \frac{R_i}{z - z_i} \qquad \left(c \leqq 0,\ \frac{R_i}{z_i} > 0\right).$$

On arrive ainsi à la décomposition de la fonction $\frac{f(z)}{z}$ *en éléments simples d'après Mittag-Leffler.*

Les hypothèses faites sur les déterminants A_n reviennent à supposer que les formes quadratiques

$$\sum_{i,k=0}^{n} t_{i+k} x_i x_k$$

sont, pour chaque valeur de n, définies et positives.

On arrive ainsi au théorème suivant, dans l'énoncé duquel on a posé

$$-\frac{f(z)}{z} = r(z):$$

Une fonction méromorphe réelle $r(z)$, régulière à l'origine, a tous ses pôles et tous ses zéros réels et distincts, si la forme quadratique

$$\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k} x_i x_k$$

est définie positive pour chaque valeur de n. La fonction $r(z)$ admet alors un développement de Mittag-Leffler sans termes complémentaires assurant la convergence, avec une constante additive négative ou nulle. Les résidus sont du même signe que les pôles correspondants. En particulier, $r(z)$ est une fonction rationnelle de z quand les formes quadratiques

$$\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k} x_i x_k$$

sont simplement semi-définies positives à partir d'une certaine valeur de n.

La réciproque de ce théorème est vraie.

Le cas où les formes quadratiques

$$\sum_{i,k=0}^{n} r_{i+k+m} x_i x_k$$

sont définies positives, m désignant un entier positif donné, correspond au développement

$$r(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{R_i z_i^m}{z - z_i} + P_{m-1}\left(\frac{z}{z_i}\right) \right] \quad c\, z$$

Ces théorèmes, appliqués à la dérivée logarithmique d'une fonction entière, donnent le nouveau théorème suivant :

Pour qu'une fonction entière réelle $g(z)$, ne s'annulant pos pour $z = 0$, ait tous ses zéros réels, et pour que de plus cette fonction soit de genre zéro, à un facteur e^{-cz} près ($c \geqq 0$), il faut et il suffit que la forme quadratique

$$\sum_{i,k=0}^{n} s_{(i+k+1)} x_i x_k$$

soit définie positive pour chaque valeur de n.

Hurwitz a donné un criterium pour qu'un polynome réel $P(z)$ n'ait que des racines dont les parties réelles soient négatives. Ce criterium peut s'étendre aux fonctions transcendantes entières. *Pour qu'une fonction entière*

$$g(z) = 1 + g_1 z + g_2 z^2 + \ldots$$

n'ait que des zéros à partie réelle négative, il faut et il suffit que les mineurs principaux du déterminant

$$\begin{vmatrix} g_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & \ldots \\ g_3 & g_2 & g_1 & 1 & 0 & . & . & \ldots \\ g_5 & g_4 & g_3 & g_2 & g_1 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & . & \ldots \end{vmatrix}$$

soient tous positifs.

L'auteur termine son Mémoire en appliquant les résultats obtenus à la fonction $\frac{n \cot g x - 1}{2}$, dont Lambert a donné un développement en fraction continue, et aux fonctions de Bessel $I_n(z)$.

E. Cartan.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA (¹).

Serie III, Tomo VIII, 1903.

Ciani (E.). — Sur les groupes finis de collinéations quaternaires, holoédriquement isomorphes aux groupes des polyèdres réguliers (1-37).

Ce problème est un cas particulier du problème général, résolu par Maschke dans le champ ternaire ou quaternaire de la détermination des groupes finis linéaires, holoédriquement isomorphes au groupe symétrique ou au groupe alterné de n éléments. L'auteur reprend, par des considérations géométriques, le cas parti-

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXIX₂, p. 78-90.

culier des groupes isomorphes aux groupes de rotation des polyèdres réguliers. Il retrouve ainsi les douze types possibles : trois types tétraédriques, cinq octaédriques et cinq icosaédriques. Dans une deuxième partie, il étudie plus particulièrement l'un des cinq groupes icosaédriques G_{60}^{v}, caractérisé par la propriété suivante : il existe deux systèmes de cinq droites invariants par les substitutions du groupe; les droites de chacun des systèmes ne rencontrent aucune des droites du même système et en rencontrent quatre de l'autre système. Le groupe G_{60}^{v} est aussi le seul des cinq groupes icosaédriques qui possède des cubiques gauches invariantes non décomposables. Enfin, parmi les groupes trouvés, c'est le seul pour lequel les surfaces invariantes de degré minimum soient du quatrième degré. L'auteur étudie en particulier une surface invariante remarquable qui contient 60 droites groupées en trois systèmes invariants contenant respectivement 10, 20 et 30 droites.

Fubini (*G.*). — Sur les espaces qui admettent un groupe continu de mouvements (premier Mémoire) (39-81).

Ce Mémoire contient d'abord quelques théorèmes généraux relatifs à la recherche des espaces qui admettent un groupe continu de mouvements. L'auteur donne les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe puisse être considéré comme un groupe de mouvements. Signalons entre autres résultats le suivant : On peut déterminer par de simples résolutions d'équations algébriques les transformations infinitésimales de tous les groupes qui peuvent être considérés comme des groupes de mouvements et par de simples quadratures les transformations finies de ces mêmes groupes, ainsi que les éléments linéaires des espaces correspondants.

L'auteur recherche ensuite ceux de ces groupes qui sont à 1, 2, 3 ou 4 paramètres. Lorsque le nombre des transformations infinitésimales dépendantes est inférieur ou égal à 3, on peut les considérer comme des groupes de mouvement d'un espace à trois dimensions au plus et ces derniers groupes ont été déterminés par M. Bianchi. M. Fubini détermine ensuite parmi les groupes cherchés ceux qui sont à quatre paramètres et à transformations infinitésimales indépendantes. Vient ensuite une méthode pour la recherche des sous-groupes finis discontinus de mouvements : appliquée à deux espaces considérés par M. Bianchi, cette méthode conduit à des représentations géométriques remarquables de ces espaces sur la sphère ou sur la pseudosphère.

Le Mémoire se termine par la détermination des espaces admettant un groupe de mouvements à 1, 2, 3 ou 4 paramètres. Le cas d'un groupe à plus de 4 paramètres avec 4 transformations infinitésimales indépendantes est réservé pour un Mémoire ultérieur. On détermine la forme de l'élément linéaire pour chacun des espaces ainsi trouvés, ainsi que les relations qui doivent exister entre les coefficients de cet élément linéaire.

Nicoletti (*O.*). — Sur la formule de Taylor (83-95).

Généralisation de quelques résultats relatifs aux séries doubles de Taylor démontrés antérieurement par l'auteur (*Rendiconti Lincei*, [illegible]). Ici les séries envisagées sont des séries à n variables. Dans la formule de Taylor à n variables, le reste peut s'exprimer par une somme d'intégrales multiples portant sur des fonctions dépendant d'une façon simple de la fonction donnée. De cette

forme du reste on déduit d'autres formes généralisant diverses formes classiques du reste connues pour les fonctions d'une seule variable, reste de Schlömich et Roche, reste de Lagrange, reste de Cauchy. Du reste de Cauchy, l'auteur déduit les conditions nécessaires et suffisantes pour que la série de Taylor relative au point $a_1, a_2, \ldots, a_n$ converge absolument dans le champ $|x_i - a_i| < R_i$ et ait pour somme la fonction donnée.

Marletta (*G.*). — Étude géométrique de la quartique gauche rationnelle (97-128).

La quartique gauche rationnelle peut être considérée (d'aprés Clifford) comme projection de la quartique normale de l'espace à 4 dimensions. C'est à ce point de vue qu'est étudiée ici la quartique gauche rationnelle dont on retrouve ainsi par une voie uniforme les propriétés projectives bien connues établies à d'autres points de vue par divers auteurs. Cas particuliers de la quartique équi-anharmonique (c'est celle dont la développable osculatrice possède une conique triple au lieu de la sextique double du cas général), de la quartique à point double et de la quartique ayant une ou deux tangentes stationnaires. Un dernier Chapitre est consacré à l'étude de quelques involutions remarquables relatives à la courbe et qui sont des cas particuliers des involutions considérées par M. Berzolari pour une courbe rationnelle d'un espace quelconque,

Tedone (*O.*). — Essai d'une théorie générale des équations de l'équilibre élastique pour un corps isotrope (premier Mémoire : corps limités par un plan ou par une sphère) (129-180).

On sait que les équations indéfinies de l'équilibre élastique d'un corps isotrope S peuvent prendre, avec les notations habituelles, l'une des deux formes suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta^2 u + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0,\\ &\Delta^2 v + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \qquad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},\\ &\Delta^2 w + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\mu\left(\frac{\partial\varpi_2}{\partial z} - \frac{\partial\varpi_3}{\partial y}\right) = 0, \qquad \varpi_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),\\ &(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + 2\mu\left(\frac{\partial\varpi_3}{\partial x} - \frac{\partial\varpi_1}{\partial z}\right) = 0, \qquad \varpi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\ &(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + 2\mu\left(\frac{\partial\varpi_1}{\partial y} - \frac{\partial\varpi_2}{\partial x}\right) = 0, \qquad \varpi_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),\end{aligned}\right.$$

où λ, μ sont les constantes de Lamé et u, v, w les composantes du déplacement. Soient d'autre part L, M, N les composantes de la tension agissant sur un élément de la surface σ qui limite le corps S. Il s'agit de déterminer un système de fonctions u, v, w vérifiant les équations (1), ou (2), en tout point de S et telles que trois des fonctions u, v, w, L, M, N convenablement choisies prennent des valeurs données sur la surface σ.

La méthode de M. Tedone consiste à regarder provisoirement comme connue la dilatation cubique θ, à calculer alors u, v, w, puis à obtenir θ en exprimant les conditions aux limites. Il introduit à cet effet : 1° la fonction de Green G définie dans S, admettant pour pôle un point x, y, z intérieur à S et assujettie à s'annuler sur la surface σ; 2° la fonction de Green G_1 analogue à G dans S, mais telle que sur σ la dérivée normale $\frac{dG_1}{dn}$ ait une valeur constante. Les équations (1) entraînent comme conséquence le fait que $u + \frac{\lambda+\mu}{2\mu} x\theta$ est une fonction harmonique dans S : en appliquant à cette fonction et à la fonction harmonique G le théorème de Green, M. Tedone obtient l'équation

$$(3)\qquad u = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma u\frac{dG}{dn}d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma x\theta\frac{dG}{dn}d\sigma;$$

la fonction G_1 fournit une formule analogue. Les formules ainsi obtenues jouent un rôle fondamental dans la méthode de M. Tedone.

Soit maintenant à traiter le problème de l'équilibre élastisque quand on donne à la surface σ les valeurs des déplacements u, v, w; dans l'équation (3) le premier terme est alors connu; en portant les valeurs de u, v, w données par la formule (3) et par les formules analogues dans l'équation

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

on obtient pour θ une équation où θ figure dans des intégrales étendues à σ. Le problème revient à déduire de cette équation les valeurs que doit prendre θ sur la surface σ : la fonction θ qui est harmonique dans S est alors déterminée par ses valeurs à la surface.

Dans le cas où l'on se donne trois des quantités u, v, w, L, M, N choisies autrement, on emploie une méthode analogue. Le problème revient donc à déterminer la fonction harmonique θ, ou des fonctions analogues, à l'aide d'une équation intégrale. L'auteur laisse de côté dans ce Mémoire le théorème d'existence de la solution. Il examine seulement les cas particuliers suivants, où la solution dépend d'équations différentielles ou aux dérivées partielles tandis que le cas général conduit à des équations intégrales :

1° *Problèmes où le corps élastique est limité par un plan indéfini.* — Si ce plan est le plan $z = 0$ et si le domaine S est le domaine $z > 0$, on a

$$G = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}$$

en désignant par r et r_1 les distances du point variable au point x, y, z et à son symétrique par rapport au plan $z = 0$. On a de même

$$G_1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}.$$

L'auteur traite alors complètement le problème de l'équilibre dans les divers cas où l'on donne sur le plan $z = 0$ les valeurs des trois quantités de l'un des groupes suivants : u, v, w; L, M, N; u, v, N; L, M, w; u, M, N; L, v, N.

2° *Problèmes dans lesquels le corps est limité par une sphère.* — Ici encore

la fonction G a une expression simple. Il y a deux problèmes à traiter suivant que le domaine S est l'intérieur ou l'extérieur de la sphère : la méthode est appliquée successivement à ces deux problèmes lorsqu'on se donne sur la surface σ de la sphère soit u, v, w, soit L, M, N, soit L, v, w, soit enfin u, M, N.

Revenant ensuite au cas général, l'auteur indique quelques autres formes de conditions à la surface pour lesquelles le calcul des variations suffit à démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

Boggio (*T.*). — Sur l'intégration de quelques équations linéaires aux dérivées partielles (181-232).

L'auteur se propose d'établir la condition pour que deux équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre quelconque aient une solution commune, problème qui, dans le cas de deux équations du second ordre à deux variables, a été traité par M. Bianchi (*Atti Lincei*, 1886).

Le Chapitre I contient quelques formules obtenues en introduisant les dérivées fonctionnelles d'expressions différentielles linéaires. Soit $\mathfrak{D}u$ une expression différentielle linéaire

$$\mathfrak{D}u = \Sigma a_i D^i u,$$

où D est le symbole de la dérivation ordinaire. L'expression $\mathfrak{D}(xu) - x\mathfrak{D}(u)$ est égale à $\Sigma a_i i D^{i-1} u$, et pour cette raison on l'appelle *dérivée fonctionnelle* de $\mathfrak{D}(u)$. On peut considérer des dérivées fonctionnelles d'ordre quelconque. La définition s'étend aux expressions différentielles linéaires à un nombre quelconque de variables, dont on définit les dérivées fonctionnelles partielles.

Dans le Chapitre II, on suppose les coefficients a_i constants et l'on montre comment on peut obtenir dans ces conditions l'intégrale générale de l'équation $\mathfrak{D}^2 u = 0$ connaissant des solutions de l'équation $\mathfrak{D}u = 0$.

Dans le Chapitre III, on détermine la condition nécessaire et suffisante pour que deux équations linéaires à coefficients constants et à deux variables indépendantes, dont l'une homogène, aient des solutions communes.

Dans le Chapitre IV, on montre d'abord que toute fonction U qui vérifie l'équation $\mathfrak{D}^m U = 0$ peut être représentée par la formule

$$U = x^{m-1} u_1 + x^{m-2} u_2 + \ldots + x u_{m-1} + u_m,$$

où les u sont des fonctions vérifiant l'équation $\mathfrak{D}u = 0$. Puis on considère le cas où $\mathfrak{D}$ est décomposable en facteurs : son intégrale générale s'exprime alors à l'aide d'intégrales de certaines autres équations plus simples.

Les Chapitres V et VI sont relatifs aux équations à coefficients variables : on étend à ces équations certaines des propriétés établies précédemment pour les équations à coefficients constants.

Le Chapitre VII contient deux applications. Tout d'abord l'auteur démontre que, si u est une fonction vérifiant l'équation $\mathfrak{D}u = 0$ à coefficients constants et si l'on doit avoir aussi $\mathfrak{D}^2[(x^2 + y^2)u] = 0$, l'expression $\mathfrak{D}$ se réduit au symbole Δ^2 de Laplace. Une deuxième application est relative à l'équation

$$\left(\Delta^2 + f_1 \frac{\partial}{\partial x} + f_2 \frac{\partial}{\partial y} + a \frac{\partial}{\partial z} + f\right)^m U = 0,$$

où f_1, f_2 sont des fonctions de x, y et a une constante. L'auteur montre

comment on peut intégrer cette équation dans l'espace indéfini limité par le plan $z = 0$ connaissant sur ce plan la valeur de la fonction U et de ses $m - 1$ premières dérivées prises suivant la normale au plan.

Bottasso (*M.*). — Sur les coniques bitangentes aux surfaces algébriques (233-243).

Mémoire de géométrie énumérative dans lequel l'auteur établit la condition pour qu'une conique soit bitangente à une surface générale d'ordre n. La méthode suivie consiste à réduire les problèmes relatifs aux coniques de l'espace aux problèmes analogues résolus par Zeuthen pour les coniques du plan : l'auteur s'appuie pour cela sur un théorème d'Halphen relatif aux caractéristiques des coniques de l'espace. Application à la détermination du nombre des coniques de l'espace bitangentes à quatre surfaces de degré donné, les plus générales de leur degré. En particulier il y a 448 coniques de l'espace bitangentes à quatre quadriques données.

Bortolotti (*E.*). — Sur la limite du quotient de deux fonctions (245-286).

Si en un même point les deux fonctions f, φ d'une variable x sont toutes deux nulles ou infinies, il peut arriver que la limite de $\frac{f}{\varphi}$ existe sans que la limite du rapport des dérivées existe, ou réciproquement. L'étude de cette question amène l'auteur à se poser la question suivante :

Soit $[x]$ l'ensemble des points d'un intervalle $(x_0, \ldots + \infty)$ pour lesquels les dérivées f', φ' ne sont pas simultanément nulles ou infinies et pour lesquels on a une relation de la forme

$$m < \left|\frac{f'}{\varphi'}\right| < M.$$

Soit, d'autre part, $[\xi]$ l'ensemble des points du même intervalle pour lesquels les conditions précédentes ne sont pas toutes réalisées. *Quelle relation doit-il y avoir entre les mesures des ensembles* $[x]$ *et* $[\xi]$ *pour qu'on soit assuré de l'existence d'un intervalle* $(x_{m,M}, \ldots + x)$ *en chacun des points duquel on ait*

$$m\mu < \left|\frac{f}{\varphi}\right| < \nu M$$

μ, ν *étant deux nombres indépendants de* x, *différents de zéro et de l'infini?*

L'auteur démontre que, sous les hypothèses habituelles qu'on fait dans ce genre de recherches, une condition suffisante est que l'ensemble $[\xi]$ soit ***discret***, c'est-à-dire que sa mesure extérieure soit nulle. Si l'on introduit en plus l'hypothèse que l'une au moins des fonctions $|f|$, $|\varphi|$ devienne infinie en croissant constamment, une condition suffisante est que *le rapport des mesures des ensembles* $[\xi]$, $[x]$ *relatifs à l'intervalle* $(x_0, \ldots, x)$ *devienne infiniment petit pour* x *infini*. Passant à la recherche des conditions nécessaires, l'auteur suppose que les fonctions f, φ soient monotones, finies, continues, dérivables dans l'intervalle $(x_0, \ldots, +\infty)$, que l'une au moins devienne infinie en croissant

constamment et que l'une au moins des deux dérivées f', φ' soit intégrable dans tout intervalle fini $(x_0, \ldots, x)$. Alors la condition suffisante qui précède devient aussi nécessaire.

Lorsque les rapports $\frac{f}{\varphi}$ et $\frac{f'}{\varphi'}$ sont l'un et l'autre déterminés pour x infini, on obtient des critères qui permettent de tirer parti du théorème de L'Hôpital même quand le rapport $\frac{f'}{\varphi'}$ a la forme $\frac{\infty}{\infty}$ ou la forme $\frac{0}{0}$.

Une application de la théorie précédente est la détermination de l'ordre d'infinitude des fonctions monotones qui vérifient la relation

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = 1.$$

Ces fonctions sont appelées par l'auteur fonctions de la première classe. *Les fonctions monotones qui ont une dérivée logarithmique infiniment petite appartiennent à cette première classe et les fonctions de la première classe croissent moins rapidement que l'exponentielle* e^{ax} (*a réel et positif*). Sous certaines conditions, les réciproques sont aussi vraies, de sorte que la question suivante est résolue :

« Sous quelles conditions les deux faits pour une fonction monotone d'avoir une dérivée logarithmique infiniment petite et de croître moins rapidement que e^{ax} sont-ils conséquences l'un de l'autre? »

Nicoletti (*O.*). — Quelques théorèmes sur les déterminants (287-297).

Un déterminant d'ordre n étant mis sous la forme

$$D = \begin{vmatrix} A & P \\ Q & B \end{vmatrix}$$

où A, B désignent deux matrices complémentaires et P, Q les matrices adjacentes, on peut développer ce déterminant D comme une fonction quadrilinéaire des mineurs des divers ordres des quatre matrices A, B, P, Q. On obtient ainsi un théorème qui généralise un théorème de Hesse. L'auteur examine des cas particuliers qui le conduisent à des déterminants nuls ou à des déterminants décomposables en produits de deux facteurs rationnels par rapport aux éléments du déterminant. La théorie est étendue ensuite aux déterminants décomposés en un nombre quelconque de matrices.

Graf (*J.-H.*). — De la détermination de certaines fonctions d'après des conditions données (299-319) (en français).

Relations fonctionnelles diverses relatives à la fonction

$$f(x) = \int_0^x -\log(1-x)\frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Détermination d'un polynome de degré n tel que, pour $|x|<1$, les termes en $x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots, x^{2n}$ dans le développement du produit $\log(1+x)-f(x)$ soient nuls. Détermination à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1 d'une fonction dont on connaît la composante réelle sur la circonférence de ce cercle. Autres problèmes analogues dans le cas où la fonction présente certaines discontinuités de nature donnée.

Serie III, Tomo IX, 1904.

Levi-Civita (*T.*). — Trajectoires singulières et chocs dans le problème des trois corps (1-32).

Dans le problème des trois corps se pose la question suivante : « Quelles sont les conditions initiales singulières pour lesquelles il y a choc dans l'avenir ou dans le passé? » Cette question est résolue ici par l'auteur dans le cas du problème *restreint* des trois corps, c'est-à-dire d'une masse infiniment petite P attirée par deux masses finies S, J animées d'un mouvement de rotation uniforme dans un même plan autour du centre de gravité de l'ensemble de ces deux masses.

Soient μ et ν les masses respectives des deux corps S et J. On peut choisir l'unité de masse de façon que $\mu+\nu$ soit égal à 1 et choisir aussi les unités de longueur et de temps de façon que la distance constante SJ soit égale à 1, ainsi que la vitesse angulaire constante de la droite SJ. Soient alors $\overline{\mathrm{SP}}=r$, $\overline{\mathrm{JP}}=\Delta$, $\widehat{\mathrm{JSP}}=\theta$. L'auteur met les équations du problème sous la forme

$$(\Sigma)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{d\rho} = -2\rho^2\dfrac{\theta'}{\mathrm{H}}, \\[2ex] \rho\dfrac{d\theta'}{d\rho} = -4(\theta'+1) - 2\mu\rho\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{H}}, \end{cases}$$

en posant

$$\theta' = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \rho = |\sqrt{r}\,|,$$

$$\mathrm{W} = \sin\theta\left(1-\frac{1}{\Delta^3}\right),$$

$$\mathrm{H} = \pm\sqrt{2\nu - 2\mathrm{C}\rho^2 + 2\mu\rho^2\left(\frac{1}{\Delta} - r\cos\theta\right) - \rho^6\theta'^2 + \rho^6}$$

et en désignant par C la constante introduite par une première intégration. La méthode des fonctions majorantes permet d'établir l'existence d'une infinité d'intégrales holomorphes du système (Σ) telles que, pour $\rho=0$, θ prenne une valeur arbitraire θ_0 et θ' la valeur -1. L'auteur démontre ensuite la proposition suivante :

Les trajectoires singulières Σ le long desquelles il y a choc entre P *et* S *à une époque finie correspondent aux solutions du système* (Σ) *holomorphes pour* $\rho=0$ *et ce sont les seules trajectoires singulières* : les chocs futurs s'obtiennent en prenant le signe $+$ devant le radical, les chocs passés en prenant le signe $-$.

Il existe entre les éléments ρ, θ, θ' qui déterminent le mouvement à an

instant donné une relation caractéristique qui exprime qu'il y a eu ou qu'il y aura choc dans le mouvement obtenu à partir des données initiales ρ, θ, θ'. M. Levi-Civita montre que cette relation est de la forme

$$\theta' + 1 = \rho f(\rho, \theta),$$

où f est une fonction périodique de θ régulière pour ρ suffisamment petit, et il calcule les premiers termes du développement de f suivant les puissances croissantes de ρ.

Si l'on suppose nulle la masse μ du corps J, les trajectoires singulières absolues sont des droites passant par P et les trajectoires relatives par rapport à des axes tournant avec SJ, trajectoires données par le système (Σ), sont des courbes fermées, si la constante C est positive. L'auteur, examinant si cette propriété subsiste dans le cas général, établit la proposition suivante :

Si la masse μ est suffisamment petite et si la constante C est supérieure à 1, les trajectoires singulières issues de S reviennent toutes en S après un parcours fini.

Fubini (G.). — Sur les espaces à quatre dimensions qui admettent un groupe continu de mouvements (33-90).

Ce Mémoire est la suite du travail publié dans le Volume précédent des *Annali*. Le cas des groupes de mouvements à trois ou quatre paramètres ayant été traité dans ce premier Mémoire, l'auteur s'occupe ici de la recherche de tous les espaces à quatre dimensions qui admettent un groupe à plus de quatre paramètres. Cette recherche est basée sur le théorème suivant démontré tout d'abord :

Si un groupe G_r ($r = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$) est un groupe de mouvements d'un espace à quatre dimensions, il admet un sous-groupe à $r - 1$ paramètres.

Pour toute autre valeur de r, l'espace S_4 ou bien n'existerait pas, ou bien serait à courbure constante.

Il résulte de ce théorème qu'il suffira de chercher d'abord, parmi les espaces S_4 trouvés dans le premier Mémoire, quels sont ceux qui admettent un groupe G_5 contenant comme sous-groupe le groupe G_4 admis par l'espace S_4; puis on cherchera de même, parmi les espaces S'_4 ainsi trouvés, quels sont ceux qui admettent un groupe G_6 contenant le groupe G_5 admis par S'_4; et ainsi de suite.

En suivant cette marche, l'auteur détermine complètement tous les espaces cherchés : il donne pour chacun d'eux la forme de l'élément linéaire ainsi que les transformations infinitésimales du groupe de mouvements admis par cet espace.

Jung (G.). — Louis Cremona (91-92).

Notice nécrologique de Cremona, né à Pavie le 7 décembre 1830, mort à Rome le 10 juin 1903.

Nicoletti (O.). — Sur une classe d'équations à racines réelles (93-138).

On sait que la réalité des racines de l'équation du troisième degré qui se

présente dans la recherche des directions principales d'une quadrique (équation en S) peut être établie en s'appuyant sur l'orthogonalité des deux directions principales correspondant à deux racines distinctes de l'équation. Cette méthode appliquée à des problèmes analogues, mais beaucoup plus généraux, conduit l'auteur à une classe d'équations à racines réelles dont l'équation en S n'est qu'un cas très particulier.

M. Nicoletti considère à cet effet deux formes bilinéaires A, B des variables x_μ, y_ν et l'équation

$$(1) \qquad D(\omega) = |a_{\mu\nu} - b_{\mu\nu}\omega| = 0$$

obtenue en égalant à zéro le discriminant de la forme A — ωB. En supposant que A et B, sont deux formes d'Hermite de première espèce dont l'une, B par exemple, n'est pas indéfinie, l'équation (1) a toutes ses racines réelles : il en est de même des équations obtenues en égalant à zéro les mineurs principaux de D(ω) ; en outre deux mineurs principaux dont les ordres diffèrent d'une unité et dont l'un est contenu dans l'autre fournissent, en les égalant à zéro, deux équations telles que les racines de chacune d'elles soient séparées par les racines de l'autre.

L'auteur établit dans cette voie diverses autres propositions, pour le cas où toutes les formes du faisceau A — ωB sont indéfinies : l'équation (1) a alors des racines complexes, mais la méthode sert à limiter le nombre de ces racines. On peut aussi obtenir ainsi différentes inégalités où interviennent la partie réelle et la partie imaginaire des racines. Signalons entre autres propositions la proposition suivante dont la première partie est due, dans des cas particuliers, à M. Bendixson et à M. Hirtsch :

Si B est une forme d'Hermite définie et A une forme quelconque, la partie réelle p d'une racine $p + qi$ de l'équation (1) est comprise entre la plus grande et la plus petite racine de l'équation

$$\left| \frac{a_{\mu\nu} - \bar a_{\nu\mu}}{2} - \omega b_{\mu\nu} \right| = 0;$$

le coefficient q de la partie imaginaire est compris entre la plus grande et la plus petite racine de l'équation

$$\left| \frac{a_{\mu\nu} - \bar a_{\nu\mu}}{2i} - \omega b_{\mu\nu} \right| = 0.$$

L'auteur applique aussi la méthode à un système de trois formes linéaires A, B, C et à l'équation en ω obtenue en égalant à zéro le discriminant de la forme bilinéaire $A + 2\omega B + \omega^2 C$. On obtient ainsi de nouvelles classes d'équations à racines réelles.

Une autre généralisation consiste à partir de deux réseaux projectifs de formes bilinéaires : on obtient ainsi des systèmes de 2 équations à 2 inconnues ayant toutes leurs solutions réelles.

Cipolla (*M.*). — Sur les nombres composés P qui vérifient la congruence de Fermat $a^{P-1} \equiv 1$ (mod P) (139-160).

La congruence précédente est vérifiée par tout nombre premier P qui ne

divise pas a : c'est le théorème de Fermat. L'auteur démontre qu'il y a en outre une infinité de nombres P *non premiers* vérifiant la même congruence pour une base a donnée et il donne une méthode permettant de trouver ceux d'entre eux qui sont inférieurs à un nombre donné : par exemple, si $a = 2$ et $P < 1000$, il y a trois solutions : $P = 341$, $P = 561$, $P = 641$. D'autre part, étant donné le nombre non premier P, l'auteur indique comment on peut reconnaître s'il existe des bases a différentes de 1 et de -1, pour lesquelles la congruence est vérifiée et comment on peut trouver toutes ces bases, s'il en existe.

Morandi (*E.*). — Sur quelques problèmes de statique des corps élastiques (161-183).

Les corps élastiques envisagés dans ce travail sont l'espace indéfini S situé d'un certain côté d'un plan et l'espace S′ limité par deux demi-plans orthogonaux entre eux. L'auteur traite pour chacun de ces espaces le problème de l'équilibre élastique lorsqu'on donne à la surface trois des six quantités u, v, w (composantes du déplacement) et L, M, N (composantes de l'effort), mais en prenant les trois quantités en partie dans le groupe u, v, w et en partie dans le groupe L, M, N. La méthode employée, basée sur le principe des *images*, est analogue à celle employée par Cesaro pour établir les formules de Cerruti relatives à la déformation du plan indéfini, dans le cas de déplacements donnés à la surface. L'auteur retrouve ainsi, en ce qui concerne l'espace S, les formules établies par M. Boussinesq (*Comptes rendus*, 1888) et il établit des formules analogues en ce qui concerne l'espace S′.

Pirondini (*G.*). — Interprétation géométrique de quelques équations différentielles (185-187).

Un problème de géométrie relatif aux courbes gauches conduit l'auteur à la proposition suivante : l'intégrale générale de l'équation

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + My\frac{dy}{dx} + Ny^2 = \left(N - \frac{M^2}{4}\right)e^{-\int M\,dx},$$

où M et N sont deux fonctions de x données, est

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int M\,dx}\sin\left(\int\sqrt{N - \frac{M^2}{4}}\,dx + C\right).$$

Nielsen (*N.*). — Recherches sur le carré de la dérivée logarithmique de la fonction gamma et sur quelques fonctions analogues (189-210) (en français).

A la dérivée logarithmique de la fonction $\Gamma(x)$ se rattachent les fonctions suivantes :

$$s_1(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n+1}\right), \qquad \sigma_1(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{(-1)^\nu}{x+\nu}.$$

Elles admettent les représentations suivantes par des intégrales définies

$$s_1(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1-t}\,dt, \qquad \sigma_1(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$$

lorsque la partie réelle de x est positive.

L'auteur établit dans ce Mémoire des représentations intégrales analogues aux précédentes pour le produit de deux quelconques des fonctions $s_1(x)$, $s_1(1-x)$, $\sigma_1(x)$, $\sigma_1(1-x)$ et pour le carré de l'une quelconque de ces fonctions. Ces expressions intégrales permettent de développer les fonctions correspondantes en séries de factorielles, lorsque ce développement est possible; pour reconnaître sa possibilité, il suffit d'ailleurs d'appliquer à la représentation intégrale la condition nécessaire et suffisante obtenue par l'auteur (*Annales de l'École Normale*, 1902) pour le développement en série de factorielles des fonctions de la forme $\int_0^1 f(t).t^{x-1}\,dt$.

Nielsen (N.). — Note sur quelques séries de puissances trouvées dans la théorie de la fonction gamma (211-218) (en français).

On sait que $\Gamma(1+x)$ est holomorphe au point $x = 0$ et que la série de puissances correspondante

$$\Gamma(1+x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

a son rayon de convergence égal à 1. L'auteur s'est proposé de calculer le coefficient c_n. Il donne son expression explicite à l'aide des nombres

$$s_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \ldots.$$

Il trouve que c_n, et de même le coefficient γ_n de x^n dans le développement de $\frac{1}{\Gamma(1+x)}$, sont des polynomes entiers et homogènes, à coefficients rationnels, du degré n par rapport aux nombres $s_1, s_2, \ldots, s_n$, en attribuant à s_r le degré r; γ_n se déduit de s_n en y remplaçant s_r par $-s_r$. Il détermine de même les coefficients b_n et β_n des séries

$$\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots, \qquad |x| < 1,$$

$$\frac{x}{2}\mathrm{B}\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 + \beta_1 x + \ldots + \beta_n x^n + \ldots, \qquad |x| < 2.$$

Nielsen (N.). — Recherches sur des généralisations d'une fonction de Legendre et d'Abel (219-235) (en français).

Ce travail concerne des fonctions qui généralisent la fonction $L_2(x)$ envisagée par Legendre et Abel

$$L_2(x) = \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots, \qquad |x| \leq 1.$$

Désignons par C_n^p le coefficient de x^{n-p} dans le produit ci-après, ordonné suivant les puissances croissantes de x,

$$x(x+1)\ldots(x+n-1) = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} x$$

et soit

$$\omega_{n-1}^{n-p-1} = \frac{C_n^p}{(n-1)!};$$

ω_n^p est égal à la somme de tous les produits de p facteurs différents pris parmi les nombres $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$. L'auteur étudie dans ce travail les fonctions

$$L_{n,p}(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\omega_{p+s-1}^{p-1}}{(p+s)^{n+1}} x^{p+s}, \qquad |x| \leq 1.$$

La fonction $L_{n,p}(x)$ peut être prolongée analytiquement à l'aide de son expression par une intégrale définie :

$$L_{n,p}(x) = \frac{(-1)^{n+p+1}}{p!(n-1)!} \int_0^1 \frac{\log(1-tx)^p (\log t)^{n-1}}{t} dt.$$

La fonction analytique ainsi définie admet comme seule singularité à distance finie le point critique logarithmique $x=1$; l'auteur étudie la permutation des diverses branches de la fonction autour de ce point critique.

En posant

$$L_{n,p}(1) = s_{n,p}; \qquad L_{n,p}(-1) = \sigma_{n,p}; \qquad L_{n,p}\left(\frac{1}{2}\right) = a_{n,p},$$

on obtient des séries numériques $s_{n,p}$, $\sigma_{n,p}$, $a_{n,p}$ entre les sommes desquelles l'auteur établit diverses relations. En particulier, on peut sommer $s_{n,p}$ à l'aide des nombres s_r introduits dans le Mémoire précédent : $s_{n,p}$ est un polynome entier en $s_2, s_3, \ldots, s_{n+p}$ à coefficients rationnels.

Nielsen (*N.*). — Évaluation nouvelle des formules de Binet, Gudermann et Raabe concernant la fonction gamma (237-245) (en français).

Nouvelle démonstration des développements en séries de factorielles trouvés par Binet pour les deux fonctions

$$\omega(x) = \log\Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\log x + x - \log(\sqrt{2\pi}),$$

$$\omega_1(x) = \log x - D_x \log\Gamma(x)$$

et démonstration de la convergence uniforme dans certaines aires des fonctions obtenues.

Bianchi (*L.*). — Sur la déformation des paraboloïdes (247-309).

Dans une Note antérieure (*Atti Torino*, 1903), l'auteur a envisagé les

surfaces admettant un élément linéaire de la forme

$$(1)\quad \begin{aligned} ds^2 = {} & (a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha + a_{22})\,d\alpha^2 \\ & + 2(a_{11}\alpha\beta + a_{13}\alpha + a_{12}\beta + a_{23})\,d\alpha\,d\beta + (a_{11}\beta^2 + 2a_{13}\beta + a_{33})\,d\beta^2, \end{aligned}$$

où les coefficients a_{ik} sont constants. Ces surfaces comprennent comme cas particulier les paraboloïdes auxquels est consacré plus spécialement le présent Mémoire.

La déformation des surfaces (1) se rattache à l'intégration des équations aux dérivées partielles de l'un des types

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \sin\omega\cos\omega,$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} \pm \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = A\,e^{2\theta} + B\,e^{-2\theta}.$$

A toute solution d'une pareille équation correspond une triple infinité de surfaces admettant l'élément linéaire (1) et leur détermination dépend de l'intégration d'un système linéaire et homogène d'équations aux différentielles totales à 4 fonctions inconnues. En comparant ce système à celui qu'il a obtenu dans ses recherches sur les transformations des surfaces à courbure constante, l'auteur constate que les deux systèmes se ramènent aisément l'un à l'autre. Les propriétés connues des transformations des surfaces à courbure constante permettent d'étudier les déformées des paraboloïdes : les surfaces à courbure constante qu'on est amené à considérer sont des surfaces d'un espace non euclidien pour lequel on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2.$$

L'auteur est ainsi conduit au résultat suivant :

On peut déterminer par de simples quadratures les équations intrinsèques d'une infinité de surfaces applicables sur un paraboloïde quelconque et dépendant d'un nombre arbitraire de constantes.

Les déformées des paraboloïdes sont ainsi déterminées par leurs équations intrinsèques, c'est-à-dire par les deux formes différentielles quadratiques fondamentales relatives à la surface déformée.

Le Mémoire se termine par l'étude du problème de la détermination des systèmes cycliques dont les cercles sont situés dans les plans tangents aux surfaces d'élément linéaire (1), en particulier dans les plans tangents à un paraboloïde : cette détermination se rattache encore à l'étude des transformations de Bäcklund des surfaces à courbure constante.

Brusotti (*L.*). — Sur la courbe rationnelle normale de l'espace à 4 dimensions (311-352).

Ce Mémoire a pour objet l'application de la théorie des formes binaires à l'étude de la courbe rationnelle normale C de l'espace S_4 à quatre dimensions. Étant donnée la forme biquadratique

$$f = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4.$$

on peut interpréter les coefficients a_i comme coordonnées projectives homogènes d'un point P de S_4. En égalant à zéro un invariant de f, on obtient l'équation d'une hypersurface de S_4. En particulier, en annulant le hessien, on a pour les coordonnées de P des valeurs de la forme

$$a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = \xi_1^4 : \xi_1^3\xi_2 : \xi_1^2\xi_2^2 : \xi_1\xi_2^3 : \xi_2^4,$$

c'est-à-dire que P décrit une courbe rationnelle normale C, du quatrième ordre, de l'espace S_4. Les divers invariants de f égalés à zéro définissent diverses variétés de S_4 en relation avec C. En envisageant deux ou trois formes biquadratiques, l'auteur étudie ensuite diverses autres variétés algébriques, systèmes de droites, de plans et d'hyperplans, en relation avec la courbe C.

Serie III, Tomo X, 1904.

Fubini (*G.*). — Sur les fonctions automorphes et hyperfuchsiennes de plusieurs variables indépendantes (1-11).

Ce travail fait suite au Mémoire de l'auteur : *Sulle forme quadratiche, Hermitiane e sui sistemi di tali forme* (*Atti dell'Accademia Gioenia*, Catane, 4e série, t. XVII). M. Fubini considère un espace S_ν, dont l'élément linéaire est la somme des éléments linéaires de plusieurs espaces, à deux ou trois dimensions et à courbure constante; il suppose que, pour ceux de ces espaces qui sont à trois dimensions, la métrique soit celle de Lobachewski : à un groupe proprement discontinu de mouvements d'un pareil espace correspond un groupe proprement discontinu de transformations à deux variables λ, μ de la forme

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta}, \qquad \mu' = \frac{\alpha\mu + \beta}{\gamma\mu + \delta}.$$

S'il y a i espaces subordonnés à trois dimensions et k à deux dimensions, à tout groupe discontinu de mouvement G de l'espace S_ν correspond un groupe discontinu H de substitutions linéaires opérant sur $2i+k$ variables complexes, chacune des opérations du groupe étant le produit de $2i+k$ transformations linéaires opérant chacune sur une seule des variables : l'auteur donne une méthode générale pour la construction d'un domaine fondamental d'un pareil groupe. A l'aide des transformations du groupe, il construit, à la manière de Poincaré et de M. Picard, des séries qui sont multipliées par un facteur constant lorsqu'on effectue sur les variables l'une des transformations du groupe.

L'auteur généralise ensuite la théorie précédente en construisant certains groupes discontinus opérant sur des variables

$$u_i^l \qquad (l = 1, 2, \ldots, \nu;\ i = 1, 2, \ldots, n_l - 1),$$

en nombre $n_1 + n_2 \ldots + n_\nu - \nu$, chacune des transformations du groupe étant de la forme

$$u_i'^l = \frac{a_{i,1}^l u_1^l + \ldots + a_{i,n_l-1}^l + a_{i,n_l}^l}{a_{n_l,1}^l u_1^l + \ldots + a_{n_l,n_l}^l}.$$

On peut construire des fonctions invariantes par toutes les transformations d'un pareil groupe.

Les groupes ainsi étudiés comprennent comme cas particuliers les groupes hyperabéliens de M. Picard, ainsi que les groupes étudiés par M. Blumentha (*Math. Annalen*, 1903).

Tedone (*O.*). — Essai d'une théorie générale des équations de l'équilibre élastique pour un corps isotrope (second Mémoire) (13-64).

Ce Mémoire fait suite à celui publié par l'auteur au Tome VIII des *Annali*. Il est consacré aux problèmes d'équilibre élastique pour les corps isotropes limités soit par deux plans parallèles, soit par deux sphères concentriques. La méthode suivie est celle du premier Mémoire.

Si le domaine considéré est le domaine S compris entre les deux plans σ_1, σ_2 d'équations respectives $z = 0$, $z = h$, la fonction de Green relative à ce domaine peut s'obtenir de la façon suivante. Soit A un point de S; A_1, A_2, ..., les images sucessives de A par rapport aux plans σ_1, σ_2 alternativement, en commençant par σ_1; A'_1, A'_2, ..., les images successives de A par rapport aux mêmes plans, mais en commençant par σ_2. Soient r_1, r_2, ..., et r'_1, r'_2, ... les distances respectives de ces points au point (ξ, η, ζ) de S et r la distance de A au même point. Les séries

$$g = \sum_n \left(\frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{r_{2n+1}}\right),$$

$$g' = \sum_n \left(\frac{1}{r'_{2n}} - \frac{1}{r'_{2n+1}}\right)$$

considérées comme fonctions de ξ, η, ζ définissent dans S des fonctions harmoniques et régulières; g prend la valeur 0 sur σ_1, la valeur $\frac{1}{r_1}$ sur σ_2; g' prend la valeur 0 sur σ_2, la valeur $\frac{1}{r'_1}$ sur σ_1. La fonction G de Green relative à l'espace S et au point A intérieur à S, assujettie à s'annuler sur σ_1 et sur σ_2, est alors

$$G = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} + \sum_n \frac{1}{r_{2n}} - \frac{1}{r_{2n+1}} + \sum_n \frac{1}{r'_{2n}} - \frac{1}{r'_{2n+1}}.$$

On peut construire d'une façon analogue la fonction de Green $\overline{G}$ qui est nulle sur σ_1 et dont la dérivée normale est nulle sur σ_2.

A l'aide de ces fonctions on peut construire les fonctions harmoniques régulières dans S, dont on donne soit les valeurs sur σ_1 et σ_2, soit la valeur sur σ_1 et la valeur de la dérivée normale sur σ_2, soit les valeurs de la dérivée normale sur σ_1 et sur σ_2.

L'auteur traite alors le problème de l'équilibre élastique avec diverses conditions aux limites en se donnant certaines des valeurs de u, v, w, L, M, N sur l'un et l'autre plan.

Le cas d'un corps limité par deux sphères concentriques se traite d'une façon analogue, en introduisant les images déduites de A par des inversions successives par rapport à l'une et à l'autre sphère.

Vitali (*G.*). — Sur les séries de fonctions analytiques (65-82).

Dans quels cas une série de fonctions analytiques convergente dans un domaine connexe a-t-elle pour somme une fonction analytique dans ce domaine? L'auteur a généralisé dans un travail antérieur (*Rendiconti Istituto Lombardo*, 1903) un théorème de M. Osgood relatif à ce sujet : il reproduit ici la démonstration du théorème généralisé, en y adjoignant quelques résultats nouveaux.

Un premier Chapitre est consacré aux familles G de fonctions de variables réelles définies dans un intervalle a, b et comprises entre deux limites fixes. L'auteur y établit, d'après les travaux d'Arzelà, la condition nécessaire et suffisante pour que la famille G admette une fonction limite continue.

Dans un second Chapitre, les résultats précédents sont appliqués à la démonstration du théorème de M. Osgood généralisé dont voici l'énoncé :

Soit une série

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots \tag{1}$$

de fonctions analytiques uniformes dans une région C *telle que, pour tous les points de* C *et pour toutes les valeurs de* n, *on ait*

$$|S_n(z)| < M,$$

M *étant une constante fixe et* $S_n(z)$ *la somme des* n *premiers termes de la série* (1). *Il existe alors une ou plusieurs fonctions analytiques vers lesquelles convergent uniformément certaines suites extraites de la suite*

$$S_1(z), \quad S_2(z), \quad \ldots, \quad S_n(z). \tag{2}$$

Si, en outre, la série converge en une infinité de points admettant un point limite intérieur à C, *la suite* (2) *admet une fonction limite unique vers laquelle elle converge uniformément.*

Le Chapitre III est consacré aux séries convergentes de fonctions analytiques. L'auteur y établit la proposition suivante due à M. Osgood : *Si une série de fonctions, analytiques et uniformes dans un domaine* T, *converge en tout point de* T, *il existe dans toute portion de* T *un domaine partiel* C *dans lequel la série représente une fonction analytique et converge uniformément vers cette fonction.* Il peut exister dans le domaine T un ensemble dénombrable de domaines C extérieurs les uns aux autres dans chacun desquels la série représente une fonction analytique et converge uniformément. L'auteur en construit un exemple.

Le Chapitre IV est consacré à des fonctions analytiques ne prenant jamais certaines valeurs exceptionnelles. L'auteur démontre la proposition suivante : *Si une suite de fonctions analytiques finies et uniformes converge en tout point d'un domaine* C *simplement connexe et si en outre les fonctions considérées ne prennent jamais les valeurs* 0 *et* 1, *la suite converge vers une fonction analytique finie et uniforme dans* C. Dans cet énoncé, les valeurs exceptionnelles 0 et 1 peuvent être remplacées par deux nombres quelconques différents p et q. On peut aussi supposer que les fonctions u_n de la suite ne prennent jamais les valeurs p_n et q_n variables avec n, mais tendant vers deux limites finies et différentes p et q.

Nicoletti (O.). — Sur une équation à racines réelles (83-94).

Ce Mémoire complète celui qui a été publié par l'auteur dans le Volume précédent des *Annali*. Il est relatif à l'équation en ω obtenue en égalant à zéro le discriminant de la forme $A + 2B\omega + C\omega^2$, où A, B, C sont trois formes d'Hermite de première espèce. L'auteur, en faisant diverses hypothèses sur les formes A, B, C, indique des catégories d'équations de cette espèce qui ont nécessairement toutes leurs racines réelles.

Bianchi (L.). — Sur quelques classes de congruences rectilignes dans les espaces à courbure constante (95-145).

Recherches de géométrie non euclidienne relatives aux congruences de droites : ces congruences peuvent être définies en se donnant l'une des nappes S de la surface focale et, en chaque point de S, la direction du rayon de la congruence. On en déduit les éléments de la deuxième nappe.

L'auteur donne des formules générales relatives aux cas où la surface S est rapportée soit à ses lignes de courbure, soit à ses lignes asymptotiques et il applique les formules trouvées à l'étude de trois classes particulières de congruences généralisant des classes de congruences de l'espace euclidien dont l'étude est bien connue.

1° *Congruences de Guichard*, dans lesquelles les développables de la congruence coupent les deux nappes de la surface focale suivant leurs lignes de courbure.

La détermination de ces congruences dépend de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \sin \theta.$$

Deux solutions arbitraires réelles de cette équation définissent une congruence de Guichard de l'espace elliptique; deux solutions imaginaires définissent une congruence de Guichard de l'espace hyperbolique. Ces congruences se rattachent ainsi aux surfaces pseudosphériques de l'espace euclidien et celles de ces dernières surfaces qui sont imaginaires ont ainsi une représentation réelle dans l'espace hyperbolique.

2° *Congruences conformes et congruences de Thybaut.* — Une congruence est dite *conforme* lorsqu'on obtient une représentation conforme de l'une des nappes de la surface focale sur l'autre nappe en faisant correspondre à tout point M de l'une des nappes le point focal M′ de l'autre nappe situé avec M sur un même rayon de la congruence. Les congruences de Thybaut, qui admettent deux surfaces minima comme nappes de la surface focale, sont des congruences conformes et les lignes asymptotiques ainsi que les lignes de courbure se correspondent dans la représentation de l'une des nappes sur l'autre. L'auteur étend aux espaces elliptique et hyperbolique les propriétés de ces congruences connues dans l'espace euclidien ainsi que leurs relations avec les déformées du paraboloïde de révolution.

3° *Congruences W*, ou congruences pour lesquelles les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale, ces deux nappes

ayant en outre même courbure en deux points corespondants. Les surfaces focales de pareilles congruences constituent une classe de surfaces S comprenant comme cas particulier les surfaces à courbure constante. De toute surface S on peut déduire ∞^2 nouvelles surfaces de la même classe, définies comme secondes nappes de la surface focale des ∞^2 congruences W auxquelles appartient la surface S donnée. Dans le cas des surfaces à courbure constante, la transformation ainsi définie est la transformation de Bäcklund.

Nielsen (*N.*). — Sur quelques transformations d'une série de puissances (147-156) (en français).

Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans le domaine du point $x = 0$. La fonction $\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est aussi holomorphe; soit

$$\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

son développement en série. Soit d'autre part

$$f\left(\frac{2z}{1-z^2}\right) = a_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

le développement de la fonction holomorphe $f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)$. Entre les coefficients de ces deux séries, l'auteur établit la relation

$$(1) \qquad \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_s}{s}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^s - a_0 \log(1+x^2) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{b_s}{s} x^s$$

et il donne les régions de convergence des séries qui se trouvent dans les deux membres. L'identité précédente permet d'effectuer le prolongement analytique dans un certain domaine de la série située dans le second membre.

Autre relation analogue, et remplissant le même but, relative aux développements en séries de $\frac{g(x)}{1+x^2}$ et de $g\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)$, où $g(x)$ est une fonction holomorphe dans le domaine du point $x = 0$.

Cas particuliers et applications des relations obtenues. Application à la fonction $L_{1,n}(x^2)$, en désignant par $L_{1,n}(x)$ la fonction dont l'auteur s'est occupé dans le Volume précédent des *Annali*.

Gebbia (*M.*). — Les déformations typiques des corps solides élastiques (second Mémoire) (157-200).

Suite du Mémoire publié par l'auteur sous le même titre au Tome VII des *Annali* et que nous avons analysé précédemment. L'auteur se propose ici de construire les expressions analytiques des trois déformations qu'il a appelées *typiques*, dans le cas où le potentiel d'élasticité a sa forme la plus générale. Pour cela, il commence par considérer une force appliquée en un point O d'un milieu élastique indéfini et il étudie la déformation correspondante du milieu,

qu'il appelle *déformation élémentaire* et qui constitue l'élément analogue à la fonction $\frac{1}{r}$ de la théorie du potentiel newtonien. Prenant d'abord le point O pour origine et la direction de la force comme l'un des axes de coordonnées, il détermine les composantes du déplacement. Les trois axes fournissent ainsi trois groupes de trois fonctions. La construction de ces neuf fonctions dépend de la recherche d'une solution convenablement choisie d'une équation linéaire aux dérivées partielles du 6e ordre avec des coefficients constants dépendant des coefficients d'élasticité. A l'aide de ces neuf fonctions, l'auteur donne les expressions analytiques des trois déformations typiques. Puis il revient à l'équation aux dérivées partielles dont il s'agit d'avoir une certaine solution et il détermine cette solution dans un cas assez étendu pour comprendre les trois cas suivants : 1° corps isotropes, 2° corps admettant un axe d'élasticité, 3° milieu élastique imaginé par Green pour expliquer le phénomène de la double réfraction. Ces trois cas sont étudiés en détail; dans le cas d'un corps isotrope, M. Gebbia retrouve les expressions générales des trois déformations typiques qu'il avait obtenues par une autre méthode dans son premier Mémoire.

Guldberg (*A*.). — Mémoire sur les congruences linéaires aux différences finies (201-209) (en français).

Extension de quelques propriétés des congruences algébriques et arithmétiques aux congruences dont le premier membre est une forme linéaire aux différences finies à coefficients entiers. Système complet de restes. Solution d'une congruence linéaire aux différences finies de degré n. Généralisation du théorème de Fermat.

Bigiavi (*C*.). — Sur quelques équations différentielles linéaires réductibles (211-226).

Ce Mémoire est relatif à un cas général de réductibilité des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels pour lesquelles trois seulement des points singuliers sont des points critiques de l'intégrale : dans l'énoncé interviennent des relations entre les substitutions subies par les intégrales lorsqu'on tourne autour des points critiques. Dans le cas du second ordre, on obtient la condition nécessaire et suffisante suivante : pour qu'une équation linéaire du second ordre, à coefficients rationnels et admettant seulement trois points critiques, soit réductible, il faut et il suffit que la somme obtenue en additionnant entre elles une racine de chacune de trois équations déterminantes relatives aux trois points critiques soit réelle et entière. Application à l'équation hypergéométrique.

Lenzi (*E*.). — Sur la recherche d'une quatrième intégrale du second degré du système d'équations différentielles du mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini (227-250).

Soient U, V, W les composantes de la vitesse de l'origine d'un système d'axes

rectangulaires liés au corps solide par rapport à ces axes mobiles, P, Q, R les composantes de la rotation instantanée par rapport aux mêmes axes. Posons

$$x_1 = \frac{\partial T}{\partial U}, \qquad x_2 = \frac{\partial T}{\partial V}, \qquad x_3 = \frac{\partial T}{\partial W},$$

$$y_1 = \frac{\partial T}{\partial P}, \qquad y_2 = \frac{\partial T}{\partial Q}, \qquad y_3 = \frac{\partial T}{\partial R},$$

où T est l'énergie cinétique, fonction homogène et du second degré en x_i, y_i. Les équations du mouvement du corps, sous la forme donnée par Clebsch, admettent les intégrales premières

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{const.}, \qquad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = \text{const.}, \qquad T = \text{const.}$$

Clebsch a recherché à quelles conditions il existe une quatrième intégrale du second degré. Aux cas trouvés par Clebsch, M. Stekloff a ajouté un nouveau cas. L'auteur démontre, *a priori*, qu'on n'a pas ainsi tous les cas possibles, car, en désignant par φ l'intégrale cherchée, il y a réciprocité entre T et φ. Au cas trouvé par M. Stekloff doit donc correspondre un cas corrélatif. L'auteur reprend la question en recherchant systématiquement les conditions d'existence d'une quatrième intégrale et l'expression de cette quatrième intégrale : il retrouve ainsi tous les cas déjà connus en même temps que ce cas nouveau; ce dernier a été également trouvé par M. Liapounoff, mais par une méthode entièrement différente.

Fano (*G.*). — Recherches sur la variété cubique générale de l'espace à quatre dimensions et sur les espaces pluritangents à cette variété (251-285).

Dans ce Mémoire sont traitées quelques questions de caractère projectif concernant la variété cubique générale (sans points doubles) de l'espace à quatre dimensions. L'auteur détermine en particulier les espaces tangents à cette variété en 2, 3 ou 4 points différents, il donne quelques propriétés de la surface relatives à ces espaces et il traite à ce sujet diverses questions de géométrie énumérative.

Nielsen (*N.*). — Recherches sur les polynomes et les nombres de Stirling (286-318) (en français).

Ce Mémoire contient d'abord un aperçu de la théorie des polynomes de Bernoulli; l'auteur montre les relations qui existent entre ces polynomes et la fonction ζ de Riemann; il montre aussi comment ces polynomes permettent d'exprimer les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers.

Les *nombres de Stirling* de rang $n+1$ sont les nombres C_{n+1}^s définis par l'identité en x

$$x(x+1)\ldots(x+n) = \sum_{s=0}^{s=p} C_{n+1}^s x^{n+1-s}.$$

Les nombres de Stirling de rang $-(n+1)$ sont les nombres $\mathfrak{C}_{n+1}^s$ définis par l'égalité

$$\frac{1}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s \mathfrak{C}_{n+1}}{n+1+s}, \qquad |x| > n.$$

L'auteur établit des relations entre ces nombres et les nombres de Bernoulli, ainsi que diverses formules de récurrence. Il démontre que les nombres C_{n+1}^s et $\mathfrak{C}_{n+1}^s$ de Stirling peuvent s'exprimer sous la forme de polynomes entiers en n du degré $2r$, à coefficients rationnels indépendants de n.

Tous les nombres de Stirling dont l'indice supérieur a une valeur donnée r peuvent être calculés à l'aide du polynome $\Psi_{2r}(x)$ de degré $2r$ en x vérifiant l'équation aux différences finies

$$\Psi_{2r}(x+1) = \Psi_{2r}(x) + (x+1)\Psi_{2r-2}(x),$$

et les conditions

$$\Psi_0(x) = 1, \qquad \Psi_r(0) = 0 \quad \text{pour} \quad r > 0.$$

L'auteur démontre qu'on a, pour $r > 0$,

$$\Psi_{2r}(x) = (x+1)x(x-1)\ldots(x-r+1)\psi_{r-1}(x),$$

où $\psi_{r-1}(x)$ est un polynome entier en x de degré $r-1$. Ce sont ces polynomes $\psi_{r-1}(x)$ que l'auteur appelle *polynomes de Stirling*. Il donne des formules de récurrence pour le calcul des coefficients de ces polynomes ainsi que le calcul explicite des six premiers de ces polynomes, d'où l'on déduit le calcul des nombres de Stirling, pour n quelconque, et $r \leqq 6$, à l'aide des formules suivantes qui relient les nombres de Stirling aux polynomes de Stirling:

$$C_{n+1}^r = \frac{(n-1)!}{(n+r)!}\Psi_{r-1}(n),$$

$$\mathfrak{C}_{n+1}^r = (-1)^{r-1}\frac{(n+r)!}{(n-1)!}\Psi_{r-1}(-n-1).$$

Nielsen (N.). — Note sur quelques applications analytiques des polynomes de Stirling (319-325).

Étude de quelques séries de puissances dont les coefficients s'expriment à l'aide des polynomes de Stirling. Développements de $\log\left|\frac{\log(1-x)}{-x}\right|$ et de $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{-\alpha-1}$. Conséquences relatives aux nombres de Stirling.

S. Lattès.



RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.
Tome XIII, 1899 (¹). (1re Partie : *Memorie e Communicazioni.*)

De Franchis (M.). — Réduction des faisceaux de courbes planes de genre 2 (1-27).

Ce travail se rattache à des recherches classiques sur la réduction des systèmes linéaires de courbes planes; il se divise en deux parties. Dans la première, l'auteur recherche tous les systèmes possibles *a priori*, et birationnellement distincts; dans la seconde, il étudie l'existence effective des systèmes ainsi obtenus. La première partie, de nature arithmétique, repose sur la discussion des égalités

$$\Sigma r_i^2 = n^2; \qquad \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \Sigma \frac{r_i(r_i-1)}{2} = 2,$$

et de quelques inégalités évidentes (n, degré des courbes; r_i, ordre du point-base A_i). En cherchant à abaisser l'ordre n, moyennant des transformations crémoniennes dont les points-base coïncident avec quelques-uns des A_i, l'auteur obtient sept types arithmétiquement possibles. La seconde partie est d'allure géométrique; la considération des systèmes adjoints et l'emploi de courbes auxiliaires permettent d'éliminer l'un des systèmes et de construire effectivement les autres. L'auteur retrouve notamment des faisceaux de sextiques à neuf points doubles étudiés par Halphen.

Daniele (E.). — Sur l'équilibre des réseaux (28-85).

Appelons *réseau* (*rete*, filet) une surface flexible et, en général, extensible, mais telle que toutes les courbes des deux systèmes $u =$ const., $v =$ const. soient inextensibles; ces courbes seront les *fils* du réseau. L'auteur se propose d'étudier l'équilibre d'une telle surface en se servant des méthodes données par Beltrami pour les surfaces flexibles et inextensibles. Il considère un réseau comme un système déformable soumis aux liaisons $\delta E = 0 = \delta G$. L'application du théorème des vitesses virtuelles et des multiplicateurs de Lagrange lui fournit les équations indéfinies et les conditions aux limites; si l'équilibre est réalisé, les composantes des forces suivant les courbes coordonnées et la normale s'expriment au moyen des symboles de Christoffel; enfin les multiplicateurs de Lagrange fournissent les tensions. Puis l'auteur énonce le théorème suivant : *Un système de forces, qui tient en équilibre une surface flexible et inextensible, tient aussi en équilibre un réseau dont les fils sont formés par deux systèmes de lignes de la surface, conjugués par rapport aux tensions.* On peut ainsi transporter aux réseaux tous les théorèmes relatifs aux surfaces flexibles et inextensibles. Comme application, l'auteur examine des cas où les fils admettent une définition géométrique remarquable : il en est ainsi pour

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXIV₂, p. 122-140.

les surfaces de révolution, les surfaces réglées, et les surfaces développables. Puis il étudie le problème suivant : connaissant en chaque point du réseau les composantes d'un système de forces suivant les fils et la normale, trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire ces composantes pour que le système maintienne le réseau en équilibre »; ces conditions revêtent diverses formes où interviennent notamment les paramètres de Christoffel; l'auteur montre qu'elles ne se réduisent pas à des identités. Enfin, il termine en recherchant dans ce problème l'expression des tensions : en général, elles peuvent se déterminer sans intégration; mais, dans certains cas, il n'en est plus ainsi. La circonstance la plus remarquable se produit lorsque les fils forment le faisceau des asymptotiques : on est alors ramené à intégrer une équation hyperbolique de Laplace.

Vivanti (*G.*). — Sur les ensembles parfaits (86-88).

L'auteur donne une démonstration nouvelle du théorème de G. Cantor : tout ensemble fermé P peut toujours se décomposer en un ensemble dénombrable R et un ensemble parfait S; il établit en outre que la décomposition n'est possible que d'une seule façon. La démonstration repose sur les lemmes suivants :

I. *Si un ensemble parfait se décompose en deux ensembles dont l'un est fermé, l'autre est dense en lui-même et a une puissance superieure à la première.*

II. *L'ensemble des points communs à deux ensembles parfaits est fermé.*

Pizzetti (*P.*). — Nouvelle démonstration de certains théorèmes relatifs aux fonctions sphériques contenus dans une Note du professeur Paci (89-91).

Gegenbauer (*L.*). — Généralisation de quelques théorèmes sur les fonctions sphériques contenus dans une Note du professeur Paci (92-94).

Ces deux Notes se rapportent à un travail de M. Paci sur le calcul de la densité d'une couche ellipsoïdale équipotentielle (*Lincei Rendic.*, 5^a, VII, 1898, p. 131-138).

Enriques (*F.*). — Une propriété des séries continues de courbes appartenant à une surface algébrique régulière (95-98).

L'auteur établit le théorème suivant : *Sur une surface régulière* ($p_n = p_g$) *toute série continue de courbes* C *est contenue totalement dans un système linéaire.* La démonstration repose sur la considération de deux systèmes linéaires complets [K] et [K_1] contenant totalement deux séries rationnelles formées chacune de m courbes C. L'étude du système subadjoint à [K] et l'application du principe « de la conservation des entiers » montrent que les

courbes C sont contenues totalement dans le système $[K-(m-1)C]$. La démonstration peut se simplifier à l'aide d'un théorème de M. Castelnuovo sur la série caractéristique d'un système linéaire complet.

Alagna (*R.*). — Des congruences binomes relatives à un module premier p, ou à une de ses puissances, dans le cas où $\frac{p-1}{2}$ est un nombre premier, ou le double d'un nombre premier (99-129).

Ce travail renferme des formules générales permettant d'éviter les essais auxquels conduit la méthode des racines primitives. L'auteur envisage successivement les deux cas où p est de la forme $4k+1$ et $4k+3$; dans chaque cas, il recherche les exposants auxquels appartiennent les nombres $1, 2, \ldots, p-1$; puis il étudie les congruences

$$x^m - 1 \equiv 0, \qquad x^m - N \equiv 0 \qquad (\text{mod } p)$$

et

$$x^m - N \equiv 0 \qquad (\text{mod } p^\lambda) \qquad (m = 2, 4, k, 2k, 4k).$$

De Franchis (*M.*). — Réduction des systèmes linéaires ∞^k de courbes planes de genre 3, pour $k>1$ (130-160).

L'auteur, poursuivant les recherches qu'il a publiées au début de ce Tome, aborde les systèmes $\infty^k (k>1)$ de courbes planes de genre 3. Le Mémoire actuel, comme le précédent, se divise en deux parties, arithmétique et géométrique; en définitive, l'auteur obtient, par une méthode analogue à la précédente, 12 systèmes birationnellement distincts. Il s'attache surtout aux systèmes surabondants (la surabondance est l'excès de la dimension effective d'un système sur sa dimension arithmétique, calculée sans tenir compte des relations entre les points-base). Les recherches de M. Castelnuovo avaient déjà montré que les seuls systèmes surabondants de genre 3 et de dimension supérieure à 1 sont de trois espèces : ou ∞^3 de degré 4, ou ∞^3 de degré 3, ou ∞^3 de degré 2. M. de Franchis définit explicitement tous ces systèmes; il en existe respectivement 7, 4 et 9 pour les trois espèces précédentes.

Gerbaldi (*F.*). — Sur le groupe simple de 360 collinéations planes (161-199).

Ce Mémoire est la suite d'un travail antérieur du même auteur, inséré au Tome XII de ce Recueil (p. 23-94). Reprenons les mêmes notations; l'auteur établit les relations

$$3(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3)^2 = \sum_{i=1}^{6} f_i\varphi_i = \sum_{i=1}^{6} f'_i\varphi'_i,$$

les f_i, f'_i étant calculées au point (x_1, x_2, x_3); les φ_i, φ'_i, sur la droite (u_1, u_2, u_3). Annulons le discriminant de l'équation $\sum f_i\varphi_i$ considérée comme forme qua-

dratique en u_1, u_2, u_3; nous aurons une identité $\Theta'(f) = 0$; on aurait, de même, $\Theta'(\varphi') = 0$, $\Theta(f') = 0$, $\Theta(\varphi) = 0$. Ces relations, du troisième degré, invariantes par les transformations de G_{360}, jouent un rôle important dans le Mémoire. A toute conique γ définie par l'équation $\sum_1^6 l_i \varphi_i = 0$, l'auteur fait correspondre le point de l'espace R_5 dont les coordonnées homogènes sont l_i; l'équation $\Theta'(l) = 0$ représente alors une variété cubique de R_5. Mais, si l'on substitue au sextuple fondamental S le sextuple associé S', l'équation de γ s'écrira $\sum_1^6 l'_i \varphi'_i = 0$ et les l'_i sont liés homographiquement aux l_i; dans ces relations homographiques remplaçons l'_i par $\frac{\partial \Theta'(l_i)}{\partial l_i}$: on obtient ainsi une transformation corrélative qui change les sextuples S et S'; multipliée par les transformations de G_{360}, cette transformation engendre un groupe étendu Γ_{720} dont l'auteur étudie systématiquement les sous-groupes. De plus, il existe encore entre quatre des fonctions f (par exemple) des relations biquadratiques, auxquelles correspondent des surfaces de Steiner. Enfin M. Gerbaldi termine ce second Mémoire en introduisant deux sextuples remarquables de quadriques dans R_5 : l'un d'eux, par exemple, comprend les surfaces $\frac{1}{3} \frac{\partial \Theta'(l_i)}{\partial l_i} = 0$.

De Franchis (*M.*). — Sur les réseaux surabondants de courbes planes de genre 2 (200-201).

L'auteur signale une omission dans un travail de M. Martinetti.

Bourlet (*C.*). — Sur la détermination de la surface d'une piste de vélodrome (202-209).

Proposons-nous le problème suivant : *Trouver une surface telle que, en chacun de ses points, il existe une relation* DONNÉE *entre la pente du plan tangent et le rayon de courbure de la ligne de niveau qui passe en ce point.* M. C. Bourlet montre qu'on est conduit à une équation de Monge-Ampère, en général non intégrable. Après avoir démontré qu'il existe toujours une solution déterminée, l'auteur la calcule explicitement quand la ligne de niveau imposée comme donnée à la frontière est un cercle.

Lovett (*E.-O.*). — Note sur les transformations de contact des surfaces développables (210-224).

Cette Note contient sous forme finie l'expression de toutes les transformations de contact qui laissent invariante l'équation

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Les calculs sont développés seulement dans le cas où $n = 3$.

Almansi (*E.*). — Sur la recherche des fonctions polyharmoniques dans une aire plane simplement connexe et satisfaisant à des conditions à la frontière données (225-262).

Considérons une aire intérieure à un contour fermé γ et admettant une représentation conforme sur le cercle au moyen de polynomes harmoniques; M. Almansi donne une méthode pour intégrer l'équation $\Delta^{(2n)} = 0$ connaissant les valeurs prises le long du contour γ par la fonction inconnue et ses $n-1$ premières dérivées normales. La méthode repose sur les lemmes suivants :

I. *Toute fonction* (n) — *harmonique peut se mettre sous l'une ou l'autre des formes*

$$\sum_{i=0}^{n-1} x^i u_i \quad \textit{ou} \quad \sum_{i=0}^{n-1} (r^2-1)^{2i} w_i,$$

les u_i *et les* w_i *étant harmoniques.*

II. *A toute fonction harmonique* v, *on peut en faire correspondre une seconde* v' *telle que l'on ait*

$$\frac{\partial v}{\partial x} = x\frac{\partial v'}{\partial x} + y\frac{\partial v'}{\partial y} + h_1; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{\partial v'}{\partial y} - y\frac{\partial v'}{\partial x} + h_2,$$

h_1 *et* h_2 *étant deux constantes.*

Dans l'application de ces lemmes, ces constantes se déterminent au moyen des conditions à la limite. L'auteur applique ses formules au cas où γ est un limaçon de Pascal.

Vivanti (*G.*). — Sur le concept de dérivée dans la théorie élémentaire des fonctions analytiques (263-273).

La théorie des fonctions analytiques de Weierstrass, basée sur les propriétés des séries de puissances, est déjà indépendante du concept d'intégrale curviligne; la Note de M. G. Vivanti a pour but de l'affranchir, en outre, du concept de dérivée tel qu'il est exposé d'habitude. A cet effet, l'auteur définit la dérivée d'une série de puissances par un procédé purement formel; puis il retrouve les propositions classiques du calcul différentiel.

Morale (*M.*). — Involutions de degré n et d'espèce 1 dans un espace à $n-1$ dimensions (274-284).

Les courbes d'ordre n passant par $n+2$ points d'un espace S_n rencontrent un espace Σ_{n-1} en n points; elles déterminent sur Σ_{n-1} une involution de degré n. Le lieu de ses points *k-uples* est une variété à $n-k$ dimensions et de l'ordre $k!$. Lorsqu'un point décrit une variété, les $n-1$ autres points décrivent une variété dite *conjuguée* de la première; l'auteur étudie les relations générales entre deux variétés conjuguées.

Poincaré (H.). — Complément à l'*Analysis situs* (285-343).

Dans un Mémoire du *Journal de l'École Polytechnique* ([1]) intitulé *Analysis situs*, l'auteur avait énoncé le théorème suivant : *Pour toute variété fermée, les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux.* Or, dans sa dissertation inaugurale ([2]). M. P. Heegaard, revenait sur cette question; et, d'après lui, l'énoncé et la démonstration du théorème seraient entièrement erronés. Il fallait donc élucider complètement la question : tels sont l'origine et le but du complément à l'*Analysis situs*.

Voici maintenant la conclusion du Mémoire : il existe deux définitions distinctes des nombres de Betti : celle de Betti lui-même et celle de l'*Analysis situs;* le théorème en question n'est vrai que pour la seconde définition. Mais la démonstration de l'*Analysis situs* est insuffisante; le théorème doit être établi par une méthode absolument différente.

Examinons d'abord les définitions des nombres de Betti. Soit V une variété fermée à p dimensions; et soient v_1, v_2, ..., v_n, n variétés indépendantes à q dimensions, situées dans V; si, quelle que soit la variété v_{n+1}, on peut trouver une variété située dans V et dont $v_1, \ldots, v_{n+1}$ constituent la frontière complète, on dit que le nombre de Betti est égal à $n+1$ pour les variétés à q dimensions. Mais il faut préciser le mot indépendantes : ou bien, on entend par là qu'il n'existe aucune variété à $q+1$ dimensions dont $v_1, \ldots, v_n$ prises chacune *une fois* constituent la frontière complète; on a alors la première définition, et l'on écrit avec H. Poincaré que l'homologie $v_1 + \ldots + v_n \sim 0$ n'a pas lieu; ou bien on affirme par le même mot qu'il n'existe aucune variété dont $v_1, \ldots, v_n$ prises chacune *un nombre de fois arbitraire* constituent la frontière : en d'autres termes, il n'existe aucune homologie $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \sim 0$, où les λ sont des entiers positifs ou négatifs, et c'est là la seconde définition. Elle peut évidemment conduire à un nombre de Betti plus petit que la première : c'est ce qui arrive avec l'exemple de M. Heegaard, et avec un autre exemple dû à H. Poincaré lui-même.

Esquissons maintenant la méthode de l'auteur. On peut toujours remplacer la variété V par un polyèdre homéomorphe P; à l'aide d'un Tableau arithmétique T, H. Poincaré calcule les nombres de Betti *réduits* relatifs à ce polyèdre; le terme *réduit* signifiant que, dans la définition des nombres de Betti, on n'envisage que les variétés v_q linéairement indépendantes, obtenues en combinant les variétés constitutives du polyèdre. On démontre d'ailleurs que les nombres de Betti réduits sont identiques aux nombres de Betti proprement dits, définis de la seconde façon. Cela étant, l'auteur constate, au moyen du Tableau T, que le nombre de Betti réduit, d'ordre q, pour le polyèdre P est égal au nombre de Betti réduit d'ordre $p-q$ pour le polyèdre P', *réciproque* de P, qu'on définira tout à l'heure. Or, en vertu même de la réciprocité, les nombres de Betti réduits d'ordre q sont identiques pour les deux polyèdres : dès lors, la conclusion est immédiate.

Entrons enfin dans quelques détails. Désignons par a_i^q les variétés à q dimensions du polyèdre; par définition, on a la congruence

$$a_i^q \equiv \sum \varepsilon_{ij}^q a_j^{q-1}, \tag{3}$$

([1]) 2e série, 1er cahier, p. 1-121.

([2]) Kopenhavn, 1898.

où les ε_{ij}^q sont égaux à o, + 1, ou — 1 suivant que a_j^{q-1} n'est pas frontière de a_i^q, ou bien est frontière et en relation directe ou inverse. L'ensemble des relations (3) où i et q prennent toutes les valeurs possibles s'appelle le *schéma* du polyèdre. Des congruences (3) on déduit les homologies

$$\sum \varepsilon_{ij}^q a_j^{q-1} \sim 0;$$

supposons les a_j^q simplement connexes; on démontre, en déformant au besoin ces variétés, qu'il ne peut exister entre elles aucune autre homologie : ce point est essentiel dans la démonstration. Enfin, les ε doivent satisfaire aux équations

$$(5) \qquad \sum_j \varepsilon_{ij}^q \varepsilon_{jk}^{q-1} = 0.$$

Appelons α_q le nombre des variétés a_i^q et $\overline{P}_q$ le nombre de Betti réduit correspondant. Le schéma du polyèdre et les équations (5) conduisent immédiatement à la formule

$$\alpha_p - \alpha_{p-1} + \ldots \mp \alpha_0 = 1 - (\overline{P}_{p-1} - 1) + \ldots \pm (\overline{P}_1 - 1) \mp 1,$$

identique à la formule d'Euler généralisée, de l'*Analysis situs*, mais où les P seraient remplacés par les nombres réduits. Cela étant, subdivisons chaque variété a_i^p en plusieurs autres b_i^p; soient b_i^{p-1} les frontières des b_i^p, b_i^{p-2} celles des b_i^{p-1}, ...; on aura ainsi un polyèdre P' *dérivé* du premier. A cette subdivision correspond un schéma indicateur; en s'appuyant sur ce schéma et sur l'hypothèse que les a_i^q sont simplement connexes, on démontre que la subdivision n'altère pas le nombre de Betti réduit. Dès lors, soit W une variété à q dimensions située sur P; on peut toujours construire un polyèdre P', dérivé de P, et tel que W soit une combinaison des b_i^q du polyèdre P' : on a donc démontré l'identité des nombres de Betti réduits avec les nombres de Betti de la seconde définition.

Il s'agit maintenant de définir le polyèdre réciproque P'; le procédé de H. Poincaré revient à décomposer chaque case en tétraèdres généralisés. Associons ces tétraèdres suivant une nouvelle loi : on obtient ainsi un polyèdre homéomorphe au polyèdre réciproque. Pour donner une idée de la loi adoptée par l'auteur, plaçons-nous dans l'espace ordinaire; décomposons chaque face d'un cube en huit triangles par ses axes de symétrie; et associons les six triangles adjacents à chacun des sommets pour n'en faire qu'une seule face : le polyèdre qui admettra ces huit nouvelles faces sera homéomorphe à l'octaèdre régulier qui est ainsi le réciproque du cube. Or on démontre la proposition suivante : *Le nombre des congruences distinctes entre les variétés à q dimensions est le même pour* P *et* P', *en ne considérant pas des congruences comme distinctes, quand une combinaison linéaire des premiers membres de ces congruences est homologue à zéro.* D'où cette conséquence : $P_q = P'$.

Il ne reste plus qu'à définir le Tableau T; pour $p = 4$ ce Tableau est de la

forme

$$
\begin{array}{c}
\\
\alpha_2 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\
\alpha_1 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right.
\end{array}
\begin{array}{ccccc|ccccc}
\multicolumn{5}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{\alpha_2.}} & \multicolumn{5}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{\alpha_3.}} \\
1 & 0 & . & . & . & \varepsilon & \varepsilon & . & . & \varepsilon \\
0 & 1 & . & . & . & \varepsilon & \varepsilon & . & . & \varepsilon \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & . & . & 1 & \varepsilon & \varepsilon & . & . & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & . & . & \varepsilon & 0 & 0 & . & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
\varepsilon & \varepsilon & . & . & \varepsilon & 0 & 0 & . & . & 0
\end{array}
$$

il a $\alpha_2 + \alpha_3$ colonnes, $\alpha_2 + \alpha_1$ lignes. Les éléments des α_3 dernières colonnes sont les ε^3_{ij} (ou des o); les éléments des α_1 dernières lignes sont les ε^2_{ij} (ou des o). En opérant par permutation, addition ou soustraction des lignes ou des colonnes, on obtient une transformation arithmétique du Tableau; on opérant en outre par division on obtient des transformations algébriques; ces dernières sont interdites avec la première définition des nombres de Betti. On peut effectuer les transformations de façon à simplifier la forme du Tableau; lorsque la simplification est la plus grande possible, le Tableau est dit *réduit*. Sa constitution permet alors de trouver toutes les congruences et les homologies possibles; et par permutation des lignes et des colonnes on passe au polyèdre réciproque; on déduit de là l'égalité $P_{p-q} = P'$. Le théorème en question résulte donc du rapprochement de cette égalité avec l'égalité précédemment obtenue.

Le Mémoire se termine par l'exposé d'un certain nombre de résultats complémentaires. D'abord, la démonstration d'une proposition auxiliaire, établie et utilisée dans l'*Analysis situs* et critiquée par M. Heegaard; puis, un critérium pour reconnaître à l'aide de T la coïncidence des deux définitions de Betti; puis, un nouveau procédé pour former toutes les homologies du polyèdre. Ce procédé, de nature arithmétique, ne s'appuie que sur les propriétés des schémas et des tableaux; il ne présuppose pas l'existence du polyèdre. Enfin, l'auteur termine en montrant qu'il est possible d'effectuer la subdivision des a_i en b_i de telle sorte que toutes les variétés introduites soient simplement connexes. Sa démonstration utilise la définition la plus générale des variétés par le prolongement analytique; elle s'appuie sur une perspective de la variété effectuée d'un point intérieur comme centre : à l'aide des rayons perspectifs on peut décomposer la variété en tétraèdres ou troncs de tétraèdres généralisés.

Picard (*E.*). — Sur les systèmes linéaires de lignes tracées sur une surface algébrique (344-346).

M. Enriques avait établi précédemment une formule pour calculer le genre du système linéaire, somme de deux systèmes donnés; sa méthode, assez délicate, s'appuyait sur la théorie de la connexion. L'auteur retrouve la même formule par un procédé intuitif, fondé sur des considérations de géométrie énumérative.

Ciani (*E.*). — Les divers types possibles de quartiques planes plusieurs fois homologico-harmoniques (347-373).

Dans ce travail, l'auteur recherche tous les types possibles de quartiques planes qui peuvent se transformer en elles-mêmes par des homologies. En étudiant la conique polaire γ du centre de l'homologie, on voit immédiatement que les homologies sont harmoniques lorsque γ est irréductible; les deux cas où il n'en est pas ainsi peuvent être caractérisés facilement. Cela étant, l'auteur recherche toutes les quartiques qui admettent deux homologies harmoniques; sa discussion procède suivant la nature des points d'intersection de la courbe avec la droite qui joint les centres d'homologie. Elle conduit à deux types généraux, d'où l'on déduit aisément toutes les quartiques qui admettent d'autres homologies. En définitive, l'auteur obtient huit types de quartiques invariantes par des homologies harmoniques. L'une de ces quartiques,

$$\sum_1^3 x_i^4 + \frac{3}{2}(1+\sqrt{-7})\sum_1^3 x_i^2 x_k^2 = 0,$$

avait été signalée déjà par M. Klein; elle admet 21 homologies. M. Ciani termine en étudiant la configuration formée par les points d'inflexion de la courbe.

René Garnier.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (¹).

Tome **160**, 1er semestre 1915.

Camichel, *Eydoux* et *Lhériaud*. — Sur l'ajutage Venturi. (28-31).

B 2810.

Lecornu (*L.*). — Sur le flambement des tiges cylindriques. (43-47).

B 3610.

Bompiani (*E.*). — Pour la géométrie de l'équation de Laplace. (57-61).

A 4840.

Guichard (*C.*). — Sur les surfaces telles que le lieu des centres

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXIX_2, p. 90-94.

des sphères osculatrices aux lignes de courbure d'une série soit un paraboloïde de révolution. (89-93).

A 8830, 8870.

Miller (*G.-A.*). — Sur le théorème de Sylow. (97).

A 1210.

Stoïlow (*S.*). — Sur les fonctions quadruplement périodiques. (129-134).

A 4070.

Mansion (*P.*). — Démonstration de la loi des grands nombres. (134-137).

A 1630.

Goursat (*E.*). — Sur une classe d'invariants intégraux. (200-201).

A 4830.

Delassus (*E.*). — Sur la théorie des liaisons finies unilatérales. (202-203).

B 2000.

Guichard (*C.*). — Sur les surfaces telles que les lignes de courbure se correspondent sur la surface primitive et sur la surface lieu des centres des sphères osculatrices aux lignes de courbure d'une série de la surface primitive. (222-227).

A 8830.

Alezais. — Sur une propriété des progressions arithmétiques. (232-233).

A 3220.

Globa-Mikhaïlenko. — Figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide en rotation quand on tient compte de la pression capillaire. (233-235).

B 2470.

Guillet (*A.*). — Roue à denture harmonique, application à la construction d'un chronomètre de laboratoire à mouvement uniforme et continu. (235-237).

B 0150.

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur un nouveau théorème dans la théorie des séries de Dirichlet. (271-273).

A 3630.

Tavani (*J.*). — Sur l'intégrale Γ(5) et ses relations avec d'autres intégrales définies. (274-276).

A 3260, 4410.

Haton de la Goupillière. — Sur les sommes de puissances semblables des nombres entiers. (292-297).

A 1625.

Sierpinski (*W.*). — Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. (302-305).

A 0430.

Garnier (*R.*). — Sur une classe de systèmes abéliens déduits de la théorie des équations linéaires. (331-334).

A 4070.

Valcovici (*V.*). — Sur le théorème des moments des quantités de mouvement. (334-336).

B 0820.

Sparre (*de*). — Étude générale du coup de bélier dans une conduite de diamètre constant. (383-384).

B 2800.

Keraval (*E.*). — Sur une famille de systèmes triplement orthogonaux. (389-392).

A 8860.

Scorza (*G.*). — Sur les fonctions abéliennes irrégulières. (392-394).

A 4060.

Appell (*P.*). — Sur l'inversion approchée de certaines intégrales réelles et sur l'extension de l'équation de Képler et des fonctions de Bessel. (419-423).

A 3260.

Esclangon (*E.*). — Sur les intégrales bornées d'une équation différentielle linéaire. (475-478).

A 4850.

Guichard (*C.*). — Sur une série de surfaces et sur les équations de Laplace qui se reproduisent par une transformation (m, n) de M. Darboux. (495-500).

A 3830, 4840.

Riquier. — Sur les systèmes partiels linéaires composés d'équations en nombre égal à celui de leurs fonctions inconnues. (504-506).

A 4840.

Soreau (*R.*). — De l'anamorphose circulaire. (506-509).

A 2440.

Humbert (*P.*). — Sur la figure piriforme d'équilibre d'une masse fluide. (509-510).

B 2410.

Globa-Mikhaïlenko (*B.*). — Modification des figures ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide en rotation sous l'action de la pression capillaire. (510-513).

B 2470.

Drzewiecki. — Sur les moteurs à vent. (513-516).

B 2830.

Darboux (*G.*). — Représentation sur un plan de la surface du quatrième ordre qui admet comme courbe double une conique. (531-536).

A 8020.

Bompiani (*E.*). — Sur les équations de Laplace à invariants égaux. (551-554).
A 4840.

Darboux (*G.*). — Représentation sur un plan de la surface du quatrième ordre à conique double. (575-579).
A 8020.

Sparre (*H. de*). — Sur la trajectoire des projectiles lancés par des avions ou dirigeables. (584-589).
B 2860.

Kampé de Fériet (*J.*). — Sur la généralisation des séries de Lagrange et de Laplace. (591-594).
A 5610, 3630.

Humbert (*P.*). — Sur une figure d'équilibre des fluides en rotation. (594-596).
B 2410.

Bompiani (*E.*). — Sur les équations de Laplace à invariants égaux. (615-617).
A 4840.

Hardy (*G.-H.*). — Sur le problème des diviseurs de Dirichlet. (617-619).
A 2810, 2890.

Delassus (*Et.*). — Sur les mouvements holonomes à formes multiples de Lagrange. (619-622).
B 2020.

Humbert (*G.*). — Sur les formes quadratiques binaires positives. (647-650).
A 2850.

Esclangon (*E.*). — Sur les intégrales quasi périodiques d'une équation différentielle linéaire. (652-654).
B 4850.

Ocagne (*M. d'*). — Remarques au sujet de l'anamorphose circulaire. (654-655).
A 2440.

Buhl (*A.*). — Sur de nouvelles applications géométriques de la formule de Stokes. (655-657).
A 3270.

Lattès (*S.*). — Sur les multiplicités linéaires invariantes par une substitution linéaire donnée. (671-674).
A 2030.

Denjoy (*A.*). — Sur la théorie descriptive des nombres dérivés d'une fonction continue. (707-709).
A 0430, 3210.

Agnus. — Le claquement de la balle et de l'obus. (733-736).
B 2860.

Guichard (*C.*). — Sur les congruences W qui appartiennent à un complexe du second ordre. Cas où l'équation en S a une racine triple. (751-755).
A 8455.

Lebon (*E.*). — Sur une nouvelle table des diviseurs d'un nombre. (758-760).
A 2810.

Bompiani (*E.*). — Sur l'élément linéaire des hypersurfaces. (760-763).
A 8870.

Denjoy (*A.*). — Sur les nombres dérivés. (763-766).
A 0430, 3210.

Garnier (*R.*). — Sur la représentation des intégrales des équations de M. Painlevé, au moyen de la théorie des équations linéaires. (795-798).
A 4850.

Guichard (*C.*). — Sur les congruences W qui appartiennent à un complexe du second ordre. Cas où l'équation en S a une racine double. (834-838).

A 8455.

Fréchet (*M.*). — Définition de l'intégrale sur un ensemble abstrait. (839-842).

A 0430, 3260.

Tome 161, 2e semestre 1915.

Boussinesq (*J.*). — Réflexions sur les principes de la Dynamique d'Aristote et sur leur accord avec l'expérience, dans le cas des phénomènes à allure uniforme. (21-27).

B 000.

Boulyguine (*J.*). — Sur la représentation d'un nombre entier par une somme de carrés. (28-30).

A 2840.

Boussinesq (*J.*). — Existence, dans nos sciences physico-mathématiques, de Chapitres fondamentaux encore au même état rudimentaire que la Dynamique d'Aristote. (47-52).

B 000.

Boussinesq (*J.*). — Importance qu'a eue la Dynamique rudimentaire d'Aristote dans le plus grand progrès de la Civilisation méditerranéenne. (65-71).

B 000.

Denjoy (*A.*). — Les quatre cas fondamentaux des nombres dérivés. (124-127).

A 0430, 3210.

Appell (*P.*). — Contribution à l'étude des fonctions θ de degrés supérieurs. (161-165).

A 4070.

Pérès (*J.*). — Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables. (168-170).

A 4420.

Humbert (*G.*). — Sur la réduction des formes d'Hermite dans un corps quadratique imaginaire. (189-196).

A 2840.

Humbert (*G.*). — Sur la réduction des formes d'Hermite dans un corps quadratique imaginaire. (227-234).

A 2840.

Pompeiu (*D.*). — Sur une solution double de l'équation de Riccati. (235-237).

A 4840.

Boussinesq (*J.*). — Comment le débit d'un tuyau de conduite affecté d'un rétrécissement notable, mais graduel, peut se déduire de l'abaissement de pression qui s'y produit le long de la partie rétrécie. (253-258).

B 2530.

Auric. — Sur une série quadruple de triangles hexahomologiques. (275-278).

A 6810.

Lipine (*N.*). — Sur la réduction des périodes des intégrales abéliennes et sur une généralisation du théorème d'Abel. (278-281).

A 4060.

Galitzine (*B.*). — Description d'un appareil destiné à la détermination directe des accélérations. (281-284).

B 0160.

Galitzine (*B.*). — Mesure directe des accélérations. (304-308).

B 0160.

Boussinesq (*J.*). — Remarques et calculs montrant que la complication des formules pour les grands déplacements est due non aux déformations, mais aux rotations. (330-335).

B 3210.

Humbert (*P.*). — Sur les bifurcations des ellipsoïdes de Jacobi. (340-343).

B 2470.

Camichel (*C.*). — Sur les coups de bélier : oscillations en masse (343-345).

B 2800.

Appell (*P.*). — Sur une deuxième forme des fonctions θ du quatrième degré. (373-379).

A 4070.

Haag (*J.*). — Sur un système de formules différentielles concernant les éléments de tir d'un projectile soumis à une résistance quadratique de l'air. (379-381).

B 1610, 2860.

Rabut (*Ch.*). — Calcul d'une poutre bandée. (381-384).

B 3280.

Camichel (*C.*). — Sur les coups de bélier : conduite entièrement purgée. (412-414).

B 2800.

Lecornu (*L.*). — Sur le flambement d'une tige courbe. (427-434).

B 3240.

Dejust (*J.*). — Sur l'emploi du tube de Venturi pour la mesure directe du débit d'une conduite. (456-458).

B 2530.

Esclangon (*E.*). — Sur les intégrales quasi périodiques d'une équation différentielle linéaire. (488-490).

A 4850.

Angelesco (*A.*). — Sur des polynomes associés à plusieurs variables. (490-492).

A 3270.

Haag (*J.*). — Sur la méthode d'Otto. (524-526).

B 1650.

Séguier (*de*). — Sur les constituants transitifs de certains

groupes à invariant bilinéaire ou quadratique dans un champ de Galois. (553-556).

A 1210.

Ocagne (*M. d'*). — Sur la rectification et la quadrature des épi- et hypocycloïdes. (556-558).

A 8460.

Gronwall (*T.-H.*). — Sur les surfaces minima formant une famille de Lamé. (581-583).

A 8820, 8860.

Haag (*J.*). — Sur le calcul du temps. (633-634).

B 1650.

Séguier (*de*). — Équations de certains groupes linéaires dans un champ de Galois. (670-673).

A 1210.

Pigeaud. — Sur l'équilibre élastique d'une plaque indéfinie, d'épaisseur uniforme, comprimée par deux forces égales et opposées, uniformément réparties sur deux droites parallèles situées dans un plan normal aux bases. (673-676).

B 3250.

Fremont (*Ch.*). — Un échappement d'horlogerie au treizième siècle. (690-692).

B 0150.

Humbert (*G.*). — Sur l'approximation des irrationnelles réelles. (717-721).

A 0420.

Mesnager. — Sur l'équilibre élastique d'une plaque indéfinie, d'épaisseur uniforme, comprimée par deux forces égales et opposées, uniformément réparties sur deux droites parallèles situées dans un plan normal aux bases. (730-732).

B 3250.

Sparre (de). — Sur la trajectoire des projectiles lancés avec une grande vitesse initiale sous un angle de projection voisin de 45°, et sur l'influence de la diminution de la densité de l'air. (767-771).

B 1610, 1650.

Kryloff (N.). — Sur la convergence des quadratures. (773-775).

A 3260.

C. Guichard.

ANNALI DELLA R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA (Scienze fisiche e matematiche). Pisa, tip. T. Nistri e C.; in-8 (¹).

Tomo VII, 1895.

Fibbi (C.). — Les systèmes doublement infinis de rayons dans les espaces de courbure constante (1-100 et une page d'errata).

Les points d'un espace de courbure constante $\frac{1}{k^2}$ sont déterminés par des coordonnées de Weierstrass. Un système ∞^2 de droites est défini en supposant que chacune de ces droites soit menée par un point variable

$$P \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

d'une surface S ayant pour équations

$$x_i = x_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

et qu'elle soit perpendiculaire à un plan $\pi \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ passant par P et déterminé par ses coordonnées

$$\xi_i = \xi_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

On a les identités

$$\Sigma x_i^2 = k^2, \qquad \Sigma \xi_i^2 = 1, \qquad \Sigma x_i \xi_i = 0.$$

Étant X_i les coordonnées des points de la droite passant par x_i et normale au plan ξ_i, et w la distance du point X au point x (abscisse de X), les équations de la droite sont

$$X_i = x_i \cos\frac{w}{k} + k\xi_i \sin\frac{w}{k} \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XIV_2, p. 258.

étant x', ξ', ϖ' les mêmes quantités relatives à une autre droite, on exprime la distance p d'un point de l'une à un point de l'autre par

$$k^2 \cos\frac{p}{k} = (\Sigma x_i x'_i)\cos\frac{\varpi}{k}\cos\frac{\varpi'}{k} + k(\Sigma x_i \xi'_i)\cos\frac{\varpi}{k}\sin\frac{\varpi'}{k}$$
$$+ k(\Sigma x'_i \xi_i)\sin\frac{\varpi}{k}\cos\frac{\varpi'}{k} + k^2(\Sigma \xi_i \xi'_i)\sin\frac{\varpi}{k}\sin\frac{\varpi'}{k},$$

d'où l'on déduit les équations donnant les conditions de maximum ou de minimum de p et qui, en y posant

$$r = k \operatorname{tang}\frac{\varpi}{k}, \qquad r' = k \operatorname{tang}\frac{\varpi'}{k},$$

donnent les *abscisses réduites* r, r' des pieds de la plus grande et de la plus petite distance des deux droites.

L'auteur introduit les formes différentielles

(1) $$\begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \end{Vmatrix} = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

(2) $$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ d\xi_1 & d\xi_2 & d\xi_3 & d\xi_4 \end{Vmatrix} = \mathrm{E}'du^2 + 2\mathrm{F}'\,du\,dv + \mathrm{G}'dv^2,$$

(3) $$\Sigma\, dx_i\, d\xi_i = e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2.$$

Les coefficients de ces formes sont

$$= \sum\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 - \left(\sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2,$$
$$\mathrm{F} = \sum \frac{\partial x_i}{\partial a}\frac{\partial x_i}{\partial v} - \left(\sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\right)\left(\sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial v}\right),$$
$$\mathrm{G} = \sum\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2 - \left(\sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2;$$
$$\mathrm{E}' = \sum\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{k^2}\left(\sum x_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u}\right)^2,$$
$$\mathrm{F}' = \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial u}\frac{\partial \xi_i}{\partial v} - \frac{1}{k^2}\left(\sum x_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u}\right)\left(\sum x_i \frac{\partial \xi_i}{\partial v}\right),$$
$$\mathrm{G}' = \sum\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{k^2}\left(\sum x_i \frac{\partial \xi_i}{\partial v}\right)^2;$$
$$e = \sum \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial \xi_i}{\partial u},$$
$$f = \sum \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial \xi_i}{\partial u},$$
$$f' = \sum \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial \xi_i}{\partial v},$$
$$g = \sum \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial \xi_i}{\partial v},$$

et il y a entre eux trois relations que l'auteur transforme en introduisant les

symboles suivants :

$$P = Eg - F(f+f') + Ge,$$
$$P' = E'g - F'(f+f'') + G'e,$$
$$\mathbf{E} = E - k^2E', \quad \mathbf{F} = F - k^2F', \quad \mathbf{G} = G - k^2G', \quad \mathbf{P} = P - k^2P',$$
$$\nabla = \Delta - k^2\Delta' \quad (\text{étant } \Delta = EG - F^2, \quad \Delta' = E'G' - F'^2).$$

Au moyen de ces transformations, l'abscisse réduite r des pieds de la plus grande et de la plus petite distance, sur la droite (u, v), est donnée par

$$\begin{aligned} &\{ e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2 \}\, r^2 \\ &+ \{ \mathbf{E}\,du^2 + 2\mathbf{F}\,du\,dv + \mathbf{G}\,dv^2 \}\, r \\ &- k^2 \{ e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2 \} = 0, \end{aligned}$$

et, en posant

$$r - \frac{k^2}{r} = \frac{1}{z},$$
$$z = -\frac{e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2}{\mathbf{E}\,du^2 + 2\mathbf{F}\,du\,dv + \mathbf{G}\,dv^2}.$$

En cherchant la plus grande et la plus petite abscisse des pieds des plus grandes et des plus petites distances de la droite (u, v) aux droites infiniment rapprochées, l'auteur trouve les *points limites* des pieds des distances, qui, dans le cas de Lobatschewsky ($k^2 < 0$), sont toujours réels. On a deux points limites L_1, L_2 des pieds des plus petites distances et deux L'_1, L'_2 des pieds des plus grandes distances.

Les abscisses réduites ρ_1, ρ_2 des points (*foyers*) où la droite (u, v) est rencontrée par les (deux) droites infiniment rapprochées, sont données par

$$\Delta'\nabla\rho^2 + \mathbf{P}\rho + \Delta\nabla = 0,$$

et l'on a : dans l'espace de Lobatschewsky, les deux foyers et les deux points limites ont même point moyen.

On appelle *plans principaux* les deux plans passant par une droite (u, v) du système et contenant respectivement la plus grande et la plus petite distance correspondant aux points limites. Ces plans sont perpendiculaires entre eux; l'un contient la plus grande et la plus petite distance correspondant aux points limites L_1, L'_2, et l'autre les distances relatives aux points limites L_2, L'_1.

Les *plans focaux* sont des plans passant par la droite (u, v) et contenant respectivement les deux rayons infiniment rapprochés qui rencontrent (u, v) aux foyers. Ces plans sont également inclinés sur les plans principaux.

Il y a certaines surfaces liées à la congruence : les deux *surfaces moyennes*, lieux des points moyens du segment L_1, L_2 ou du segment L'_1, L'_2; les quatre *surfaces lieux des points limites;* les deux *surfaces focales*, lieux des foyers. De ces surfaces l'auteur expose certaines propriétés, données par Kummer, avec les modifications entraînées par l'application aux espaces non linéaires.

Un chapitre est destiné à la détermination de la *densité* du système en chaque point de l'espace. Étant donné M un point de la droite (u, v) de la congruence, menons un plan π perpendiculaire à cette droite et décrivons en π une courbe fermée infiniment petite c dont l'aire soit ω, et qui renferme le point M. Par M conduisons les parallèles à toutes les droites de la congruence qui passent par

les points de c; ces parallèles déterminent, sur une sphère infiniment petite de rayon r ayant M pour centre, une courbe fermée c' dont l'aire soit $r^2\omega$. Le rapport

$$\Theta = \frac{\omega}{\omega'}$$

s'appelle la *densité de la congruence* au point M.

Dans l'espace de Riemann, en supposant les foyers réels, la densité est toujours négative dans le segment des foyers et dans le segment des deux points ayant des deux foyers une distance $\frac{1}{2}k\pi$; elle est infinie en ces points et nulle aux foyers; partout ailleurs, elle est positive. Il y a un maximum au point milieu de L_1, L_2 et un minimum en celui de L'_1, L'_3. Si les foyers sont imaginaires, la densité est toujours positive.

Dans l'espace de Lobatschewsky on a des propriétés semblables et, de plus, on trouve qu'à distance infinie la densité est toujours égale à la valeur absolue de la courbure.

Suit l'étude des congruences formées par les normales à une surface, dont la propriété caractéristique est que les foyers coïncident avec les points limites des pieds des plus petites distances. Pour ces congruences, on doit avoir $f = f'$, et cette condition est aussi suffisante pour l'existence d'une série de surfaces S orthogonales à la congruence; l'auteur trouve les formules, analogues à celles de Codazzi, pour la détermination de ces surfaces; puis, de la condition $f = f'$ il déduit le théorème de Beltrami relatif à la déformation de la surface orthogonale, et le théorème de Malus-Dupin relatif à la réflexion et à la réfraction.

Enfin l'auteur étudie, toujours dans les espaces à courbure constante, les congruences dans lesquelles est constante la distance des foyers et celle des points limites, auxquelles il conserve la dénomination de *congruences pseudo-sphériques*, par suite de la propriété de leurs surfaces focales, ayant même courbure constante négative.

Enriques (*F.*). — Sur certaines propriétés métriques des complexes de droites, et en particulier des complexes symétriques par rapport à des axes (1-55).

Les coordonnées de rayons employées par l'auteur sont les cosinus a, b, c et les quantités

$$l = \begin{vmatrix} y' & z' \\ b & c \end{vmatrix}, \qquad m = \begin{vmatrix} z' & x' \\ c & a \end{vmatrix}, \qquad n = \begin{vmatrix} x' & y' \\ a & b \end{vmatrix},$$

x', y', z' étant un point de la droite.

Les droites polaires des droites d'un plan, par rapport à un complexe de degré p, forment un système rationnel ∞^2 d'ordre $p(p-1)+1$, et de classe $p(p-1)$. Ce système a une surface focale d'ordre $2\{p(p-3)+5\}$ et de classe $2\{p(p-3)+4\}$. Des propriétés de ce système on déduit celles des systèmes de *diamètres* d'un complexe de degré p, et en particulier des *axes centraux;* il y a au plus p^2 de ces axes.

Étant

$$\varphi = 0$$

un complexe de degré p, les complexes

$$\varphi - k\,(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{p}{2}} = 0,$$

lorsque p est pair, ou

$$\varphi - k^2(a^2 + b^2 + c^2)^p = 0,$$

lorsque p est impair, représentent des faisceaux contenant le complexe φ et le complexe cyclique

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Ce sont les complexes *homocycliques-homofocaux* de φ. Ils ont la propriété que leurs droites ont moment statique constant avec leurs polaires par rapport à φ. Tous ces complexes homofocaux ont même système diamétral, même surface centrale et mêmes axes.

Une droite est un *axe de symétrie* du complexe $\varphi = 0$, lorsque le complexe est transformé en lui-même par une symétrie orthogonale par rapport à la droite. On a deux espèces d'axes de symétrie : pour ceux de l'une, la congruence des droites perpendiculaires à l'axe n'appartient pas au complexe (ou elle lui appartient un nombre pair de fois); pour ceux de l'autre, la même congruence appartient au complexe un nombre impair de fois.

Si un complexe a un nombre fini d'axes de symétrie, ces axes doivent passer par un point, et l'on a les cas suivants :

a. Ou il y a des axes dans un plan et disposés symétriquement autour d'un point et un axe perpendiculaire au plan et passant par ce point;

b. Ou il y a les neuf axes du cube;

c. Ou bien les quinze axes de l'icosaèdre.

En général, s'il y a des complexes de degré p ayant une certaine symétrie par rapport à des axes en nombre fini, il y en a aussi de tout degré supérieur $\equiv p \pmod 2$.

Un complexe de degré p peut avoir un nombre quelconque $N \leqq p$ d'axes de première ou de seconde espèce appartenant à un faisceau. La droite perpendiculaire au faisceau est ou n'est pas axe de symétrie, suivant que le nombre N est pair ou impair. Le complexe peut aussi avoir un nombre pair quelconque $\leqq 2p$ d'axes (p de première et p de seconde espèce) et la droite perpendiculaire au faisceau est alors toujours un axe de symétrie.

Le dernier Chapitre traite le cas du nombre infini d'axes de symétrie. En laissant de côté le cas où toutes les droites de l'espace sont des axes, ce qui conduit au complexe cyclique, on a les cas suivants :

a. Tous les axes d'un faisceau et la droite perpendiculaire au faisceau.

b. Les axes d'un nombre fini de faisceaux parallèles qui appartiennent à un plan et sont en nombre impair, disposés symétriquement par rapport à un point, ou bien appartiennent à un nombre pair de plans d'un faisceau, disposés symétriquement par rapport à la droite commune, qui est un axe du complexe.

c. Les axes d'une étoile ayant le centre à distance finie.

d. Les axes d'une ou de plusieurs étoiles ayant les centres à l'infini, dont les directions sont celles des axes de symétrie d'un polyèdre régulier.

e. Les axes d'une congruence de droites orthogonales à une directrice, et cette directrice elle-même.

f. Les axes parallèles à un plan et ceux perpendiculaires à ce même plan.

Bonaventura (*P.*). — Sur les formules générales de multiplication complexe des fonctions elliptiques (1-55).

Le calcul des formules de multiplication ordinaire de l'argument a été simplifié par Weierstrass par l'introduction de la fonction

$$\Psi_n(z) = \frac{\sigma(n, z)}{\sigma(z)^{n^2}}.$$

L'auteur étend les résultats de Weierstrass au cas de la multiplication complexe. Son procédé est le suivant :

Afin que la multiplication complexe puisse avoir lieu, c'est-à-dire que $p(\varepsilon z)$ puisse s'exprimer rationnellement par $p(z)$, il faut et il suffit qu'on ait

$$(1)\qquad \begin{cases} \varepsilon\omega = a\omega + b\omega', \\ \varepsilon\omega' = c\omega + d\omega', \end{cases}$$

a, b, c, d étant des entiers; d'où il suit qne le rapport

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

est *indice* d'une forme binaire quadratique primitive (A, B, C) de déterminant négatif — D, et ε un nombre complexe de la forme

$$y + ix\sqrt{D},$$

y, x étant entiers tous les deux, ou bien étant tous les deux moitié de nombres impairs. Une même fonction elliptique correspond à toutes les formes de même classe que (A, B, C); le degré de la transformation (1) est donné par

$$N = ad - bc = y^2 + x^2 D.$$

La forme (A, B, C) étant donnée, il s'agit de trouver la formule de multiplication complexe pour la fonction elliptique correspondante. L'auteur commence par rechercher les points d'infini de $p(\varepsilon z)$. Étant donné e le plus grand diviseur commun de b, d, et ayant posé

$$b = b'e, \qquad d = d'e, \qquad N = n'e,$$

ces points d'infini sont les N points

$$\Omega_{\xi\xi'} = \frac{2\xi\omega + 2\xi'\omega'}{\varepsilon},$$

où

$$\xi = 0, 1, \ldots, n' - 1,$$
$$\xi' = 0, 1, \ldots, e - 1.$$

De là on déduit la décomposition en éléments simples de la fonction $\varepsilon^2 p(\varepsilon z)$,

$$\varepsilon^2 p(\varepsilon z) = p(z) + \Sigma_{\xi\xi'} \{ p(z - \Omega_{\xi\xi'}) - p(\Omega_{\xi\xi'}) \}.$$

Après cela, l'auteur prend à étudier la fonction

$$\Theta_\varepsilon(z) = e^{-G_\varepsilon z^2}\frac{\sigma(\varepsilon z)}{\sigma(z)^N},$$

où

$$G_\varepsilon = \frac{xi\varepsilon}{\pi}(A\eta'^2 + 2B\eta\eta' + C\eta^2),$$

et, comme il le démontre, on a

$$G_\varepsilon = \frac{1}{2}\Sigma_{\xi\xi'}\, p(\Omega_{\xi\xi'}).$$

Cette fonction $\Theta_\varepsilon(z)$ peut s'exprimer par $p'(z)$ multipliée par une fonction rationnelle de $p(z)$, ou bien un des produits

$$\Theta_\varepsilon(z)\frac{\sigma(z)}{\sigma_1(z)},\qquad \Theta_\varepsilon(z)\frac{\sigma(z)}{\sigma_2(z)},\qquad \Theta_\varepsilon(z)\frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)}$$

est une fonction rationnelle de $p(z)$.

C'est cette fonction $\Theta_\varepsilon(z)$ qui constitue la généralisation de la fonction $\psi_n(z)$ de Weierstrass, et qui donne à la multiplication complexe une forme analogue à celle que la multiplication ordinaire prend au moyen de ψ_n; on a, en effet,

$$p(\varepsilon z) - p(z) = -\frac{\Theta_{\varepsilon-1}\,\Theta_{\varepsilon+1}}{\Theta_\varepsilon^2}.$$

Les coefficients de $p(z)$ dans le développement du second membre sont des fonctions rationnelles de g_2, g_3 avec des coefficients ne contenant d'autre irrationalité que $i\sqrt{D}$.

Dans le dernier Chapitre, on trouve des relations récurrentes entre les fonctions Θ_ε.

Fabri (C.). — Sur la théorie des mouvements tourbillonnaires dans les fluides incompressibles (1-35).

La décomposition du mouvement d'une particule fluide, faite par Helmholtz (*Wissenschaftliche Abhandlungen :* Hydrodynamik) en trois mouvements élémentaires, ne tient compte que des termes du premier degré dans les développements des composantes u, v, w de la vitesse en série de Taylor. Rowland (*American Journal of Math.*, 1880) a considéré des termes de degré supérieur et Boggio-Lera (*Ann. della Sc. Norm. sup. di Pisa*, 1887) a examiné plus complètement les termes du deuxième degré. L'auteur prend en considération un nombre m quelconque de termes du développement. Il commence par l'étude des déformations d'un milieu continu, en supposant que les composantes des déplacements soient des fonctions homogènes de degré m des coordonnées. Le déplacement

$$\delta x = \sum \frac{m!}{r!\,s!\,t!} U_{r,s,t}\, x^r y^s z^t,$$

$$\delta y = \sum \frac{m!}{r!\,s!\,t!} V_{r,s,t}\, x^r y^s z^t,$$

$$\delta z = \sum \frac{m!}{r!\,s!\,t!} W_{r,s,t}\, x^r y^s z^t,$$

étant $m = 2n+1$, se compose de trois déplacements, dont l'un a une fonction potentielle, un autre peut se regarder comme une rotation autour d'une droite, tout point recevant un déplacement proportionnel au produit de sa distance à la droite par la $2n^{\text{ième}}$ puissance de la distance du point à l'origine (*rotation d'ordre* $2n+1$); le troisième déplacemeut n'est pas représentable par des vecteurs.

Lorsque $m = 2n$, le déplacement se compose aussi de trois déplacements dont le premier admet une fonction potentielle; le second a lieu dans un plan déterminé par une certaine droite et par le rayon vecteur partant de l'origine (*flexion d'ordre* $2n+2$); le troisième n'est pas représentable par des vecteurs.

Ces résultats sont ensuite appliqués à l'étude du mouvement du fluide. Le mouvement de la particule fluide reste décomposé en $3m$ mouvements, qui sont : une translation, m mouvements ayant pour composantes les dérivées de fonctions homogènes des degrés 2, 3, ..., $m+1$ respectivement; $m-1$ mouvements non représentables par des vecteurs et autres m mouvements de nature différente suivant qu'ils proviennent de termes de degré pair ou impair.

Tedone (*O.*). — Sur le mouvement d'un ellipsoïde fluide suivant l'hypothèse de Dirichlet (I-IV, 1-100).

Travail d'ensemble, exposant les résultats obtenus par Dirichlet (*Journal de Crelle*, t. 58), Riemann (*Nachrichten de Göttingue*, t. 9), Brioschi (*Ann. di Mat.*, 2e série, t. 9), Basset (*Proceedings of the London Math. Soc.*, t. V) et ceux des recherches personnelles de l'auteur.

Une masse fluide incompressible homogène et sans frottement, ayant la forme d'un ellipsoïde, et dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton, peut se mouvoir, suivant l'hypothèse de Dirichlet, de manière que les coordonnées d'un élément au temps t soient des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées initiales

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0, \\ y &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0, \\ z &= a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0. \end{aligned}$$

Cette possibilité est établie en partant des équations hydrodynamiques de Lagrange, et l'on obtient ainsi les équations de Dirichlet, que Brioschi a réduites à une forme qui montre immédiatement la réciprocité relevée par Dedekind, par laquelle les équations restent les mêmes par un certain échange des variables, de manière qu'à toute solution correspondent *deux* mouvements qu'on appelle *réciproques*. Pour les équations de Dirichlet, l'auteur détermine les intégrales des aires, celle des forces vives et celles de la conservation des rotations de Helmholtz; et de ces dernières il déduit que la distance entre une particule appartenant à la *ligne tourbillonnaire centrale* et le centre est proportionnelle à la grandeur de la rotation. Puis, en partant du principe de Hamilton, il trouve les équations de Riemann, en déduit de nouveau la réciprocité de Dedekind et trouve l'intégrale des aires, celle de la conservation des rotations et celle des forces vives.

Une comparaison des équations de Dirichlet avec celles de Riemann prouve que ces dernières sont plus convenables pour les applications à des cas particuliers.

Ces questions occupent les trois premiers Chapitres. Dans les suivants sont traités : le cas où la forme de l'ellipsoïde et la condition du mouvement présentent une symétrie complète autour d'un axe, et le cas où la forme de l'ellipsoïde reste constamment la même.

Lauricella (*G.*). — Équilibre des corps élastiques isotropes (I-VII, 1-120).

Exposé d'une méthode de M. Volterra pour la résolution du problème de l'élasticité d'un corps limité par une surface σ, en partant des formules de M. Somigliana, en supposant la connaissance de certaines intégrales particulières des équations d'équilibre et en employant le théorème de réciprocité de Betti.

Les cas sont les suivants :

1° On connaît les forces extérieures et les composantes des déplacements à la surface.

2° Les composantes des déplacements dans les directions y, z et la composante des tensions dans la direction x.

3° Les composantes des tensions au contour dans les directions y, z et la composante des déplacements des points du contour dans la direction x.

4° Les composantes des tensions au contour.

Suit l'application à un corps élastique indéfini limité par le seul plan $x = 0$, pour lequel aussi l'auteur traite les quatre cas analogues aux précédents.

Un chapitre est destiné à l'étude des intégrales qui figurent dans les formules de M. Somigliana. Ce sont des intégrales d'espace

$$\int_S \rho X u_i \, dS, \tag{1}$$

analogues à la fonction potentielle d'espace, et des intégrales de surface

$$\int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(i)} u \, d\sigma, \tag{2}$$

$$\int_\sigma \Sigma X_\sigma u_i \, d\sigma, \tag{3}$$

analogues respectivement à la fonction potentielle d'une double couche et à celle d'une distribution superficielle. Pour les intégrales d'espace, l'auteur a démontré (*Rendiconti dei Lincei*, 1893) un théorème analogue à celui de Poisson ; ici il étudie d'abord les intégrales (2) et les discontinuités qu'elles ont à travers la surface, et il démontre une proposition analogue à celle qui exprime la continuité des dérivées normales d'une fonction potentielle d'une double couche. Pour les intégrales (3) on a un théorème correspondant à celui de la discontinuité de la dérivée normale d'une fonction potentielle de surface.

Le problème de l'élasticité, dans le cas où l'on connaît les composantes des déplacements à la surface, correspond au problème de Dirichlet dans la théorie des fonctions harmoniques, et l'auteur démontre sur les séries d'intégrales des équations d'équilibre des corps élastiques isotropes le théorème suivant, qui est

une extension du théorème de M. Volterra sur les séries de fonctions harmoniques :

Si les fonctions

$$U_1, V_1, W_1; \quad U_2, V_2, W_2; \quad \ldots$$

constituent dans un espace connexe S, *limité par des surfaces* σ, *une série de systèmes d'intégrales des équations*

$$(1) \quad \begin{cases} L\Delta^2 u + (L + K)\dfrac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0, \\ L\Delta^2 v + (L + K)\dfrac{\partial\theta}{\partial y_1} = 0, \\ L\Delta^2 w + (L + K)\dfrac{\partial\theta}{\partial z_1} = 0, \end{cases}$$

qui, lorsque le point (x_1, y_1, z_1) *s'approche indéfiniment de* σ, *prennent respectivement les valeurs*

$$u_1, v_1, w_1; \quad u_2, v_2, w_2; \quad \ldots,$$

si les trois séries

$$(2) \quad U = \sum_1^\infty U_i, \quad V = \sum_1^\infty V_i, \quad W = \sum_1^\infty W_i$$

sont uniformément convergentes en S, *et les autres séries*

$$u = \sum_1^\infty u_i, \quad v = \sum_1^\infty v_i, \quad w = \sum_1^\infty w_i$$

sont uniformément convergentes sur σ, *les trois séries* (2) *représentent trois intégrales des équations* (1), *qui, lorsque* (x_1, y_1, z_1) *s'approchent indéfiniment de* σ, *prennent respectivement les valeurs* u_1, v_1, w_1.

Niccoletti (*O.*). — Sur un cas spécial de problème de Plateau (I-IV, 1-77).

Sur une surface minima, s'il y a une droite, elle doit être un axe de symétrie pour la surface et, s'il y a une ligne géodésique plane, le plan de cette ligne doit être un plan de symétrie. Donc, s'il existe une surface minima passant par des droites données et ayant des géodésiques dans des plans donnés, cette surface sera périodique par rabattement autour de ces droites et par réflexion par rapport à ces plans. Un tel *contour* de droites et de plans est appelé un *contour de Schwarz*, et l'auteur détermine les contours de Schwarz de quatre éléments qui donnent lieu à un groupe discontinu d'opérations, appartenant au type de l'octaèdre.

En premier lieu, il suppose que les quatre éléments soient des droites, et il observe que, pour avoir tous les quadrilatères gauches donnant lieu à une surface minima périodique ayant la symétrie de l'octaèdre, il suffit de déterminer tous les quadrilatères distincts que l'on peut former avec les arêtes et les diago-

nales du cube. Étant x, y, z trois segments équipollents aux arêtes du cube, un côté quelconque du quadrilatère doit avoir une des expressions

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha x, & \beta y, & \gamma z, \\ \alpha_1(y+z), & \beta_1(z+x), & \gamma_1(x+y), \\ \alpha_2(y-z), & \beta_2(z-x), & \gamma_2(x-y), \end{cases}$$

les coefficients étant des nombres entiers et les sommes et différences étant des opérations géométriques. La somme géométrique des quatre côtés du quadrilatère est nulle; par suite, doit être nulle la somme des coefficients de x, de y et de z séparément. De cette manière, l'auteur obtient *neuf* quadrilatères. Les surfaces minima périodiques qui en résultent se réduisent à *six* distinctes.

Les contours de Schwarz constitués par un plan et trois droites sont formés par le plan de l'une des trois faces du cube ou par un plan diagonal et par trois des droites dont l'expression géométrique est donnée par trois des expressions (1) du cas précédent. Ces contours sont en nombre infini, mais ils peuvent se distribuer en un nombre fini de types.

La détermination des types divers est aussi faite par l'auteur pour les contours formés de deux plans et deux droites, ou de trois plans et une droite, ou de quatre plans. Dans ce dernier cas, les quatre plans doivent former un tétraèdre dont trois faces sont orthogonales, ou bien deux seules faces sont orthogonales. On trouve ainsi le tétraèdre

$$(1) \qquad x = y, \quad x = -y, \quad z = 0, \quad y = z + 1,$$

ou bien les tétraèdres

$$(2) \qquad x = 0, \quad y = 0, \quad x = z, \quad y = z - 2;$$

$$(3) \qquad x = y, \quad x = -y, \quad x = z, \quad x + z = 2;$$

$$(4) \qquad y = 0, \quad x = z, \quad y = z, \quad x + y = 1.$$

A un tétraèdre correspondent en général trois surfaces minima, suivant l'ordre dans lequel les faces sont rencontrées par la surface; mais si le tétraèdre a un plan de symétrie, deux de ces surfaces sont identiques. A cause de cela (et aussi d'une autre réduction) on trouve qu'il y a *six* surfaces minima *périodiques* sur lesquelles on peut limiter un quadrilatère avec des géodésiques planes. Ces surfaces sont les conjuguées en applicabilité des surfaces limitées par un quadrilatère gauche, trouvées par Schönfliess (*C. R. Acad. Sc.*, 1891).

Tous les contours trouvés par l'auteur peuvent se distribuer en couples, de manière que les droites et les plans de l'un soient respectivement perpendiculaires aux plans et aux droites de l'autre. Cette correspondance entre les contours deux à deux amène l'auteur à des considérations par lesquelles on vient tout naturellement à se poser la question, qu'il ne résout pas, sous quelles conditions la conjuguée en applicabilité d'une surface minima périodique est aussi périodique.

Dans la seconde partie du travail, l'auteur commence par démontrer le théorème suivant :

« Étant donné un contour de Schwarz tel qu'il n'existe aucun plan passant par les droites du contour et orthogonal à ses plans, et supposé que ce contour donne lieu à une surface minima périodique dont la portion élémentaire n'ait

pas de secteurs infinis, le groupe des translations de la surface est à trois dimensions. »

Puis il construit les groupes relatifs à quelques-uns des contours obtenus dans le Chapitre précédent. Enfin, il donne les formules pour une surface minima dont le contour est formé par des droites et dont le groupe correspondant est le groupe spécial trouvé par Schönfliess.

S. Rindi.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA [1].

Serie III, Tomo XI, 1905.

Lovett (*E.-O.*). — Trajectoires singulières dans le problème restreint des quatre corps (1-8) [en anglais].

Le cas restreint étudié par l'auteur est celui où trois des corps sont les sommets d'un triangle équilatéral (comme dans le cas particulier envisagé par Lagrange pour le problème des trois corps), le quatrième corps ayant une masse nulle et étant situé dans le plan du triangle. M. Lovett étend à ce cas la méthode suivie par M. Levi-Civita pour l'étude des trajectoires singulières et des chocs dans le problème restreint des trois corps (*Annali*, t. IX, p. 1-32). La relation qui doit exister entre les données initiales pour qu'il y ait choc est algébrique par rapport aux vitesses initiales : c'est un cas d'exception au théorème de M. Painlevé (*C. R. Acad. Sc.*, décembre 1897) d'après lequel, dans le problème des n corps avec au moins trois masses non nulles, les conditions d'un choc doivent être transcendantes par rapport aux vitesses.

Teixeira (*F.-G.*). — Sur la théorie des cubiques circulaires et des quartiques bicirculaires (9-28) [en français].

Détermination des centres d'inversion d'une cubique circulaire par intersection de la courbe avec une certaine hyperbole équilatère. Détermination analogue des centres d'inversion d'une quartique bicirculaire. Construction des quartiques bicirculaires unicursales : On considère deux circonférences C, C', dont l'une, C, passe par O; on mène par O une sécante variable rencontrant C en M et C' en deux points M'_1, M'_2, puis l'on prend sur cette sécante les vecteurs $\overline{OP_1} = \overline{MM'_1}$, $\overline{OP_2} = \overline{MM'_2}$; le lieu des points P_1, P_2 est une quartique bicirculaire unicursale; toute quartique bicirculaire unicursale peut être définie de cette façon et il lui correspond quatre systèmes de circonférences C, C', dont deux réels et deux imaginaires.

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XL_2, p. 40-61.

Bortolotti (*E.*). — Contribution à la théorie des infiniment grands (29-65).

Soient $f(x_n)$, $\varphi(x_n)$ des fonctions définies pour les nombres x_n d'un ensemble dénombrable et infinies en même temps que n; posons

$$f(x_n) = f_n, \qquad \varphi(x_n) = \varphi_n.$$

Le but de l'auteur est d'étudier les conditions de validité de la relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_n}{\varphi_n} = \lim_{n=\infty} \frac{\Delta f_n}{\Delta \varphi_n},$$

en posant

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n, \qquad \Delta\varphi_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n$$

et en supposant seulement l'existence de la première limite. Il démontre que, si les fonctions f_n, φ_n sont monotones, ainsi que le rapport $\frac{f_n}{\varphi_n}$, et si $\frac{f_n}{\varphi_n}$ a une limite pour n infini, il en est de même de $\frac{\Delta f_n}{\Delta\varphi_n}$. Mais les deux rapports n'ont pas toujours le même mode de croissance. L'auteur est ainsi conduit à étudier le double rapport $\frac{\Delta f_n}{\Delta\varphi_n} : \frac{f_n}{\varphi_n}$ et il établit le théorème suivant :

Posons

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = 1 + a_n, \qquad \frac{\Delta f_n}{\Delta\varphi_n} : \frac{f_a}{\varphi_n} = 1 + b_n, \qquad \beta_n = \frac{\log\left(1 + \frac{a_n b_n}{1 + a_n}\right)}{\log(1 + a_n)};$$

si β_n a une limite déterminée β, l'ordre d'infinitude de f_n par rapport à φ_n est $(1 + \beta)$, l'ordre d'infinitude étant pris au sens de Cauchy et la notation $(1+\beta)$ étant la notation des « ordres parenthèse » de M. Borel (*Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 36). Dans le cas où β_n n'a pas de limite, on peut trouver de même, à l'aide des limites d'indétermination de β_n, deux nombres entre lesquels est compris l'ordre d'infinitude de f_n par rapport à φ_n.

De là l'auteur passe à l'étude des fonctions d'une variable continue x. Il pose ici

$$\Delta f = f(x+h) - f(x),$$

h étant une quantité constante par rapport à x, et il compare encore, pour x infini, les rapports

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta f(x)}{\Delta\varphi(x)} : \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Les résultats obtenus sont analogues à ceux qui concernaient les fonctions f_n, φ_n d'une variable discrète x_n.

En faisant ensuite sur les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ les hypothèses de continuité et de dérivabilité requises pour la validité de la règle de L'Hôpital, l'auteur démontre diverses propositions parmi lesquelles nous citerons la suivante :

Si la fonction $\varphi(x)$ est toujours croissante pour x suffisamment grand et si elle devient infinie avec x, l'ordre d'infinitude (*au sens de Cauchy*)

de la fonction f par rapport à φ est égal à la limite du double rapport $\frac{f'}{\varphi'} : \frac{f}{\varphi}$, lorsque cette limite existe.

En prenant pour $\varphi(x)$ successivement les fonctions x et e^x, on obtient divers résultats connus relatifs à la croissance de certaines fonctions transcendantes, e^x, $\Gamma(x)$, x^x par exemple.

Le Mémoire se termine par la démonstration de diverses propositions relatives à la relation

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = \lim_{x=\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}},$$

laquelle est valable sous certaines hypothèses spécifiées par l'auteur. Si l'on suppose seulement l'existence de la première limite, on a ainsi la proposition de Cauchy bien connue; mais l'égalité des deux limites est encore vraie, sous certaines conditions, lorsque c'est l'existence de la seconde limite que l'on postule.

Cigala (A.-R.). — Sur un critère d'instabilité (67-78).

Ce travail complète en un point le Mémoire de M. Levi-Civita, *Sur quelques critères d'instabilité* (*Annali*, série III, t. V). Il s'agit ici d'une substitution réelle à deux variables admettant l'origine pour point double, dans le cas où les *multiplicateurs* relatifs à l'origine ont un module égal à 1 et un argument quelconque θ. La substitution se ramène alors à la forme

$$x_1 = x\cos\theta - y\sin\theta + \ldots,$$
$$y_1 = x\sin\theta + y\cos\theta + \ldots.$$

M. Levi-Civita avait étudié le cas où θ est commensurable avec 2π. M. Cigala envisage ici le cas où θ est incommensurable avec 2π. La stabilité, ou l'instabilité, de la substitution dépend d'une certaine suite illimitée de quantités γ_ν, fonctions des coefficients de la substitution jusqu'à un degré qui augmente indéfiniment avec ν. Si une seule de ces quantités γ_ν est différente de zéro, il y a *instabilité*, de sorte que l'instabilité est encore ici le cas général. Mais si les γ_ν sont nuls quel que soit ν, la méthode ne permet plus d'énoncer de résultat général relativement à la stabilité ou à l'instabilité de la substitution et la question reste en suspens.

Lerch (M.). — Sur quelques applications des sommes de Gauss (79-91).

Les sommes de Gauss sont les sommes

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{2\alpha^2 m\pi i}{n}},$$

où n est un nombre entier impair et positif, m un entier premier avec n. Appli-

cation de l'expression connue de ces sommes à l'évaluation de l'expression

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} E^\star\left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right),$$

où $E^\star(x)$ est la fonction qui, pour x fractionnaire, est égale au plus grand entier $E(x)$ contenu dans x, et pour x entier se réduit à $E(x) - \frac{1}{2}$. Calcul de la somme des résidus quadratiques, du module n, premiers avec le module et différents entre eux.

Bianchi (*L.*). — Recherches sur les surfaces isothermiques et sur la déformation des quadriques (93-157).

M. Darboux a donné (*C. R. Acad. Sc.*, t. CXXVIII) une méthode de transformation faisant correspondre à chaque surface isothermique une infinité d'autres surfaces isothermiques en représentation conforme avec la première. Le système différentiel qui définit ces transformations D_m dépend d'une constante arbitraire m et, pour chaque valeur de m, il y a une triple infinité de transformations D_m faisant correspondre à toute surface isothermique S une triple infinité de nouvelles surfaces isothermiques. L'auteur étudie d'abord les relations entre les transformations D_m et la transformation de Christoffel qui fait correspondre aussi à la surface isothermique S une nouvelle surface isothermique. Mais le but principal de M. Bianchi est de démontrer le *théorème de permutabilité* suivant, analogue au théorème qui porte le même nom dans la théorie des surfaces à courbure constante :

Soient D_{m_1}, D_{m_2} *deux transformations de Darboux faisant correspondre à la surface isothermique* S *deux nouvelles surfaces isothermiques* S_1, S_2. *Il existe une quatrième surface isothermique* S′ *qu'on peut déterminer en termes finis et qui résulte des deux mêmes surfaces* S_1, S_2 *à l'aide de deux transformations de Darboux* D'_{m_2}, D'_{m_1}. *Cette surface* S′ *est différente de* S, *si l'on a* $m_1 \neq m_2$ *et coïncide avec* S *si* $m_1 = m_2$.

Les conséquences de ce théorème sont les mêmes que celles du théorème de permutabilité de la théorie des surfaces à courbure constante.

M. Bianchi considère ensuite plus particulièrement les surfaces isothermiques *spéciales :* il appelle ainsi celles que M. Darboux a introduites dans l'étude de la déformation des quadriques (*C. R. Acad. Sc.*, t. CXXVIII, p. 1483); la quadrique *associée* à chacune de ces surfaces dépend de quatre constantes A, B, C, D et la surface isothermique est dite alors appartenir à la classe (A, B, C, D). M. Bianchi démontre que, parmi les transformées de Darboux d'une surface isothermique spéciale de la classe (A, B, C, D), il existe ∞^3 surfaces isothermiques spéciales de la même classe. Dans l'énoncé du théorème de permutabilité, on peut donc supposer que S, S_1, S_2 sont trois surfaces isothermiques spéciales de la même classe : l'auteur démontre que la quatrième surface, S′, est alors une surface *spéciale* de cette même classe.

En passant des surfaces isothermiques spéciales aux surfaces applicables sur la quadrique associée, on déduit de là une méthode de transformation des sur-

faces applicables sur les quadriques permettant de déduire d'une surface de cette espèce d'autres surfaces de la même espèce.

Fubini (*G.*). — Sur la théorie des groupes discontinus (159-186).

L'auteur étudie les groupes projectifs discontinus *à un nombre quelconque de variables;* il retrouve, comme cas particuliers et sous un point de vue uniforme, les résultats fondamentaux de Poincaré pour le cas d'une variable, de M. Klein pour les substitutions unimodulaires à deux ou trois variables, enfin les résultats qu'il a obtenus lui-même dans un travail antérieur sur les groupes discontinus qui laissent invariant un système de formes quadratiques ou de formes d'Hermite. L'objet principal du Mémoire est de donner les conditions que doit remplir un groupe donné pour qu'il soit discontinu et de définir les régions où il est *proprement* discontinu.

En même temps que les groupes projectifs discontinus, M. Fubini étudie les groupes discontinus de mouvements pour un espace admettant un groupe continu de mouvements et dont le ds^2 est, soit une forme différentielle quadratique positive, soit plus généralement la racine d'indice m d'une forme différentielle positive de degré $2m$. Enfin l'auteur donne quelques brèves indications sur la possibilité d'appliquer ses résultats et sa méthode, d'une part à la construction de fonctions automorphes correspondant à des groupes linéaires discontinus à un nombre quelconque de variables, d'autre part à la théorie de l'équivalence des formes algébriques entières à coefficients entiers dans un corps algébrique quelconque.

Fréchet (*M.*). — Sur une extension de la méthode de Jacobi-Hamilton (187-199) [en français].

Extension aux intégrales multiples des travaux de Jacobi et de Hamilton sur les équations qui expriment que la variation première d'une intégrale simple est nulle. Le cas envisagé par l'auteur est le cas général d'une intégrale multiple étendue à une multiplicité S_r à r paramètres prise dans l'espace à n dimensions. M. Fréchet forme les équations des *extrémales*, en appelant ainsi toute multiplicité S_r pour laquelle la variation de l'intégrale est nulle, lorsque la multiplicité S_{r-1} qui limite S_r demeure fixe. On peut donner au système qui définit les extrémales une forme canonique analogue à celle du système canonique d'Hamilton (lequel correspond à $r=1$). Soit maintenant S_r une extrémale assujettie à passer par une multiplicité Σ_{r-1} arbitraire et à être *transversale* (au sens adopté dans le calcul des variations) à une multiplicité fixe à r dimensions. A chaque position de Σ_{r-1} correspond une valeur $U_{\Sigma_{r-1}}$ de l'intégrale : $U_{\Sigma_{r-1}}$ est donc une *fonction d'hyperespace* au sens de M. Volterra. Les équations analogues à l'équation aux dérivées partielles de Jacobi (relative à $r=1$) sont ici des équations contenant les *dérivées fonctionnelles* de $U_{\Sigma_{r-1}}$. L'auteur étend au cas actuel les résultats de Jacobi : l'intégrale complète employée par Jacobi pour l'intégration des équations canoniques n'est plus une fonction de n variables, mais une *fonction d'hyperespace :* c'est un des cas où

la considération de ces fonctions est imposée par la nature même du problème.

Calapso (*P.*). — Sur quelques surfaces de Guichard et les transformations de ces surfaces (201-251).

L'auteur appelle *surfaces de Guichard* ou *surfaces* N, celles pour lesquelles M. Guichard a donné la propriété caractéristique suivante : il existe une surface N' ayant même image sphérique de ses lignes de courbure que la surface N et telle que si r_1, r_2 sont les rayons de courbure principaux de N et r'_1, r'_2 les rayons correspondants de N', on ait

$$r_1 r'_2 + r_2 r'_1 = \text{const.},$$

la constante n'étant pas nulle.

M. Calapso démontre que, par inversion, on peut faire correspondre à toute surface N de Guichard une nouvelle surface N avec trois constantes arbitraires.

M. Guichard a donné des transformations G permettant de déduire de toute surface N une infinité de surfaces isothermiques dépendant d'une constante. L'auteur démontre que, réciproquement, toute surface isothermique peut être transformée en une surface N par une certaine transformation G^{-1}. Il désigne ensuite par $\overline{G}$ et $\overline{G}^{-1}$ les transformations conjuguées de G et de G^{-1}, obtenues en changeant i en $-i$ dans les formules qui définissent G et G^{-1} et il étudie la composition des transformations G et $\overline{G}^{-1}$, d'où il tire une méthode de transformation permettant de faire correspondre à toute surface N une nouvelle surface N avec trois constantes arbitraires. Le même procédé fournit une méthode de transformation des surfaces isothermiques, qui n'est autre que la méthode de transformation de M. Darboux, étudiée par M. Bianchi dans le Mémoire analysé plus haut.

Cipolla (*M.*). — Extension des formules de Meissel-Rogel et de Torelli sur la somme des nombres premiers qui ne dépassent pas un nombre donné (253-267).

Les formules de Meissel et de Rogel permettent de calculer la somme des nombres premiers non supérieurs à n lorsqu'on connaît seulement les nombres premiers non supérieurs à $\sqrt{n}$. L'auteur résout des problèmes plus généraux de la nature du suivant : « Trouver la somme des valeurs prises par une fonction numérique $f(x)$ lorsque x reçoit les valeurs égales aux nombres premiers non supérieurs à n, connaissant les nombres premiers non supérieurs à $\sqrt{n}$. »

Lauricella (*G.*). — Sur l'intégration des équations de l'équilibre des corps élastiques isotropes (269-283).

Dans ce Mémoire, M. Lauricella démontre l'existence des intégrales régulières des équations de l'équilibre des corps élastiques isotropes, quand on donne

sur la surface du corps considéré les composantes des déplacements. Sa démonstration est valable pour tous les domaines convexes bornés auxquels s'applique la méthode de Neumann relative au problème de Dirichlet; cette hypothèse est, en effet, celle qu'a adoptée M. Liapounoff (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. IV) pour établir certains résultats relatifs au problème de Dirichlet sur lesquels s'appuie l'auteur dans le Mémoire actuel.

En se servant de ces résultats et en introduisant la fonction de Green supposée connue pour le corps donné S, M. Lauricella ramène la solution du problème à la détermination de trois fonctions u, v, w, *nulles sur la surface* σ *du corps* et vérifiant en tout point de l'intérieur S du corps les équations

$$\Delta^2 u + k\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\partial\theta_0}{\partial x}, \qquad \Delta^2 v + k\frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{\partial\theta_0}{\partial y}, \qquad \Delta^2 w + k\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\partial\theta_0}{\partial z},$$

où l'on a posé comme d'habitude

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

et où θ_0 est une fonction harmonique connue.

Le problème est résolu par une méthode d'approximations successives conduisant pour θ à une série entière en k, absolument et uniformément convergente à l'intérieur de S *lorsque* k *reçoit une valeur* k' *comprise entre* o *et* $\frac{1}{3}$: on peut en déduire les valeurs de u, v, w exprimées par des intégrales étendues à σ et dans lesquelles figurent θ et la fonction de Green. L'auteur montre qu'on peut passer de là à une valeur de k de la forme $k_1 + k'$, où k_1 est aussi une constante comprise entre o et $\frac{1}{3}$, puis en général à la valeur $nk_1 + k'$, chaque valeur de n fournissant une solution d'où l'on part pour trouver, par de nouvelles approximations successives, la solution correspondant à la valeur suivante $(n+1)k_1 + k'$ de la constante k : en définitive, l'existence de la solution est donc établie *pour toute valeur positive de* k.

Dini (*U.*). — Études sur les équations différentielles linéaires (285-335).

Ce Mémoire fait suite aux recherches publiées dans les Tomes II et III de la série III des *Annali*, et dans lesquelles M. Dini a donné pour l'étude des intégrales des équations différentielles linéaires une formule qui n'est autre qu'une *équation intégrale de seconde espèce* (suivant la dénomination adoptée par M. Hilbert). Il applique ici la méthode exposée dans ces deux Mémoires à l'étude d'une équation différentielle linéaire

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

dans laquelle les coefficients a_0, a_1, ..., a_n sont des fonctions de x intégrables dans l'intervalle a, b; il suppose que a_0 s'annule pour une valeur $x = \alpha$ de l'intervalle a, b et que l'on puisse écrire

$$a_0(x) = (x - \alpha)^{r}\theta_0(x).$$

$\theta_0(x)$ étant une fonction de x finie, continue, et différente de zéro au point α, ayant dans l'intervalle a, b des dérivées jusqu'à l'ordre n au moins; a_h sera alors supposé de la forme

$$a_h(x) = (x-\alpha)^h \theta_h(x),$$

θ_h étant une fonction continue, dérivable au moins jusqu'à l'ordre $n-h$. M. Dini cherche à quelles conditions l'équation différentielle admet alors des intégrales régulières dans tout l'intervalle a, b, y compris le point α pour lequel a_0 s'annule, c'est-à-dire des intégrales qui, dans tout l'intervalle a, b, sont finies, continues et dérivables jusqu'à un certain ordre. Les hypothèses ainsi faites sont moins restrictives que celles de la théorie classique de Fuchs, car dans cette dernière théorie on suppose les coefficients a_0, a_1, a_2, ..., a_n analytiques. Les résultats généraux établis par M. Dini à ce sujet sont ensuite appliqués plus particulièrement aux équations différentielles linéaires du deuxième ou du troisième ordre.

Serie III, Tome XII, 1906.

Almansi (*E.*). — Sur l'une des expériences de Plateau (1-17).

Étant donnée une goutte d'huile immergée dans un liquide d'égale densité et qui s'appuie sur deux disques circulaires horizontaux, d'égal rayon R, ayant leurs centres sur une même verticale, on sait que l'une des figures d'équilibre de la goutte est le cylindre vertical ayant pour bases les deux cercles. Plateau a remarqué que l'équilibre est stable ou instable, suivant que la hauteur H du cylindre est inférieure ou supérieure à 2πR. M. Almansi établit cette proposition en démontrant que l'aire de la surface cylindrique considérée σ est minima relativement aux aires des surfaces σ' infiniment voisines de σ, passant par les mêmes bases et limitant avec les bases le même volume que σ, *pourvu que* H *soit inférieur à* 2πR. Dans le cas contraire, il existe des surfaces σ' ayant une aire inférieure à l'aire de σ.

L'auteur examine ensuite les déformations pour lesquelles c'est non seulement la surface de séparation de la colonne d'huile avec le liquide environnant qui varie, mais aussi la surface des disques horizontaux.

M. Almansi tire de son étude la conclusion que, s'il y a équilibre pour une colonne cylindrique d'un liquide L immergé dans un liquide L', l'équilibre ne subsiste pas lorsqu'on intervertit le rôle des deux liquides en considérant une colonne du liquide L' immergé dans le liquide L.

Bianchi (*L.*). — Compléments aux recherches sur les surfaces isothermiques (19-54).

Ce Mémoire complète celui qui a été publié par l'auteur dans le Tome précédent des *Annali*. Les notations étant les mêmes que précédemment, soit S une surface isothermique, S_1 sa transformée par une transformation D_m de Darboux. M. Bianchi montre que ce couple (S, S_1) de surfaces détermine, sous forme *intrinsèque*, un autre couple $(\Sigma, \overline{\Sigma})$ de surfaces isothermiques transformées l'une de l'autre par la transformation C de Christoffel. Soit T_m la transformation qui permet de passer du premier couple au second : par la transformation T_m, la transformation D_m est ainsi transformée en C.

Si, en particulier, les surfaces (S, S_1) sont deux surfaces isothermiques spéciales de la même classe, les surfaces (Σ, $\overline{\Sigma}$) qu'on en déduit sont aussi deux surfaces isothermiques spéciales, mais elles appartiennent à une nouvelle classe. Il résulte de là que la transformation T_m permet de passer des surfaces applicables sur une quadrique aux surfaces applicables sur une seconde quadrique. Un cas particulier est celui où S, S_1 sont deux surfaces parallèles à courbure moyenne constante, cas où la transformation T_m devient la transformation de Hazzidakis étudiée par M. Bianchi dans ses *Lezioni di Geometria differenziale.*

La détermination du couple (Σ, $\overline{\Sigma}$) en termes finis à partir du couple (S, S_1) exige en général l'intégration d'une équation de Riccati. M. Bianchi examine un cas particulier où la détermination du couple (Σ, $\overline{\Sigma}$) n'exige que des quadratures : c'est le cas où S, S_1 sont deux surfaces à courbure moyenne constante, formant les deux nappes d'une enveloppe de sphères ayant leurs centres sur la déformée d'une quadrique de révolution (théorème de M. Guichard). M. Bianchi démontre alors, en se servant des théorèmes de M. Guichard, que, connaissant une surface applicable sur une quadrique de révolution, on peut en déduire, par des quadratures, ∞^2 nouvelles surfaces applicables sur la même quadrique et que le même procédé peut se poursuivre indéfiniment.

La fin du Mémoire est consacré à une généralisation des transformations T_m qui se rattache à l'étude des transformations de M. Darboux étendues à l'espace elliptique ou hyperbolique. M. Bianchi étend à ces derniers espaces la théorie des transformations des surfaces isothermiques développée précédemment dans l'espace euclidien.

Severi (F.). — Le théorème d'Abel sur les surfaces algébriques (55-79).

Lorsque, sur une surface algébrique, on considère les intégrales de différentielles totales (ou intégrales de Picard) comme les analogues des intégrales abéliennes relatives à une courbe algébrique plane, l'analogue du genre de la courbe plane est sur la surface la différence $p_g - p_a$ entre le *genre géométrique* et le *genre arithmétique;* ce nombre $p_g - p_a$ est l'*irrégularité* de la surface.

Le théorème d'Abel, pour une surface d'irrégularité $p_g - p_a$, est alors l'analogue du théorème d'Abel relatif à une courbe de genre p, et, de même que ce dernier exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système continu de points de la courbe appartienne à une série linéaire, le théorème d'Abel, pour une pareille surface, va fournir la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système continu de courbes algébriques tracées sur la surface soit contenu totalement dans un système linéaire. M. Severi trouve cette condition sous la forme suivante :

Soient $I_1, I_2, \ldots, I_q$ *les intégrales simples de première espèce indépendantes relatives à une surface algébrique et soient* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *les points communs à deux courbes algébriques tracées sur la surface, variant d'une façon continue et appartenant à une même série algébrique* S. *Pour que cette série* S *soit contenue dans un système linéaire, il faut et il suffit que les sommes*

$$I_h(x_1) + I_h(x_2) + \ldots + I_h(x_n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, q)$$

demeurent constantes.

C'est là le *premier théorème d'Abel*.

M. Severi donne à l'énoncé de ce théorème diverses autres formes utiles dans les applications. Il en déduit une nouvelle démonstration de la proposition suivante :

Une surfaee algébrique de genre géométrique p_g *et de genre arithmétique* p_a *possède* $p_g - p_a$ *intégrales simples de première espèce et* $2(p_g - p_a)$ *intégrales de seconde espèce.*

La démonstration de cette proposition avait été obtenue d'abord par M. Castelnuovo à la suite des recherches de divers autres auteurs, dont M. Severi donne un aperçu et dont cette proposition est l'aboutissant final.

Dans la suite du Mémoire, M. Severi donne une proposition qu'il appelle le *second théorème d'Abel* et qui est relative non plus à des systèmes de courbes, mais à des groupes de points pris sur la surface. Une série algébrique ∞^{2r} de groupes de n points sur une surface algébrique F, tels que r points quelconques de F appartiennent à un seul de ces groupes, s'appelle une *involution de degré n et d'espèce* $2r$. Une involution est dite *régulière* si la variété algébrique V_{2r} dont les points représentent les groupes de l'involution n'admet pas d'intégrales de différentielles totales finies. Le second théorème d'Abel est alors le suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une involution de degré n soit régulière est que la somme des valeurs prises par l'une quelconque des intégrales simples de première espèce pour les divers points d'un groupe de l'involution demeure constante lorsque ce groupe varie d'une façon continue.

Burgatti (*P.*). — Sur les intégrales premières des équations du mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe (81-100).

Soient p, q, r les composantes de la rotation par rapport aux axes de l'ellipsoïde d'inertie et a, b, c les cosinus des angles de ces axes avec la verticale. L'auteur cherche, parmi les intégrales premières

$$f(p, q, r, a, b, c) = \text{const.}$$

des équations du mouvement, toutes celles qui dépendent au plus de cinq des six arguments a, b, c, p, q, r. La conclusion est que, en dehors des cas classiques de Lagrange et de Sophie Kowalewski, il n'existe pas d'intégrales premières (algébriques ou non) dépendant au plus de cinq arguments.

L'auteur considère ensuite tous les mouvements pour lesquels on a

$$Aap + Bbq + Ccr = 0 \tag{1}$$

(A, B, C, moments d'inertie) et, parmi les intégrales premières des équations du mouvement pour ces mouvements-là, il détermine toutes celles qui dépendent de quatre arguments au plus. Il retrouve ainsi, outre le cas de Lagrange, un cas déjà envisagé par MM. Goriatchoff et Tchapliguine.

Nielsen (*N.*). — Sur les séries de fonctions de Stirling (101-112) [en français].

L'auteur a défini, dans deux Mémoires parus au Tome X des *Annali*, les polynomes ψ_n de Stirling et d'autres polynomes analogues χ_n. Il étudie ici les relations entre ces polynomes et les polynomes de Bernoulli, puis il donne des résultats relatifs aux valeurs de ψ_n et de χ_n pour n très grand; enfin, il étudie les séries de polynomes ψ_n, χ_n à coefficients constants. Ces séries de polynomes présentent des analogies avec les séries de factorielles : par exemple, leur domaine de convergence absolue est un demi-plan limité par une droite perpendiculaire à l'axe des nombres réels.

Eisenhart (*E.-P.*). — Surfaces analogues aux surfaces de Bianchi (113-143) [en anglais].

Dans ce travail, M. Eisenhart étudie une catégorie étendue de surfaces A, possédant la même représentation sphérique des lignes de courbure qu'une surface pseudosphérique. Il retrouve comme cas particulier les surfaces de Bianchi (*Annali*, série II, t. XXIV) et il étend aux surfaces A les plus générales les diverses propriétés de ces dernières surfaces.

Maillet (*E.*). — Sur les équations indéterminées $x^\lambda + y^\lambda = cz^\lambda$ (145-178) [en français].

Ce Mémoire fait suite à deux travaux que l'auteur a publiés sur le même sujet dans d'autres recueils. M. Maillet indique des catégories de valeurs de λ et de μ pour lesquelles l'équation $x^\lambda + y^\lambda = r^\mu z^\lambda$ est impossible en nombres entiers réels non nuls pour une infinité de valeurs du nombre premier r. Il démontre ensuite l'impossibilité de résoudre dans les mêmes conditions des équations de la forme

$$x^a + y^a = bz^a,$$

et cela pour une série de valeurs de a et b ayant en commun un facteur supérieur à 2. En particulier, si $b = a$ et $a > 2$, l'auteur démontre que l'équation précédente est impossible en nombres entiers réels pour des catégories très étendues de valeurs de a et il en induit que, *vraisemblablement*, cette équation est impossible pour toutes les valeurs de a supérieures à 2.

Dini (*U.*). — Études sur les équations différentielles linéaires. Intégrales normales de ces équations (179-262).

Dans ce Mémoire, M. Dini poursuit les conséquences de la méthode et des formules générales qu'il a données pour l'étude des équations différentielles linéaires dans trois Mémoires successifs parus dans les Tomes II, III et XI des *Annali*. Il envisage ici une équation différentielle linéaire

$$(1) \qquad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = X,$$

dans laquelle les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et X sont des fonctions de la variable x supposée réelle et dépendent en outre d'un paramètre variable z : on suppose que, pour chaque valeur de x comprise entre a et b, les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et la fonction X sont des fonctions holomorphes de z dans

un champ C et que, pour chaque valeur de z prise dans C, ce sont des fonctions régulières de x : le coefficient a_0 est supposé indépendant de z. M. Dini étudie alors les intégrales de l'équation (1) considérées comme des fonctions de z. Si le coefficient a_0 ne s'annule pas dans l'intervalle a, b, les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions holomorphes de z dans le champ C pour toutes les valeurs de x prises dans l'intervalle a, b.

L'auteur suppose ensuite, plus particulièrement, que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et X sont des polynomes en z, ou des polynomes par rapport à une fonction $\varphi(z)$, avec des coefficients fonctions régulières de x. Sous certaines hypothèses, les intégrales peuvent alors être développées en séries de polynomes en $\varphi(z)$ et la méthode de M. Dini permet d'obtenir ces développements. Les résultats obtenus sont appliqués ensuite aux équations de la forme

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = \mathrm{X},$$

où a_0, a_1 ne dépendent que de x et où a_2 est de la forme

$$a_2 = g\varphi(z) + l,$$

g et l étant des fonctions de x seulement. En particulier, soit l'équation

$$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + z(z+1)\, y = 0,$$

qui, pour $z = n$ et pour $z = -(n+1)$, définit les fonctions X_n de Legendre. La méthode de M. Dini fournit l'intégrale générale de cette équation sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de $\frac{z(z+1)}{2}$.

L'auteur étend ensuite aux équations linéaires d'ordre quelconque dépendant toujours d'un paramètre z, les résultats obtenus par Sturm pour les équations du second ordre et complétés plus récemment par M Kneser et par M. Stekloff. Étendant le sens d'une dénomination introduite pour les équations du second ordre, il appelle *intégrales normales* de l'équation les intégrales y qui, pour $x = a$ et pour $x = b$, vérifient des conditions aux limites données, linéaires et homogènes par rapport aux valeurs de l'intégrale et de ses $n-1$ premières dérivées en ces points. M. Dini démontre diverses propositions relativement à l'existence et au nombre de ces intégrales normales linéairement indépendantes, soit pour les équations linéaires et homogènes, soit pour les équations avec second membre. Il étudie ensuite les intégrales normales considérées comme fonctions du paramètre z. Sous certaines hypothèses, on peut obtenir des intégrales normales qui sont fonctions entières de z et, dans tous les cas, des intégrales normales qui sont des fonctions uniformes de z admettant comme seules singularités des pôles à distance finie. Les résultats obtenus sont ensuite appliqués plus particulièrement aux équations linéaires d'ordre 2, 3 ou 4.

Bianchi (*L.*). — Théorie des transformations des surfaces applicables sur les paraboloïdes (263-345).

Dans le Tome IX des *Annali*, M. Bianchi a montré comment on pouvait obtenir, par de simples quadratures, les *éléments intrinsèques* d'une infinité de surfaces applicables sur un paraboloïde quelconque. Dans le Mémoire actuel, il se propose d'obtenir les surfaces elles-mêmes et de donner l'interprétation géo-

métrique de la méthode de transformation ainsi introduite : il parvient à établir, pour les déformées des paraboloïdes, une théorie entièrement analogue à celle des transformations des surfaces pseudosphériques.

M. Bianchi démontre le théorème suivant, sur lequel repose toute la théorie :

Toute surface S *applicable sur un paraboloïde elliptique ou hyperbolique est la première nappe de la surface focale d'une double infinité de congruences de droites* W (*congruences pour lesquelles les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale*) *dont la seconde nappe* S_1 *de la surface focale est applicable sur le même paraboloïde.*

Les opérations analytiques à effectuer pour trouver les ∞^2 surfaces S_1 transformées d'une surface S donnée consistent en des quadratures et en l'intégration d'une équation de Riccati dont les coefficients contiennent une première constante arbitraire σ : les transformations correspondant à une même valeur de σ seront désignées par B_σ ; elles dépendent d'une nouvelle constante arbitraire introduite par l'intégration.

A tout point M de S correspond, sur chaque surface S_1, un point M_1 situé dans le plan tangent en M à S. Le lieu de ces points M_1, pour la famille de transformations B_σ, est une conique à centre qui demeure invariable dans le plan tangent quand la surface S se déforme en entraînant ses plans tangents, ce qui établit une analogie entre les transformations considérées et les transformations de Bäcklund des surfaces pseudosphériques. Une autre analogie résulte du *théorème de permutabilité* suivant :

Si, de la surface S *applicable sur le paraboloïde, on déduit les deux nouvelles surfaces* S_1, S_2 *applicables sur* L, *à l'aide respectivement des transformations* B_{σ_1}, B_{σ_2} ($\sigma_1 \neq \sigma_2$), *il existe une quatrième surface* S′, *applicable sur* S, *qu'on peut déterminer en termes finis et qui est liée à* S_1 *par une transformation* B′ *et à* S_2 *par une transformation* B'_{σ_1}.

De ce théorème il résulte qu'après avoir intégré une première équation de Riccati, ce qui donne ∞^2 surfaces applicables sur S, on peut appliquer indéfiniment le même procédé de transformation aux surfaces ainsi obtenues, sans d'autres calculs que des dérivations.

M. Bianchi établit ensuite la distinction entre les déformations *propres* faisant correspondre à la région réelle de S une région réelle de S_1 et les déformations impropres faisant correspondre à une région réelle de S une région imaginaire de S_1 (distinction introduite par Peterson dans l'étude de la déformation des quadriques). Il résulte de son étude que, pour le paraboloïde elliptique, il faut un nombre pair de transformations B_σ successives pour déduire d'une surface S une surface S_1 applicable sur S par une déformation *propre*.

Le début du Mémoire est consacré à l'étude des déformées d'un paraboloïde imaginaire particulier, tangent au cercle de l'infini, et ayant pour équation

$$(x+iy)^2 - z^2 = x - iy.$$

Les résultats énoncés précédemment se démontrent d'une façon particulièrement simple pour ce paraboloïde.

Fubini (*G.*). — Sur la construction des champs fondamentaux d'un groupe discontinu (347-352).

L'auteur a étudié, dans le volume précédent des *Annali*, des classes étendues de groupes discontinus qui peuvent être considérés comme des groupes de mouvements, sans transformations infinitésimales, dans un espace à métrique convenablement choisie. Il montre ici comment on peut définir les champs fondamentaux de ces groupes discontinus de mouvements.

S. LATTÈS.



RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO (1).

Tomo X, 1896.

Fano (*Gino*). — Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu transitif de transformations projectives en elles-mêmes (1-15).

— Sur les groupes continus de transformations crémoniennes du plan et sur certains groupes de transformations projectives (16-29).

M. Enriques a démontré que « tout groupe continu de transformations birationnelles du plan peut se réduire, par application d'une transformation de Crémona, á un groupe d'homographies, ou à un groupe de transformations quadratiques à deux points fixes, ou enfin à un groupe de Jonquières ».

L'Auteur en a déduit ailleurs (2) que « toute surface algébrique admettant un groupe continu transitif de transformations projectives en elle-même peut être rapportée birationnellement à un plan, à une quadrique de l'espace à 3 dimensions ou à un cône rationnel normal d'un espace à n dimensions, de façon que le groupe considéré donne lieu à un groupe d'homographies planes ou à un groupe de transformations projectives de l'espace, changeant en elle-même la quadrique ou le cône rationnel normal ».

Il donne, dans sa première Note, une démonstration directe de ce résultat, sans s'appuyer sur les recherches de M. Enriques, mais en appliquant un théorème général de Lie. Il en déduit, dans sa seconde Note, le théorème de M. Enriques. La méthode suivie par M. Gino Fano dans cette nouvelle démonstration, lui paraît pouvoir être utilisée pour des extensions aux espaces à 3 ou à n dimensions des recherches de M. Enriques.

Enriques (*Federigo*). — Une observation relative à la représentation paramétrique des courbes algébriques (30-35).

Soit une courbe C, $f(x, y) = 0$, admettant une représentation paramétrique algébrique de degré n; x et y s'expriment donc rationnellement en fonction

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVIII$_2$, 1914, p. 136-146 (t. VIII et IX, 1894 et 1895); puis t. XXXIX$_2$, 1915, p. 122 (t. XI, 1897).

(2) *Rend. dei Lincei*, 5e série, vol. IV, 1er semestre, p. 325.

d'une variable t et de X lié à t par l'équation

$$\varphi(X, t) = 0$$

du degré n en X. Une telle représentation définit, lorsque t varie, une série rationnelle de groupes de n points sur la courbe C et l'on peut supposer que les groupes de cette série correspondent biunivoquement aux valeurs du paramètre t. Si dès lors cette série est une involution linéaire, la représentation paramétrique de la courbe C sera simple. Sinon :

« Ou bien x et y sont des fonctions irrationnelles de degré n d'un paramètre τ qui est à son tour fonction rationnelle de t;

» Ou bien la courbe est transformable en une courbe d'ordre n, admettant donc une infinité de représentations paramétriques simples de degré n. »

Ce résultat est contenu dans le suivant que démontre M. Enriques :

« Sur une courbe algébrique une série rationnelle ∞^r de groupes de n points est linéaire ou contenue dans une série linéaire plus vaste g_n^s $(s > r)$. »

En appliquant ce résultat à une courbe hyperelliptique, l'Auteur retrouve une propriété connue des intégrales hyperelliptiques réductibles aux elliptiques.

M. Enriques étend enfin aux surfaces les résultats précédents.

Peano (*G.*). — Sur le pendule de longueur variable (36, 37).

Si un pendule de longueur variable, fixé en O, décrit en une oscillation la courbe ABC, les volumes engendrés par la révolution, autour de la verticale OB, des secteurs AOB et BOC sont égaux. Application à la balançoire.

Alagna (*R.*). — Les relations irréductibles entre les invariants d'une forme quelconque du huitième ordre (41-74).

Dans un précédent Mémoire ([1]), l'Auteur a déterminé les trois relations qui existent entre les invariants d'une forme quelconque du huitième ordre. Le procédé qu'il avait employé ne lui permettait pas de décider si les relations obtenues étaient ou non de degré minimum. A la suite de suggestions de M. Hammond, l'Auteur reprend cette question et détermine les relations irréductibles entre ces invariants.

Morera (*G.*). — Sur une formule de calcul intégral (75-80).

Si f est une fonction uniforme, finie et continue dans le volume S, où elle admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial r}$ intégrable, et si φ est une fonction uniforme, généralement continue, et finie, de la direction d'un rayon vecteur r issu d'un pôle extérieur à S, on a

$$\int\int\int \frac{\varphi}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} dS = \int\int \varphi f \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma;$$

([1]) *Rend. di Palermo*, t. VI, p. 77-79.

n étant la normale intérieure à la surface de S. Si le pôle est intérieur à S, il faudra ajouter un terme complémentaire

$$-f_0 \int\int \varphi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) d\sigma,$$

f_0 étant la valeur de f au pôle.

M. Morera applique ensuite cette formule à la transformation du potentiel interne d'un corps homogène dont les molécules se repoussent ou s'attirent avec une force centrale $\varphi(r)$; puis à la transformation du potentiel mutuel de deux corps homogènes.

Bagnera (*G.*). — Sur le lieu des points de contact triple des courbes d'un faisceau avec les courbes d'un réseau (81-106).

M. Bagnera forme d'abord l'équation de ce lieu; c'est une courbe Γ d'ordre

$$N = 6(n-1) + 3(m-1),$$

n étant l'ordre des courbes du faisceau et m l'ordre des courbes du réseau. Tout point M multiple d'une courbe du faisceau ou du réseau est en général point multiple de Γ. L'Auteur détermine la multiplicité de Γ et les tangentes à Γ en un tel point; il discute très complètement les différents cas possibles : en général, si en M passent deux courbes bases du faisceau avec les multiplicités s et t (t étant généralement nul) et trois courbes bases du réseau avec les multiplicités α, β, γ (γ étant généralement nul), Γ aura au moins la multiplicité

$$3(s+t-2) + \alpha + \beta + \gamma.$$

Les points d'intersections d'une courbe Φ du faisceau et de la courbe Γ sont les points bases du faisceau, les points multiples précédemment considérés et les points triples de la série linéaire à deux dimensions déterminée sur la courbe Φ par les courbes du réseau. L'Auteur examine d'abord le cas où la courbe Φ est de genre zéro, et démontre ensuite que, si elle est de genre p, chacun de ses points multiples abaisse le nombre des points triples de la série linéaire qu'y découpe le réseau, comme si ce point se trouvait sur une courbe de genre zéro y ayant même singularité par rapport au réseau.

Klein (*F.*). — Sur l'esprit arithmétique dans les Mathématiques (107-117).

Discours prononcé à la Société des Sciences de Göttinge le 2 novembre 1895, publié dans les *Göttingen Nachrichten*, 1895. Traduction italienne de M. S. Pincherle.

De Franchis (*Michele*). — Sur la courbe lieu des contacts d'ordre k des courbes d'un faisceau avec les courbes d'un système ∞^k (118-152).

Le sujet de ce Mémoire contient comme cas particulier celui du Mémoire de

M. Bagnera précédemment analysé; mais la méthode utilisée est ici purement synthétique et non analytique comme celle de M. Bagnera.

Soient d'abord deux faisceaux (C) et (Γ) de courbes d'ordres respectifs n et m, et une droite t. Les lieux des points de contact des tangentes issues d'un point P de la droite aux courbes des faisceaux sont deux courbes Φ_p et Ψ_p d'ordres respectifs $2n-1$ et $2m-1$. Quand le point P décrit la droite t, les deux courbes Φ_p et Ψ_p décrivent deux faisceaux et leurs points d'intersections décrivent la droite t et une courbe $\Omega^1_{C\Gamma}$ d'ordre $2n+2m-3$. $\Omega^1_{C\Gamma}$ est le lieu des points de contact du premier ordre des courbes des deux faisceaux (C) et (Γ).

L'Auteur examine l'allure de cette courbe $\Omega^1_{C\Gamma}$ en un point base de multiplicité quelconque pour les deux faisceaux. Il fait ensuite une étude analogue (analogue aussi, par conséquent, à celle qu'à faite M. Bagnera) sur les courbes lieu des contacts d'ordre k des courbes de deux systèmes ∞^1 et ∞^k.

Voici l'élégant procédé de génération de ces courbes qu'indique M. de Franchis : Généralisons d'abord la construction précédente de $\Omega^1_{C\Gamma}$. Soit le faisceau précédent (C) et un réseau [Γ] de courbes d'ordre m; soient Γ_1, Γ_2, Γ_3 trois courbes bases du réseau et Γ'_2 une courbe arbitraire du faisceau $(\Gamma_2\Gamma_3)$. Quand cette courbe varie, la courbe $\Omega^1_{(C)(\Gamma_1\Gamma'_2)}$, lieu des points de contact du premier ordre des courbes des faisceaux (C) et $(\Gamma_1\Gamma'_2)$ décrit un faisceau : on prouve aisément en effet qu'il passe une seule courbe $\Omega^1_{(C)(\Gamma_1\Gamma'_2)}$ par un point arbitraire du plan. Considérons alors un second faisceau (K), les points d'intersection des courbes

$$\Omega^1_{(C)(\Gamma_1\Gamma'_2)}, \qquad \Omega^1_{(K)(\Gamma_1\Gamma'_2)}$$

engendrent, en écartant des branches parasites, la courbe Ω^1_{CK}. La génération précédente de Ω^1_{CK} correspondait au cas où le réseau [Γ] était celui des droites du plan.

Soit alors le lieu des contacts du premier ordre des courbes des faisceaux (C) et $\Omega^1_{(C)(\Gamma_1\Gamma'_2)}$; il se décompose dans la courbe Γ_1 et la courbe $\Omega^2_{C\Gamma}$ lieu des contacts du second ordre des courbes du faisceau (C) et du réseau [Γ]. Cette courbe $\Omega^2_{C\Gamma}$ est celle qu'a étudiée M. Bagnera.

Plus généralement, envisageons le faisceau C et un système ∞^k linéaire, soit $[\Gamma]^k$ de courbes d'ordre m; soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{k+1}$, $k+1$ courbes bases de ce système, Γ'_k une courbe arbitraire du faisceau $(\Gamma_k\Gamma_{k+1})$; les courbes

$$\Omega^{k-1}_{(C)(\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{k-1}\Gamma'_k)}$$

[lieux des points de contact d'ordre $k-1$ des courbes du faisceau (C) et du système linéaire ∞^{k-1} $(\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{k-1}\Gamma'_k)$] décrivent, quand Γ'_k varie, un faisceau. Le lieu des points de contact simples des courbes de ce faisceau et du faisceau (C) se décompose en une courbe parasite et la courbe $\Omega^k_{C\Gamma}$ lieu des points de contact d'ordre k des courbes des systèmes (C) et $[\Gamma]^k$.

L'ordre de cette courbe, aisé à calculer après les considérations précédentes, est

$$(k+1)\frac{(2n-3)k+2m}{2}.$$

Brioschi (*F.*). — Sur un théorème de M. Hilbert (153-157).

Complément à un travail de M. Hilbert sur les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une forme binaire soit la puissance entière d'une autre (*Math. Ann.*, t. XXVII).

Gerbaldi (*F.*). — Un théorème sur les singularités de la jacobienne de quatre surfaces algébriques (158-160).

Il s'agit de l'étude de cette surface jacobienne au voisinage d'un point multiple des quatre surfaces.

Cordone (*G.*). — Sur une classe d'équations résolubles algébriquement (161-176).

On sait que, si une racine d'une équation algébrique irréductible (1) est fonction rationnelle d'une autre, toutes ces racines seront de forme

$$\begin{array}{lllll} x_1, & \theta(x_1), & \theta^2(x_1), & \ldots, & \theta^{m-1}(x_1), \\ x_2, & \theta(x_2), & \ldots\ldots, & \ldots, & \theta^{m-1}(x_2), \\ \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ x_n, & \theta(x_n), & \ldots\ldots, & \ldots, & \theta^{m-1}(x_n). \end{array}$$

La résolution de l'équation (1) peut alors se ramener à celle d'une équation (2) de degré n admettant pour solutions

$$\varphi_i = x_i + \theta(x_i) + \ldots + \theta^{m-1}(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si une racine de cette équation (2) est fonction rationnelle d'une autre

$$\varphi_\alpha = \text{Rat}\,\varphi_\beta,$$

on pourra ramener la résolution de l'équation (1) à celle d'une équation de degré encore inférieur, et ainsi de suite.

Quelles conditions doivent remplir les racines de l'équation (1) pour que cette dernière circonstance se produise ? C'est un problème qu'a traité M. Netto (*Théorie des substitutions*, § 176 et suivants) dans le cas particulier où de toute relation

$$\varphi_\beta = \text{Rat}\,\varphi_\alpha$$

on peut déduire

$$x_\beta = \text{Rat}_1\, x_\alpha.$$

L'Auteur traite complètement le même problème sans aucune hypothèse restrictive.

Burali-Forti (*C.*). — La méthode de Grassmann dans la Géométrie projective (177-195).

L' « Ausdehnungslehre » de Grassmann, qui s'applique aisément à l'étude des propriétés métriques des figures, peut aussi être utilisée pour l'étude des propriétés projectives. L'Auteur, partant non de l'œuvre de Grassmann, mais de

l'exposé simple qu'en a fait M. Peano sous le nom de *Calcul géométrique*, montre comment les « formes géométriques » peuvent servir à représenter le point, la droite et le plan projectifs et à construire sur ces éléments tous les systèmes projectifs.

La méthode de Grassmann, ainsi appliquée à l'étude des projectivités, reste apte à la résolution des problèmes métriques; elle réunit ainsi les avantages des deux méthodes fondamentales (analytique et synthétique) de la Géométrie.

Autonne (*Léon*). — Sur les pôles des fonctions uniformes de deux variables indépendantes (196-228) (en français).

Soient $N+1$ développements des puissances de x et y,

$$F_j(x, y) \qquad (j = 0, 1, \ldots, N)$$

holomorphes quand les x, y sont assez petits et tels que $F_j(0, 0) = 0$. Les équations

$$\rho\xi_j = F_j(x, y)$$

font correspondre à un point de coordonnées x et y non nulles un point image de coordonnées homogènes ξ_j. Quelle est l'image du point $\omega(x = y = 0)$? En d'autres termes, quelle est la limite du point ξ quand x, y tend vers ω suivant un certain chemin W ? Tel est le problème que traite M. Autonne.

Il reprend d'abord le problème de la résolution de l'équation implicite

$$F_j(x, y) = 0,$$

F_j étant holomorphe autour de ω. Pour l'étude des solutions y très petites avec x on peut remplacer F_j par

$$f_j(x, y) = y^m + P_{j,1}(x)y^{m-1} + \ldots + P_{j,m}(x),$$

polynome en y, fonction holomorphe en x. Les m solutions se groupent en *cycles* analogues à ceux que l'on rencontre dans la théorie des fonctions algébriques; l'équation d'un cycle étant

$$y = u\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

où u désigne une série des puissances de $x^{\frac{1}{n}}$ convergente autour de $x = 0$. L'Auteur indique comment on déterminera les coefficients de cette série.

Abordant alors le problème précédemment posé, il montre qu'on peut, sans restreindre la généralité, supposer le chemin W donné par la formule

$$y = \theta\left(x^{\frac{1}{\sigma}}\right),$$

θ étant un développement analogue à u. On peut aussi remplacer les F_j par les f_j. Résolvons alors l'équation (qui contient en particulier toutes les équations $f_j = 0$)

$$f = \Sigma g_j f_j = 0,$$

les g_j étant des constantes arbitraires. Soit $u\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$ un de ses cycles; il n'y aura

qu'un nombre fini des premiers termes de u indépendants des g_j. Soit $(\psi x^{\frac{1}{\delta}})$ leur somme, ψ est le « tronçon » du cycle considéré; le premier terme après le tronçon « terme caractéristique » peut s'écrire $Tx^{\frac{s}{\delta\Delta}}$, T dépendant des g_j, $\frac{s}{\Delta}$ étant l' « exposant caractéristique ». Réunissons enfin dans un même « mégacycle » M tous les cycles ayant même tronçon et même $\frac{s}{\Delta}$. A chaque mégacycle M correspond une courbe unicursale G_1 dite *fondamentale* dont le degré Q est le quotient par $\delta\Delta$ de la somme des ordres des cycles de M. L'image de ω est constituée par l'ensemble des fondamentales. Si x, y tend vers ω suivant le chemin

$$y = \psi(x^{\frac{1}{\delta}}) + \tau x^{\frac{s}{\delta\Delta}} + \ldots,$$

les ξ tendent vers un point de G_1 dont la position ne dépend que de τ. Si x, y tend vers ω suivant un chemin qui ne débute par aucun des tronçons, ξ tend vers un point fixe commun aux fondamentales.

Le problème posé est ainsi résolu. L'Auteur applique l'analyse précédente à la recherche du nombre des zéros confondus en ω communs à f et à une autre expression holomorphe $H(x, y)$. Dans cette recherche s'introduit la « courbe tronçon » du mégacycle, d'équation

$$\prod_{\alpha} \left[y - \psi(x^{\frac{1}{\delta}} k^{\alpha}) \right],$$

$\alpha = 0, 1, \ldots, \delta - 1$; k = racine primitive $\delta^{\text{ième}}$ de l'unité.

Étant donnée enfin une transformation de Cremona définie par le réseau

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0,$$

On sait que, si les courbes du réseau admettent en ω un point μ-uple ordinaire :

1° Il y a μ^2 points fixes du réseau confondus en ω;

2° L'image de ω est une courbe fondamentale;

3° Si une courbe A passe un certain nombre de fois en ω, sans autre singularité, sa transformée comprend, un certain nombre de fois, la fondamentale et son degré s'abaisse.

L'Auteur peut, grâce aux résultats précédents, indiquer ce que deviennent ces énoncés quand on ne fait plus aucune hypothèse restrictive sur l'allure en ω des courbes du réseau et de A : c'est ainsi, par exemple, que l'image de ω est constituée, non par une courbe fondamentale, mais par les fondamentales relatives aux différents mégacycles.

Burgatti (*Pietro*). — Sur la torsion géodésique des lignes tracées sur une surface (229-240).

La formule de Bonnet

$$\frac{1}{T_{cg}} = \frac{P\,du^2 + 2Q\,du\,dv + R\,dv^2}{\sqrt{EG - F^2}(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)},$$

donnant la torsion géodésique d'une ligne c tracée sur une surface prend la forme

$$(1) \qquad \frac{1}{T_{cg}} = \frac{\cos^2\theta}{T_{vg}} + \frac{\sin^2\theta}{T_{ug}} \qquad (T_{vg} = -T_{ug})$$

si les lignes coordonnées u et v sont bissectrices, en chaque point, des directions principales et si θ est l'angle des tangentes aux deux courbes v et c. Cette formule (1) est semblable à celle qu'a donnée Euler pour la courbure des sections normales; l'indicatrice des torsions sera une hyperbole équilatère.

La formule (1) permet à l'Auteur de généraliser des résultats connus de M. Enneper.

Le résultat que démontre directement M. Burgatti à la fin de son Mémoire (conditions nécessaires et suffisantes pour que les lignes coordonnées soient également inclinées sur les directions principales) se déduit immédiatement d'un résultat classique de M. Darboux.

Di Pirro (*G.*). — Sur les transformations des équations de la Dynamique (241-253).

Ce Mémoire vient compléter les résultats démontrés par M. di Pirro dans un travail précédent ([1]).

Il s'agit de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse, par la transformation

$$p_r = q_r, \qquad dt = \lambda(p_1, p_2, \ldots, p_n)\,dt_1,$$

passer du système d'équations de Lagrange

$$(S) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial p'_r}\right) - \frac{\partial S}{\partial p_r} = P_r, \qquad \frac{dp_r}{dt} = p'_r,$$

au système analogue

$$(S_1) \qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial S_1}{\partial q'_r}\right) - \frac{\partial S_1}{\partial q_r} = Q_r, \qquad \frac{dq_r}{dt} = q'_r$$

avec

$$S = \frac{1}{2}\Sigma_r a_r p'^2_r, \qquad S_1 = \frac{1}{2}\Sigma b_r q'^2_r,$$

les a_r, P_r et b_r, Q_r étant respectivement fonctions des p_r et des q_r.

On démontre qu'il faut que

$$Q_r = \lambda^2 \frac{b_r}{a_r} P_r,$$

$$\lambda = C(H_1 + h)\ldots(H_n + h)$$

([1]) *Rend. Circolo di Palermo*, t. IX, p. 169. Analysé dans ce *Bulletin*, t. XXXVIII, p. 144.

et

$$b_r = \frac{a_r}{\lambda(\Pi_r + h)},$$

les quantités $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$ étant des fonctions arbitraires des variables respectives $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Enfin on a, pour déterminer les a_r, les équations

$$(1) \qquad (\Pi_i - \Pi_s)\frac{\partial a_s}{\partial p_i} = a_s \frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i}.$$

Les valeurs de a_r que l'on en tire sont différentes suivant qu'on suppose tous les Π_i différents (c'est le cas qu'avait examiné précédemment M. di Pirro), ou certains des Π_i égaux, et égaux par conséquent à une constante : quelques-unes des équations (1) sont alors identiquement vérifiées. C'est ce dernier cas que traite M. di Pirro.

Comme dans son précédent Mémoire, M. di Pirro examine à quelle condition le fait que les P_r dérivent d'un potentiel entraînera que les Q_r dérivent aussi d'un potentiel.

JOSEPH PÉRÈS.



RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

Tome XIV, 1900 [1]. (1re Partie : *Memorie e Communicazioni.*)

Appell (P.). — Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau (1-6).

Imaginons un solide pesant qui remplisse les conditions suivantes :

1° Le solide est terminé par une arête vive ayant la forme d'un cercle K de centre H et de rayon a;

2° Le centre de gravité G du corps est situé sur l'axe de K, et l'on a $HG = c$;

3° L'ellipsoïde d'inertie relatif à G est de révolution autour de cet axe, les moments d'inertie classiques étant A et C.

Cela étant, M. P. Appell montre que l'étude du roulement du solide sur un plan horizontal revient à l'intégration de l'équation

$$(6) \qquad \frac{d^2 r}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{dr}{d\theta} + \frac{Ca}{Aa^2 + Cc^2 + AC}(c\cot\theta - a)r = 0,$$

où r et θ ont leurs significations usuelles. Dans le cas du cerceau, on a $c = 0$ et la substitution $\cos^2\theta = s$ ramène l'équation (6) à l'équation hypergéométrique.

---

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XL_2, p. 62-70.

Korteweg (*D.-J.*). — Extrait d'une lettre à M. Appell (7-8) (en français).

Or, indépendamment de M. Appell, M. Korteweg avait traité le même problème dans le *Nieuw Archief voor Wiskunde* (1); et il avait été conduit également aux fonctions hypergéométriques. En le rappelant, M. Korteweg indique une seconde forme que l'on peut donner à la solution; cette forme, qui fait intervenir des fonctions hypergéométriques de $1 \pm \cos\theta$, peut être plus avantageuse lorsque θ est voisin de 0 ou de π.

Pizzetti (*P.*). — Sur la correction à faire aux latitudes observées pour tenir compte de l'altitude des stations sur le niveau de la mer (9-15).

Pour réduire la latitude d'une station au niveau de la mer, il existe une formule correcte établie par Helmert; or, parfois, les astronomes emploient d'autres formules, équivalentes à la première au point de vue pratique, mais qui reposent sur des vues théoriques inexactes. Tel est le cas d'une hypothèse qui assimile les surfaces de niveau de l'attraction terrestre à des ellipsoïdes homothétiques. Dans sa Note, M. Pizzetti s'attache à réfuter cette théorie et à établir la formule de Helmert; à cet effet, il s'appuie sur une expression du potentiel de l'attraction terrestre qu'il avait publiée antérieurement (2).

Ciani (*E.*). — Un théorème sur le covariant S de la quartique plane (16-21).

Clebsch a appelé *covariant* S d'une quartique plane C le lieu des points dont les polaires cubiques sont équianharmoniques. On savait que si C est la quartique de Klein, d'équation

$$x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 = 0,$$

S coïncide avec C. Réciproquement, M. Ciani montre que ce cas est le seul où la coïncidence puisse avoir lieu.

Petrovitch (*M.*). — Sur l'expression du terme général des séries de Taylor représentant des combinaisons rationnelles de la fonction exponentielle (22-27) (en français).

M. Michel Petrovitch montre que si la série de Taylor

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots$$

représente une combinaison rationnelle R(u) de l'exponentielle $u = e^{x}$, α_n est

(1) 2e série, t. IV, juillet 1899.

(2) *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, 1er semestre 1894.

de la forme

$$\alpha_n = \frac{a^n}{n!} \sum_{p_i=1}^{\mu} \sum_{p=0}^{q_i} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} j^n b_{ip} k^p r_i^k,$$

où les quantités r_i, b_{ip} et les entiers μ et q_i ne dépendent que des pôles de $R(u)$.

Petrovitch (*M.*). — Sur une classe d'équations différentielles du premier ordre (28-32) (en français).

Moyennant certaines hypothèses très générales sur l'équation différentielle

$$\text{(1)} \qquad \frac{dy}{dx} = F x, f_1, \ldots, f_n), $$

où $f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions données de x, M. Petrovitch montre qu'à l'intérieur d'un intervalle $(x_0 - \gamma, x_0 + \gamma)$, qui peut être de longueur infinie, on peut resserrer l'intégrale de (1) entre deux fonctions bien déterminées, qu'on obtient par quadratures. L'auteur termine par des applications.

De Franchis (*M.*). — Les surfaces irrationnelles du quatrième ordre de genre géométrique superficiel nul (33-65).

Parmi les surfaces du quatrième ordre F_4, les plus simples, au point de vue de la théorie des fonctions algébriques de deux variables, sont d'abord les surfaces unicursales énumérées par M. Nœther, puis les surfaces à genre géométrique p_g nul. Le Mémoire de M. de Franchis a précisément pour objet l'énumération de ces dernières.

Depuis longtemps on connaissait des F_4 ayant $p_g = 0$: les surfaces réglées elliptiques F_4^{11} et F_4^{12}, ainsi qu'une surface F_4^{21}, trouvée par Kummer; le travail de M. de Franchis décèle trois surfaces nouvelles qui, avec les précédentes épuisent l'ensemble des F_4 de genre $p_g = 0$.

Voici les équations de ces surfaces :

$$\begin{aligned}
&F_4^{11} \quad x^2 f_2(z, t) + 2xy\,\varphi_2(z, t) + y^2\psi_2(z, t) &&= 0,\\
&F_4^{12} \quad x^2 t^2 + 2xt f_2(y, z, t) + [f_2^2 - \psi_4(z, t)] &&= 0,\\
&F_4^{21} \quad x^2 y^2 + 2xy f_2(z, t) + f_4(z, t) &&= 0,\\
&F_4^{22} \quad x^2 t^2 + 2xt f_2(y, z, t) + [f_2^2 - \psi_4(z, t)] &&= 0,\\
&F_4^{31} \quad y^2 t^2 + mxyzt + nx^2 z^2 + uz^3 t + vx^3 y &&= 0,\\
&F_4^{32} \quad z^2 t^2 + 3axyzt + 2y^3 t - rz^4 - aqxz^3\\
&\qquad\qquad - q y^2 z^2 - a^3 x^3 z - \frac{3}{4} a^2 x^2 y^2 &&= 0.
\end{aligned}$$

(L'indice qui affecte f, φ ou ψ désigne le degré de l'un de ces polynomes par rapport à l'ensemble des variables; ces polynomes, ainsi que les constantes m, n, u, v, a, r, q, ont été choisis au hasard; enfin, pour F_4^{12}, f_2 est seulement du premier degré en y.)

Or, le résultat précédent était inattendu : en effet, il résulte de l'analyse de

M. de Franchis que les F_4 en question possèdent des intégrales de différentielles totales de première espèce ; et, d'après une Note de M. Poincaré [1], confirmée par une brève indication du Traité de MM. Picard et Simart [2], toute surface du quatrième ordre jouissant de cette propriété devait coïncider avec F_4^{11} ou F_4^{21}. Indépendamment de l'auteur, et pendant l'impression de son Mémoire, M. A. Berry publiait une Note tendant à compléter les résultats de MM. Poincaré et Picard; mais l'énumération de M. Berry laissait échapper la surface F_4^{32}.

Résumons maintenant à grands traits la méthode de l'auteur. Tout d'abord, F_4 doit admettre au moins un point double O; écartons le cas des surfaces rationnelles et représentons F_4 sur un plan double Π en la projetant à partir de O ; nous trouverons que F_4 est un cône, ou est représentable sur un cône du troisième degré, ce qui justifie notre assertion relative aux différentielles de première espèce. De plus, nous pouvons supposer que F_4 est privée de courbe double, sinon on retomberait sur les surfaces connues F_4^{11} (réglée à deux droites doubles) et F_4^{12} (réglée à une droite double, lieu de tacnodes).

Cela étant, dans la représentation de F_4 sur Π, la courbe de diramation est nécessairement formée de quatre droites, concourantes en un point P, ou de trois coniques bitangentes en deux points A et B. Dans le premier cas, la droite OP coupe F_4 en un point double M ; supposons O et M distincts : ce sont des tacnodes et l'on retrouve F_4^{21}. Si M est confondu avec O, on obtient une surface nouvelle F_4^{22}, pourvue d'un point double infiniment voisin d'une droite double évanouissante sur laquelle se trouve un oscnode. Dans le second cas, si A et B sont distincts, on trouve une surface F_4^{31} pourvue deux points doubles uniplanaires, formés chacun par la fusion d'un point double et d'un tacnode ; et, si A et B sont confondus, on obtient une surface F_4^{32} possédant un point double infiniment voisin d'une singularité identique à celle de F_4^{22}. Les surfaces F_4^{31} et F_4^{32} ne peuvent d'ailleurs posséder aucune autre singularité ; quant à F_4^{21}, F_4^{22}, elles ne peuvent avoir, en plus de O et M, que 2 ou 1 points doubles nouveaux au maximum.

Puis l'auteur indique dans trois tableaux les singularités des surfaces, leurs équations et la nature des faisceaux elliptiques qu'elles contiennent. Enfin, pour chacune d'elles, il donne une transformation crémonienne qui la représente sur le cône du troisième ordre et permet d'étudier d'une façon détaillée cette correspondance.

Gerbaldi (F.). — Sur le groupe simple de 360 collinéations planes (66-114, seconde Partie).

Poursuivant [3] l'étude de G_{360}, M. Gerbaldi aborde maintenant différents problèmes d'Algèbre qui s'y rattachent. Multiplions les transformations de G_{360} par les substitutions

$$x'_i = \varepsilon^{\lambda} x_i \qquad (i = 1, 2, 3;\ 2\varepsilon = -1 + \sqrt{-3});$$

---

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. XCIX, p. 1145.

(2) *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, Paris, 1897, p. 136.

(3) *Rendic. del Circ. mat. di Palermo*, t. XII, p. [illegible], et t. XIII, p. [illegible].

nous obtiendrons ainsi un groupe G_{1080} pour lequel les deux formes

$$6A_1 = \sum_1^6 f_i^3 \quad \text{et} \quad 6A'_1 = \sum_1^6 f_i'^3$$

sont des invariants absolus. On a d'ailleurs $A_1 = cA'_1$; posons

$$A = \frac{A_1}{c+1};$$

la sextique $A = 0$ est la courbe d'ordre minimum qui reste invariante par G_{360}; elle passe par divers pôles des sous-groupes de G_{360}. Posons, de même,

$$F = \prod_1^6 f_i, \quad F' = \prod_1^6 f'_i, \quad H = 2F + 2F' - A^2;$$

l'auteur calcule les valeurs de ces différents invariants aux points remarquables de la configuration, puis il démontre l'identité

$$2c'F + 2cF' = A^2$$

en vertu de laquelle toutes les courbes du faisceau $H - \lambda A^2 = 0$ se touchent en 72 points qui sont des inflexions de $A = 0$. L'auteur introduit ensuite les invariants

$$6A_k = \sum_1^6 f_i^{3k},$$

puis les invariants, d'ordre 30, $-G$ et $-G'$, qui sont les sommes des produits 5 à 5 des f_i^3, et en outre l'invariant

$$J = 20(cG + c'G').$$

G, G′ et, plus généralement, tout invariant d'ordre pair de G_{1080} sont des fonctions entières de A, H et J; enfin, tout invariant d'ordre impair est égal au produit d'un invariant d'ordre pair par Δ, déterminant fonctionnel de A, H et J par rapport aux coordonnées x_1, x_2, x_3; Δ, d'ordre 45, est ainsi l'invariant d'ordre impair minimum.

Ceci posé, considérons le sous-groupe G_{60} engendré par S et Z; pour toutes les substitutions de G_{1080}, les invariants de degré minimum de G_{60} qui prennent seulement six valeurs sont de la forme $af_i^3 + bA$; soit alors un groupe de 60 points, transformé en lui-même par G_{60}, et non situé sur $A = 0$; posons

$$\overline{x_i} = \frac{f_i^3}{A} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

les $\overline{x_i}$ satisfont à une équation $\mathcal{E}_6$ dite *résolvante* du sixième degré et dont les coefficients dépendent rationnellement de c, c' et $\lambda = HA^{-2}$; si le groupe annule A, on lui ferait correspondre une résolvante analogue, du sixième degré également. Et maintenant, donnons-nous en un point quelconque M les valeurs de A, H, J, Δ; la résolution de l'équation $\mathcal{E}_6$ correspondante et des extractions

de radicaux permettront de trouver les coordonnées des 360 points du groupe associé à G_{360} auquel appartient M. Dans $\mathcal{C}_6$ permutons c et c'; nous obtiendrons une autre résolvante qui a avec la première de nombreuses relations; et, lorsque M est choisi d'une façon spéciale, $\mathcal{C}_6$ jouit de propriétés particulières que l'auteur examine en détail.

Puis il aborde les sous-groupes hessiens G_{36} engendrés par T et ZT^2Z^2; la forme

$$\xi = \varepsilon^2 f_1 f_2 f_3 + \varepsilon f_4 f_5 f_6$$

est un invariant pour l'un de ces sous-groupes, et G_{1080} lui fait acquérir 10 valeurs; on est ainsi conduit à une *résolvante* $\mathcal{C}_{10}$ du dixième degré; sa formation directe paraissant inabordable, l'auteur envisage des cubiques harmoniques invariantes par G_{36}; il obtient ainsi une résolvante $\mathcal{C}'_{10}$, du dixième degré, transformée de $\mathcal{C}_{10}$, et dépendant de deux paramètres λ et μ. M. Gerbaldi termine en étudiant les relations de $\mathcal{C}'_{10}$ et $\mathcal{C}_6$: la résolution de l'une d'elles entraîne celle de l'autre; de plus, les racines de $\mathcal{C}'_{10}$ s'expriment rationnellement en fonction de l'une d'entre elles.

Bucca (*F.*). — Études d'Analyse (115-141).

Quatre Notes posthumes :

I. Soit E une équation différentielle linéaire pour laquelle l'équation fondamentale déterminante, relative à un point singulier (régulier) x_0, présente des racines multiples. L'auteur montre comment, en partant de la forme même de la substitution canonique relative à x_0, on peut trouver la forme analytique d'un système fondamental canonique d'intégrales dans le voisinage de x_0.

II. M. Bucca donne une démonstration nouvelle d'un théorème de Kronecker sur les irrationalités naturelles et il en fait une application.

III. Les équations cycliques irréductibles de degré $2^\lambda 3^\mu$ peuvent se résoudre géométriquement au moyen d'intersections de coniques; inversement, M. Bucca montre que les racines de toute autre équation cyclique ne peuvent être ainsi construites. Par exemple, pour construire le polygone régulier de 11 côtés, il faut couper une parabole par une cubique.

IV. L'auteur démontre d'une façon nouvelle l'impossibilité de résoudre les équations générales de degré supérieur à 5 au moyen de l'irrationalité icosaédrique; puis il établit un théorème plus général sur une classe d'équations, de degré supérieur à 5, et qui ne peuvent admettre de résolvante à un paramètre.

V. En s'appuyant sur des considérations purement arithmétiques et sur des hypothèses moins restrictives que celles de Vahlen, M. F. Bucca retrouve un théorème obtenu par ce dernier auteur au sujet de la réductibilité des équations binomes d'indice composé.

Pincherle (*S.*). — Sur un problème d'interpolation (142-144).

L'auteur démontre le théorème suivant : « S'il existe un nombre positif ρ tel

que la fonction $f(t) = \sum_0^\infty a_n t^{n+1}$ soit régulière dans tout le champ

$$\left|\frac{t}{1-t}\right| > \rho,$$

on pourra construire une fonction entière $\sigma(x)$ qui pour $x = n$, entier non négatif, prend la valeur a_n; $\sigma(x)$ sera donnée par la formule

$$\sigma(x) = \sum_0^\infty \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}\left[a_n - na_{n-1} + \binom{n}{2}a_{n-2} + \ldots + (-1)^n a_0\right]. \text{ »}$$

Vivanti (*G.*). — Sur la transformation de Laplace (145-156).

Note où l'auteur étend la théorie de l'équation de Laplace et de ses invariants aux équations à trois variables indépendantes.

Severini (*C.*). — Sur la représentation des fonctions réelles de variables réelles au moyen de séries de polynomes rationnels entiers (157-179).

Précédemment [1], M. Severini avait étudié la représentation des fonctions de variables réelles; la publication de la thèse de M. Baire l'amène à compléter ses résultats antérieurs. Dans la première partie de sa Note, M. Severini compare la classe des fonctions intégrables (au sens de Riemann) et celles des fonctions développables en séries de polynomes; ces deux classes, très distinctes, comprennent cependant des familles de fonctions communes : telles sont les fonctions à discontinuités dénombrables. Puis l'auteur étend la démonstration due à Weierstrass pour la représentation des fonctions continues et il étudie des fonctions discontinues à gauche et à droite d'une de leurs singularités. Dans la seconde partie de son travail, l'auteur indique diverses conditions moyennant lesquelles ses résultats s'étendent aux fonctions de deux variables.

Puglisi (*M.*). — Sur le mouvement d'un point soumis à aucune force sur un tore (180-191).

L'auteur discute, d'après Staude, le mouvement d'un point sur un tore, en l'absence de toute force extérieure.

Burgatti (*P.*). — Théorie des systèmes articulés les plus simples (192-201) (avec une planche de 10 figures).

Soit T une transformation ponctuelle plane, changeant des cercles en cercles; proposons-nous de trouver un système articulé qui la réalise matériellement.

---

[1] *Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino*, vol. XXXIII et XXXIV.

Ce problème a été traité souvent dans des cas particuliers; M. Burgatti montre que, quelle que soit T, on peut le résoudre en s'appuyant sur deux principes généraux qu'il établit. Puis, comme application de sa méthode, il retrouve les systèmes classiques de Kempe, Sylvester, Scheiner, Hart et Peaucellier.

Vitali (*G.*). — Sur les fonctions analytiques sur les surfaces de Riemann (202-208).

L'auteur étend le théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctioni analytiques sur une surface de Riemann.

Vitali (*G.*). — Sur les limites pour $n = \infty$ des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des fonctions analytiques (209-216).

M. Vitali montre que, $f(z)$ étant holomorphe en z_0 (fini), si $f^{(n)}(z_0)$ tend vers une limite finie quand n croît indéfiniment, cette limite est nécessairement de la forme ae^z; puis il applique ce résultat à des produits de dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de p fonctions $v_1, \ldots, v_p$ prises respectivement par rapport à $h_{1z}, \ldots, h_{pz}$ ($h_1, \ldots, h_p$ ayant les mêmes arguments).

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la représentation analytique des fonctions d'une variable réelle (217-224) (en français; extrait d'une lettre à M. Émile Picard).

L'auteur communique à M. Picard une démonstration nouvelle du théorème de Weierstrass sur la représentation des fonctions continues en séries de polynomes. Considérons la fonction

$$\chi_n(x) = 1 - 2^{1-(1+x)^n} \qquad (x > -1);$$

suivant que la variable réelle x est < 0, $= 0$ ou > 0, on a

$$\lim_{n=\infty} \chi_n(x) = -1, \ 0 \text{ ou } 1.$$

Or, si $F(x)$ est une fonction continue, définie dans (a, b), on peut substituer à $y = F(x)$ une ligne brisée $\mathfrak{L}$, suffisamment voisine, dont les sommets ont pour abscisses $a_0 = a, a_1, \ldots, a_{r+1} = b$; et, d'après ce qu'on vient de dire, $\mathfrak{L}$ sera représentée sensiblement par l'équation

$$2y = F_1(x) + F_{r+1}(x) + \sum_{\lambda=1}^{r} [F_\lambda(x) - F_{\lambda+1}(x)] \chi_n\left(\frac{a_\lambda - x}{B - A}\right),$$

dès que n sera assez grand (les F_λ sont les fonctions linéaires qui représentent les côtés de $\mathfrak{L}$, et l'on a $B - A = b - a$). Mais on peut substituer à $\chi_n(x)$, fonction entière de x, un polynome en x qui la représentera approximativement, et, dès lors, la conclusion est immédiate. La méthode s'étend aux fonctions de deux variables.

[Dans une longue Note, M. Mittag-Leffler reproduit un Article inédit de M. Phragmén sur une méthode de M. Runge. Ce dernier avait démontré qu'on peut représenter, avec une approximation donnée, toute fonction continue par une fonction rationnelle R; d'autre part, il résulte de la méthode même de M. Runge que R peut être elle-même représentée approximativement par une autre fonction rationnelle R_1 n'ayant qu'un pôle x_0, et l'approximation étant uniforme, sauf dans le voisinage des pôles des deux fonctions. Cela étant, M. Phragmen rapproche ces deux résultats, après avoir placé x_0 à l'infini : le théorème de Weierstrass en résulte aussitôt.]

Puglisi (*M.*). — Sur les formules pour la composition de plusieurs mouvements finis (225-255).

Dans ce travail, M. Puglisi développe d'une façon très détaillée tous les calculs qui interviennent dans le Mémoire [1] de M. Marcolongo sur la composition des mouvements finis, et qui n'avaient été qu'esquissés par cet auteur.

Phragmen (*E.*). — Sur la représentation analytique des fonctions réelles, données sur un ensemble quelconque de points (256-261) (en français; extrait d'une lettre à M. G.-B. Guccia).

M. Phragmén communique, en la simplifiant, une démonstration obtenue par M. Setterberg pour le théorème suivant :

« Soit E un ensemble quelconque de points contenu dans un carré C, et soit φ une fonction déterminée dans E et uniformément continue dans E. On peut définir dans C une fonction Φ qui coïncide avec φ dans E et qui est continue dans C. »

La démonstration repose sur la considération d'un ensemble de points formé par les sommets d'une subdivision de C en carrés (dont chacun ne contient à son intérieur aucun point de E).

Beltrami (*E.*). — Francesco Brioschi (262-274).

Éloge funèbre de Brioschi, extrait des *Atti della R. Acc. dei Lincei* [2].

Cremona (*L.*). — Eugenio Beltrami (275-289).

Éloge funèbre de Beltrami, extrait des *Atti della R. Acc. dei Lincei* [3].

Castelnuovo (*G.*) et *Enriques* (*F.*). — Sur les conditions de rationalité des plans doubles (290-302).

M. Nœther avait découvert trois types irréductibles de plans doubles ration-

---

(1) *Ann. di Mat. pura ed appl.*, t. XXVI, 1897.

(2) Année 295, 1898.

(3) Année 297, 1900.

nels, mais il n'avait pu démontrer en toute rigueur que ces trois types sont les seuls possibles. D'autres travaux permettaient d'établir cette réciproque, mais par une voie longue et indirecte. Dans leur Note, MM. Castelnuovo et Enriques reprennent le problème et le résolvent par une méthode directe qui leur permet d'étendre les résultats de M. Nœther.

Soit $z^2 = f(x, y)$ un plan double pourvu d'une courbe de diramation C_{2n}, d'ordre pair $2n$, sans composante multiple; toute transformation birationnelle change C_{2n} en une courbe qui, ajoutée aux courbes fondamentales, transformées des points multiples d'ordre impair de C_{2n}, constitue la courbe de diramation C_{2m} de la surface transformée. La présence éventuelle de ces courbes fondamentales amène les auteurs à assigner à tout point multiple d'ordre impair de C_{2n} une multiplicité *virtuelle* qui simplifie le langage.

Supposons alors que C_{2n} soit privée d'adjointes d'indices quelconques, une discussion basée sur la multiplicité des singularités de C_{2n} et subdivisée en trois parties distinctes (suivant le reste de n par rapport à 3), montre que C_{2n} est une conique ou un système de $2N$ droites issues d'un même point. De même, si toutes les adjointes font défaut, sauf la première, on trouve que C_{2n} coïncide avec l'une des trois courbes de M. Nœther, et le plan double est alors rationnel ou réglé. Mais l'absence d'adjointes d'indice i pour la courbe de diramation entraîne l'annulation du plurigenre P_i du plan double; et l'on sait, inversement, que tout plan double rationnel ou réglé a tous ses plurigenres nuls, ce qui entraîne la réciproque cherchée.

Le Mémoire se termine par des applications aux surfaces possédant des faisceaux de courbes elliptiques ou hyperelliptiques.

René Garnier.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.

Serie III, Tomo XIII, 1907.

Lattès (*S.*). — Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation (1-138) [en français].

La première Partie de ce travail a pour objet l'étude d'une classe d'équations fonctionnelles qui se rattachent à la théorie de l'itération des transformations ponctuelles. Soit, par exemple, une transformation à deux variables

(1) $$X = f(x, y), \qquad Y = \varphi(x, y);$$

si $y = \psi(x)$ est l'équation d'une courbe invariante par (1), la fonction $\psi(x)$ vérifie l'équation

$$\psi\{f[x, \psi(x)]\} = \varphi[x, \psi(x)],$$

type d'équation fonctionnelle qui comprend diverses équations, telles que

l'équation de Schroëder, étudiées antérieurement et à d'autres points de vue par divers auteurs.

Le Chapitre I est consacré à l'itération à deux variables. Dans le domaine d'un point double, la transformation (1) peut être ramenée à la forme canonique

$$X = S_1 x + f_1(x, y), \qquad Y = S_2 y + \varphi_1(x, y),$$

où S_1, S_2 sont les racines de l'équation caractéristique relative aux termes linéaires de la substitution. En supposant la transformation analytique, Poincaré a démontré l'existence de deux courbes analytiques invariantes passant par l'origine, dans le cas où l'on a

$$0 < S_1 < 1 < S_2.$$

Ce résultat est étendu ici au cas où S_1 et S_2 sont quelconques : il existe deux courbes analytiques invariantes et deux seulement, C, C′ passant par le point double, si $|S_1|$, $|S_2|$ sont différents de 0 et de 1 et si aucun des deux nombres S_1, S_2 n'est une puissance entière de l'autre. On peut réduire encore la transformation dans le domaine du point double, en ramenant ces courbes C, C′ à être les axes de coordonnées et cette nouvelle forme réduite est utilisée pour étudier la disposition des *conséquents* et des *antécédents* successifs déduits d'un point pris dans le domaine du point double, par itération de la substitution (1) et de son inverse. Les courbes invariantes passant par le point double sont ensuite étudiées sans faire l'hypothèse que la substitution donnée et les courbes cherchées sont analytiques et en supposant seulement l'existence d'un certain nombre de dérivées; la méthode employée est alors une méthode d'approximations successives dont le principe a été indiqué par M. Hadamard et qu'il a appliquée aù cas où l'on a

$$|S_1| < 1 < |S_2|.$$

Dans ce cas, les courbes C, C′ trouvées plus haut étaient les seules courbes invariantes passant par le point double. Dans le cas contraire, il existe en général une infinité de courbes invariantes passant par le point double, mais deux d'entre elles seulement peuvent être analytiques.

Dans le Chapitre II, il s'agit des courbes et surfaces invariantes par une transformation ponctuelle à trois variables : l'existence de trois courbes analytiques invariantes et, suivant les cas, d'une ou trois surfaces analytiques invariantes passant par le point double est encore établie en général, moyennant certaines hypothèses concernant les racines S_1, S_2, S_3 de l'équation caractéristique relative aux termes linéaires de la substitution. Le cas où la substitution a une infinité de points doubles formant soit une surface, soit une courbe, est aussi examiné. L'étude des conséquents et des antécédents successifs d'un point voisin du point double met en évidence l'analogie des résultats obtenus dans cette question avec ceux obtenus par Poincaré dans l'étude des courbes intégrales réelles d'un système d'équations différentielles du premier ordre au voisinage des points singuliers : il y a lieu, ici encore, de distinguer parmi les points doubles des *cols*, des *foyers*, des *nœuds* et des *cols-foyers*, comme on le fait pour les points singuliers dans la théorie de Poincaré.

Le Chapitre III est consacré à l'étude détaillée de cette analogie entre les deux théories. Après avoir montré comment l'étude des surfaces et des courbes invariantes peut être faite à l'aide de l'équation de Schroëder, étudiée par

M. Kœnigs et par M. Leau, et après avoir établi l'existence des solutions de cette équation par une méthode qui généralise la méthode employée par M. Kœnigs dans le cas d'une variable, on se sert des solutions de cette équation pour obtenir sous forme explicite des équations générales communes à toutes les courbes invariantes, analytiques ou non, et la forme de ces équations met encore en évidence l'analogie déjà constatée avec la théorie des points singuliers des équations différentielles. Cette analogie s'explique par le fait que, dans le domaine d'un point singulier, les équations différentielles se présentent comme cas limite d'équations fonctionnelles, le point singulier devenant à la limite un point double de la transformation ponctuelle attachée à ces équations fonctionnelles.

La deuxième Partie a pour objet les équations fonctionnelles définissant une courbe, $y = \psi(x)$, invariante par une transformation de la forme

$$(2) \qquad X = f(x, y, y'), \qquad Y = \varphi(x, y, y'),$$

ou transformation $(X, Y; x, y, y')$. La fonction $\psi(x)$ doit vérifier l'équation fonctionnelle-différentielle

$$\psi[f(x, \psi, \psi')] = \varphi(x, \psi, \psi').$$

Dans le Chapitre IV, on établit, sous certaines hypothèses, l'existence d'une courbe invariante contenant un élément double (x_0, y_0, y'_0) de la transformation (2) et définie dans le voisinage de cet élément. Cette courbe est définie comme limite des antécédentes successives d'une courbe arbitraire contenant l'élément double.

Le Chapitre V est la généralisation du précédent : on y étudie des substitutions $(X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_r; x, y_1, y_2, \ldots, y_r; y'_1, y'_2, \ldots, y'_r)$ contenant à la fois plusieurs fonctions de x et leurs dérivées par rapport à x, ce qui conduit, pour les courbes invariantes, à un système d'équations fonctionnelles différentielles.

Le Chapitre VI contient l'étude du cas particulier où la transformation (2) devient une transformation de contact. On peut alors adjoindre aux équations (2) l'équation qui exprime Y' en fonction de x, y, y' et l'on a ainsi un système de trois équations à trois variables x, y, y'. Si l'on considère x, y, y' comme les coordonnées d'un point de l'espace à trois dimensions x, y, y' et si l'on applique les résultats du Chapitre II, on trouve en général trois courbes invariantes par la transformation *ponctuelle* ainsi obtenue et passant par un point double x_0, y_0, y'_0. Si l'on revient à l'interprétation primitive de x, y, y' comme coordonnées d'un élément de contact du plan, deux seulement des courbes ainsi trouvées conduisent à des courbes planes invariantes par la transformation de contact, la troisième étant une solution étrangère. Ainsi, il existe en général deux courbes invariantes par une transformation de contact et contenant un élément double de la transformation.

Tognoli (*G.*). — Sur les formes différentielles à variables, les unes dépendantes et les autres indépendantes (139-177).

Ce Mémoire a son origine dans les travaux de M. Pascal sur les équations aux différentielles totales d'ordre supérieur (*voir*, en particulier, le Mémoire

des *Annali*, t. VII). Étant donnée une forme aux différentielles totales, l'auteur suppose que certaines des variables qui figurent dans la forme sont des fonctions d'un certain nombre d'indéterminées qui peuvent être, en particulier, les variables restantes. Il donne d'abord, dans cette hypothèse, l'expression de la différentielle totale d'ordre r d'une fonction de plusieurs variables, et c'est en remplaçant dans cette expression les dérivées partielles par des fonctions arbitraires des variables qu'il obtient les formes aux différentielles totales qu'il se propose d'étudier. Il obtient les conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité complète de l'équation obtenue en égalant à zéro une pareille forme. Il étudie aussi les transformations d'une forme du type considéré en une forme du même type et l'invariant analogue à l'invariant A envisagé par M. Pascal dans le travail cité plus haut. L'auteur applique ensuite plus spécialement ses résultats aux formes aux différentielles totales du second ordre et aux systèmes d'équations aux différentielles totales du second ordre.

Pavanini (*G.*). — Sur une nouvelle catégorie de solutions périodiques dans le problème des trois corps (179-202).

L'un des trois corps P est supposé avoir une masse négligeable et les deux autres corps S_1, S_2 des masses $\frac{1}{2} - \mu$, $\frac{1}{2} + \mu$ voisines l'une de l'autre. Dans ces conditions, l'auteur établit l'existence de solutions périodiques du problème des trois corps ne rentrant dans aucune des catégories générales connues de solutions périodiques.

Le premier cas étudié est celui où $\mu = 0$ et où P est au début du mouvement sur la perpendiculaire menée par le centre de gravité O de l'ensemble des deux corps S_1, S_2 au plan dans lequel se meuvent constamment ces deux corps, la vitesse initiale de P étant en outre dirigée suivant cette perpendiculaire. Le mouvement de P a alors lieu sur cette perpendiculaire entre deux limites symétriques par rapport à O : le problème se traite très aisément dans ces conditions et l'intégration dépend de fonctions elliptiques; l'auteur calcule la période réelle du mouvement.

M. Pavanini passe de ce cas à celui où μ n'est pas nul, mais suffisamment petit, et il se propose de voir s'il existe pour le mouvement de P des solutions périodiques voisines des oscillations rectilignes obtenues pour $\mu = 0$. La réponse est affirmative : d'une façon plus précise, les solutions, en nombre doublement infini, dont l'existence est établie, correspondent à des orbites fermées voisines du centre de gravité O du système S_1, S_2.

Calapso (*P.*). — Un problème sur les systèmes de lignes conjuguées et sur les transformations de Laplace correspondantes (203-248).

Soient x, y, z les trois coordonnées d'un point P. On sait que si x, y, z sont solutions d'une équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} = A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial x}{\partial v},$$

le point P décrit un système conjugué. Soient L, L^{-1} les deux transformations de Laplace bien connues qui transforment ce réseau conjugué en un autre réseau conjugué. L'auteur se propose de déterminer les systèmes conjugués pour lesquels les nouveaux réseaux conjugués obtenus à l'aide de L et de L^{-1} sont l'un et l'autre des réseaux orthogonaux. Un pareil système est appelé par l'auteur *système conjugué* (G). Des propositions établies par M. Guichard permettent de limiter la recherche aux systèmes conjugués (G) à invariants égaux. L'équation de Laplace est alors de la forme

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

et la détermination de la fonction φ dépend d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre. L'auteur cherche la condition que doit remplir l'invariant

$$H = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}$$

d'une pareille équation afin que l'équation puisse définir un système conjugué (G). La fonction H doit être telle que les deux équations

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{H}\sin\omega, \qquad \cos\omega = H^2 - H\frac{\partial^2 \log H}{\partial u\,\partial v}$$

puissent avoir une solution commune en ω. En éliminant H entre ces deux équations, on obtient pour ω une équation du quatrième ordre et la fonction φ se détermine alors par l'intégration d'un système complet; connaissant φ, on en déduit x, y, z par l'intégration d'un système de Riccati.

L'auteur montre que, lorsqu'on connaît un système conjugué (G) à invariants égaux, on peut obtenir par de simples calculs algébriques et par des dérivations une infinité d'autres systèmes (G) à invariants égaux dépendant de trois constantes arbitraires : il y parvient en combinant des inversions avec les transformations L et L^{-1} et il indique aussi d'autres transformations des systèmes conjugués (G) à invariants égaux, transformations qui exigent des quadratures.

Eisenhart (*L.-P.*). — Transformations de surfaces minima (249-262) [en anglais].

Ce Mémoire est basé sur l'application, à un cas particulier, des résultats obtenus par M. Calapso dans son Mémoire du Tome XI des *Annali* relativement aux *surfaces* N ou *surfaces de Guichard*. L'auteur démontre que, parmi les surfaces parallèles à une surface minima S, il y a une surface N et que la surface N′ correspondante est une sphère. Il applique aux surfaces N ainsi obtenues les transformations de M. Guichard qui permettent de déduire de chacune d'elles une infinité de surfaces isothermes : la surface transformée est minima, de sorte qu'on obtient ainsi une méthode de transformation de la surface minima S en d'autres surfaces minima.

Ford (*W.-B.*). — Sur les équations linéaires aux différences finies (263-328) [en français].

L'auteur s'est proposé d'adapter aux équations linéaires aux différences finies la méthode que M. Dini a donnée pour l'étude des équations différentielles linéaires et dont il a développé les conséquences dans une série de Mémoires des *Annali* (t. II, III, XI, XII). Il démontre, au sujet de ces équations aux différences, trois propositions dans lesquelles s'introduisent, comme dans la théorie de M. Dini, n fonctions arbitraires $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Le déterminant analogue à Q (*voir*, pour les notations, les analyses des Mémoires de M. Dini) est ici un déterminant formé par ces fonctions et leurs différences jusqu'à l'ordre n. Les développements en série obtenus par cette méthode permettent d'avoir des expressions asymptotiques des intégrales pour n très grand en faisant certaines hypothèses relatives à la croissance des coefficients (*cf.* le second Mémoire de M. Dini).

Nielsen (*N.*). — Sur la multiplication des séries trigonométriques (329-337) [en français].

Généralisation d'un théorème donné par M. Pringsheim (*Mathem. Annalen*, t. XXVI) au sujet de la multiplication, selon la règle de Cauchy, de deux séries trigonométriques à coefficients positifs ou alternés. L'auteur suppose ici que les séries ont des coefficients quelconques réels ou complexes. Soient

$$f_1(x) = \Sigma a_n \cos nx, \qquad g_1(x) = \Sigma a_n \sin nx,$$
$$f_2(x) = \Sigma b_n \cos nx, \qquad g_2(x) = \Sigma b_n \sin nx$$

de pareilles séries. M. Nielsen suppose que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \sum_{s=1}^{s=n-1} |a_s b_{n-s}| = 0$$

et que l'une des quatre séries

$$\Sigma |a_n \pm a_{n+1}|, \qquad \Sigma |b_n \pm b_{n+1}|$$

soit convergente. Dans ces conditions, tous les produits obtenus en multipliant l'une des quatre séries

$$f_1(x), \qquad f_1(x-\pi), \qquad g_1(x), \qquad g_1(x-\pi)$$

par l'une des quatre autres séries

$$f_2(x), \qquad f_2(x-\pi), \qquad g_2(x), \qquad g_2(x-\pi)$$

peuvent être développés par la règle de multiplication de Cauchy.

En se limitant ensuite aux séries trigonométriques à coefficients positifs ou alternés qui peuvent être multipliées par la règle de Cauchy, l'auteur détermine quelles sont celles dont le produit peut être mis sous la forme d'une série trigonométrique ordinaire.

Serie III, Tomo XIV, 1908.

Nicoletti (*O.*). — Sur la théorie de la convergence des algorithmes d'itération (1-32).

Ce Mémoire contient d'abord le rappel des résultats obtenus par l'auteur dans un travail antérieur sur la théorie de l'itération (*Memorie della Società italiana delle Scienze*, serie III, t. XIV). Dans ce Mémoire, M. Nicoletti avait donné des critères de convergence pour les algorithmes d'itération à n variables permettant de reconnaître dans la plupart des cas si un algorithme donné converge vers des limites déterminées et finies. Dans la classification de ces algorithmes, l'auteur a introduit les notions nouvelles d'*ordre* et de *degré* de convergence.

Le conséquent de rang ρ d'un point $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ étant désigné par $(x_1^{(\rho)}, x_2^{(\rho)}, \ldots, x_n^{(\rho)})$, la convergence de l'algorithme d'itération dans un champ donné dépend de la convergence des séries

$$(1) \qquad x_k^{(0)} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\rho} \left[x_k^{(\rho)} - x_k^{(\rho-1)}\right] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces séries étant supposées convergentes, l'auteur montre que, dans certains cas, le terme général de l'une d'elles est comparable à a^{ρ}, avec $a < 1$ (convergence linéaire ou du premier degré), tandis que dans d'autres cas le terme général est comparable à $\theta^{s^{\rho}}$, avec $\theta < 1$ (convergence de degré s). En outre la convergence de la série (1) ayant toujours lieu, il peut se faire que ces critères soient applicables non pas aux conséquents eux-mêmes, mais aux conséquents pris de r en r; la convergence est alors dite d'*ordre* r; en désignant par $\left[\frac{\rho}{r}\right]$ le plus grand entier contenu dans $\frac{\rho}{r}$, le terme général de la série (1) est alors comparable à $a^{\left[\frac{\rho}{r}\right]}$ (convergence linéaire d'ordre r) ou à $\theta^{s^{\left[\frac{\rho}{r}\right]}}$ (convergence de degré s et d'ordre r). Les résultats du Mémoire antérieur de l'auteur permettaient de reconnaître, pour un algorithme donné, s'il y avait ou non convergence d'un ordre et d'un degré donné.

Dans ce nouveau travail, M. Nicoletti suppose qu'on donne seulement l'algorithme et il donne un théorème permettant de reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, si l'algorithme a une convergence *de degré supérieur au premier* et de déterminer, dans le cas où une pareille convergence existe, l'ordre minimum de convergence. Dans le cas où l'algorithme n'admet pas une convergence de degré supérieur au premier, la méthode employée permet d'avoir des critères suffisants pour la convergence linéaire.

Fubini (*G.*). — Sur la théorie des fonctions automorphes et de leurs transformations (33-67).

L'auteur énonce ainsi le problème fondamental relatif à l'existence des fonctions automorphes les plus générales :

Soient G *un groupe discontinu de transformations birationnelles à n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *et* Γ *un groupe de transformations birationnelles à n variables* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *isomorphe à* G *holoédriquement ou mériédriquement : trouver tous les systèmes possibles de fonctions uniformes z des variables x telles que, lorsqu'on fait subir aux variables x une transformation du groupe* G, *ces fonctions subissent la transformation correspondante du groupe* Γ.

L'objet du Mémoire est de résumer l'état actuel des recherches de cette nature, de montrer comment le problème fondamental peut être résolu pour des catégories étendues de groupes G et Γ et d'étendre les résultats connus à de nouvelles classes de groupes.

Dans une première Partie, M. Fubini suppose que Γ se réduise à la substitution identique, de sorte qu'il s'agit de construire des fonctions uniformes z des variables x invariantes par les substitutions du groupe G. Il considère à cet effet des séries qui généralisent les séries thétafuchsiennes de Poincaré, d'où l'on déduira des fonctions automorphes en faisant le quotient de deux pareilles séries. Le problème est donc ramené à l'étude de la convergence de ces séries. Un cas important est celui où, en posant $x_k = \xi_k + i\eta_k$, il existe un espace Σ à $2n$ dimensions (ξ, η) dont la métrique soit telle que le groupe G puisse être considéré comme un groupe de mouvements de cet espace. L'auteur donne un théorème conduisant à des espaces Σ pour lesquels les séries considérées plus haut convergent : il obtient ainsi comme cas particulier tous les cas connus de fonctions automorphes (sauf celui des groupes kleinéens) et quelques cas nouveaux dont il indique le mode de formation.

M. Fubini passe ensuite au cas où G et Γ sont l'un et l'autre des groupes de transformations linéaires et il établit une proposition donnant des conditions suffisantes pour que G et Γ (considérés comme des groupes de mouvements) donnent lieu à des fonctions automorphes. Cette proposition comprend comme cas particuliers le cas des fonctions zétafuchsiennes de Poincaré, celui des groupes hyperfuchsiens de M. Picard et celui des groupes hypermodulaires de M. Hilbert et de M. Blumenthal.

Enfin, M. Fubini examine le cas où G et Γ sont des groupes de transformations birationnelles : les fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont alors les *fonctions crémoniennes* étudiées par Poincaré (*Journal de Mathématiques*, 1890). L'auteur se limite toutefois au cas où G et Γ sont des groupes cycliques, c'est-à-dire engendrés l'un et l'autre par les puissances d'une transformation birationnelle. En utilisant les résultats établis par Poincaré, il démontre que le problème fondamental peut être résolu pour les groupes de cette nature.

Dans la deuxième Partie, l'auteur se pose le problème suivant : « Trouver les fonctions fuchsiennes z pour lesquelles il existe un groupe G continu (de Lie) de transformations T de la forme

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

tel qu'il y ait une relation algébrique entre $z(x)$ et $z(x')$ pour toutes les transformations T du groupe. »

L'auteur montre que les seules fonctions z répondant à la question se ramènent en substance à des exponentielles ou à des fonctions elliptiques.

M. Fubini se pose ensuite la même question pour les fonctions automorphes de deux variables x et y correspondant à des groupes hyperfuchsiens et il détermine celles pour lesquelles il existe un groupe continu G′ de transformations projectives T tel que, pour toute transformation T de G′, il y ait une relation algébrique entre $z(x, y)$ et $z(\mathrm{T}x, \mathrm{T}y)$. Il y a ici deux types essentiellement nouveaux de fonctions répondant à la question.

Nielsen (N.). — Sur quelques propriétés fondamentales des fonctions sphériques (69-90) [en français].

Étude des fonctions métasphériques $\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)$ de *paramètre* ν et d'*indice* ρ définies comme solutions des équations fonctionnelles

$$(1-x^2)\,\mathrm{D}_x \mathrm{K}^{\nu,\rho}(x) = (\rho+2\nu)\,x\,\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x) - (\rho+1)\,\mathrm{K}^{\nu,\rho+1}(x),$$

$$2(\rho+\nu)\,x\,\mathrm{K}^{\nu,\rho}(x) = (\rho+1)\,\mathrm{K}^{\nu,\rho+1}(x) + (\rho+2\nu-1)\,\mathrm{K}^{\nu,\rho-1}(x).$$

La fonction $\mathrm{U} = \mathrm{K}^{\nu,\rho}(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$\mathrm{D}_x\left[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\mathrm{U}'\right] = -\rho(\rho+2\nu)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\mathrm{U};$$

Cette équation différentielle est vérifiée par le produit de deux fonctions métasphériques de même paramètre ρ. Les diverses formules données par l'auteur mettent en évidence l'analogie des fonctions métasphériques et des fonctions cylindriques. Représentation des fonctions métasphériques à l'aide d'intégrales définies.

Levi (E.-E.). — Sur une classe de transcendantes méromorphes (93-112).

L'auteur se propose de construire toutes les fonctions $f(z)$ méromorphes dans tout le plan et vérifiant des équations de la forme

$$(1) \qquad f(z+\omega) = f(z), \qquad f(z+\omega_1) = \mathrm{R}[f(z)],$$

où R est une fonction rationnelle.

En posant $u = e^{\frac{2i\pi z}{\omega}}$, le problème est ramené à la recherche de toutes les fonctions uniformes de u, ne pouvant avoir comme points singuliers essentiels que 0 et ∞ et vérifiant une équation de la forme

$$(2) \qquad \varphi(mu) = \mathrm{R}[\varphi(u)].$$

Les équations (1) ont été étudiées par M. Picard, dans le cas où la fonction $f(z)$ inconnue est méromorphe dans un demi-plan ; les équations (2) ont été étudiées par Poincaré, dans le cas $|m| > 1$ et en supposant que les fonctions cherchées n'ont pas de point singulier essentiel à l'origine; les solutions que l'on déduit de cette dernière étude pour le système (1) seront dites appartenir à la classe de Poincaré.

M. E.-E. Levi montre que toute fonction vérifiant des équations de la forme (1) est une fonction linéaire fractionnaire de l'une des fonctions suivantes :

1° Fonctions de la classe de Poincaré;

2° Fonctions de la forme

$$f(z) = e^{\frac{2i\pi r z}{\omega}} \psi\left(e^{\frac{2i\pi r z}{\omega}}\right),$$

correspondant au cas où $\frac{\omega}{\omega_1}$ est réel; dans le cas où $\frac{\omega}{\omega_1}$ est rationnel, égal à $\frac{p}{q}$, le nombre r est l'un des nombres $0, 1, 2, \ldots, p-1$ et la fonction ψ est une fonction méromorphe arbitraire; dans le cas où $\frac{\omega}{\omega_1}$ est irrationnel, ψ est une constante, r un entier positif ou négatif quelconque;

3° Fonctions elliptiques de première ou de seconde espèce de la forme

$$\frac{\sigma(z)}{\sigma\left(z - \frac{k\omega}{2\pi i}\right)} e^{-\frac{k\eta_1}{2\pi i} z} \varepsilon(z),$$

où les notations sont les notations classiques de la théorie des fonctions elliptiques, k une constante, $\varepsilon(z)$ une fonction elliptique arbitraire de première espèce aux périodes ω, ω_1;

4° Fonctions du type

$$k[-\omega\zeta(z) + \eta_1 z] + \varepsilon(z).$$

Fubini (*G.*). — Nouvelles applications du principe de minimum. (Le problème de Lord Kelvin.) (113-141).

L'auteur a étudié dans un autre travail (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXIII) le *principe de minimum* qui permet d'établir des théorèmes d'existence pour certaines équations aux dérivées partielles. Il applique ici les méthodes de ce travail au problème de Lord Kelvin, choisi comme type d'une nouvelle catégorie de problèmes. Ce problème consiste à construire une fonction harmonique U dans un champ Γ donné de l'espace lorsque l'on connaît les valeurs de la dérivée de U prise suivant la normale pour les points de la surface σ qui limite Γ. Ce problème a été transformé par Lord Kelvin en un problème de minimum qui peut s'énoncer ainsi :

Soit f une fonction intégrable des points de la surface σ. Construire une fonction U, *existant dans* Γ, *telle que l'on ait pour la surface σ*

$$(1) \qquad \int_\sigma f\,U\,d\sigma = 1$$

et telle que l'intégrale

$$I(U) = \int_\Gamma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

où dτ désigne l'élément de volume de Γ, *ait la plus petite valeur possible compatible avec la condition* (1). *Démontrer ensuite que* U *est harmonique.*

En désignant par d la borne inférieure de l'ensemble des nombres $I(v)$ pour

l'ensemble des fonctions v vérifiant la condition (1) et assujetties à certaines hypothèses, on peut trouver une suite de fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$, telles que $\mathrm{I}(v_n)$ ait pour limite d. L'auteur démontre qu'avec ces hypothèses la suite des fonctions v_n converge vers une limite v dans tout le champ Γ, sauf peut-être pour les points d'un ensemble de mesure nulle. Il démontre ensuite qu'il existe dans Γ une fonction harmonique U qui coïncide avec v en tous les points de Γ sauf au plus aux points d'un ensemble de mesure nulle. Enfin la fonction U ainsi définie résout le problème.

Les démonstrations sont basées sur l'emploi de l'intégrale de Lebesgue : les ensembles de points de mesure nulle peuvent être négligés dans le calcul des intégrales de Lebesgue et les propriétés de ces intégrales permettent d'écrire, pour une portion quelconque Σ de surface comprise dans le champ Γ,

$$\int_\Sigma \mathrm{U}\,d\sigma = \int_\Sigma \lim_{n=\infty} v_n\,d\sigma = \lim_{n=\infty} \int_\Sigma v_n\,d\sigma.$$

En partant de fonctions v_n définies par des développements en séries dont les coefficients s'obtiennent par des quadratures, ceci permet d'obtenir pour U un développement analogue dont les coefficients sont les limites des coefficients des fonctions v_n.

Au début de son travail, M. Fubini expose en quelques pages la définition et les propriétés des intégrales de Lebesgue.

Lauricella (*G.*). — Application de la théorie de Fredholm au problème du refroidissement des corps (143-169).

L'auteur retrouve, à l'aide de la théorie des équations intégrales, les résultats connus établis par Poincaré pour le problème du refroidissement. L'équation intégrale dont dépend le problème a la forme suivante :

$$(1)\quad \varphi(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ h\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'} - \frac{d}{dn'}\left(\frac{e^{ir'\sqrt{k}}}{r'}\right)\right\} \varphi(\alpha, \beta; \sqrt{k})\,d\sigma = \mathrm{H}(\alpha', \beta'; \sqrt{k}),$$

où l'on a posé

$$\mathrm{H}(\alpha', \beta'; \sqrt{k}) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d}{dn'}\int_\mathrm{S} f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\,d\mathrm{S} - h\int_\mathrm{S} f(\xi, \eta, \zeta)\frac{e^{ir\sqrt{k}}}{r}\,d\mathrm{S}\right];$$

α', β' désignent les coordonnées curvilignes d'un point de la surface σ qui limite le champ S; on désigne par n' la normale intérieure à la surface, par r' le vecteur qui joint deux points de cette surface, par r le vecteur qui joint deux points quelconques du champ S, par k un paramètre qui peut prendre toute valeur réelle ou complexe, par h une constante positive (coefficient de perméabilité).

A côté de l'équation (1), il y a lieu de considérer l'équation *homogène* déduite de (1) en y remplaçant le second membre par zéro.

L'auteur démontre que l'équation homogène n'admet aucune solution non nulle lorsque k est un nombre réel et négatif ou un nombre complexe; le déter-

minant $D'(\sqrt{k})$ de l'équation de Fredholm est une fonction holomorphe paire de $\sqrt{k}$. Si l'on pose

$$D'(\sqrt{k})\, D'(-\sqrt{k}) = D(k),$$

le déterminant $D(k)$ ne peut avoir que des racines d'ordre fini dont l'ensemble ne peut admettre comme point limite que le seul point $k = \infty$.

De la solution de l'équation intégrale (1) on peut déduire une fonction

$$w(x, y, z; k),$$

méromorphe par rapport à k, admettant pour pôles les racines de $D(k) = 0$, et qui, pour chaque valeur de k qui n'est pas un pôle, vérifie les équations

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta_2 w + kw + f(x, y, z) = 0 & \text{(dans le domaine S)}, \\ \dfrac{dw}{dn'} = hw & \text{(à la surface } \sigma\text{)}. \end{array}\right.$$

Pour chaque pôle k', ou *valeur exceptionnelle* de k, le résidu est une fonction $p(x, y, z)$ dite *solution exceptionnelle*, et qui vérifie les équations

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \Delta_2 p + k'p = 0 & \text{(dans le domaine S)}, \\ \dfrac{dp}{dn'} = hp & \text{(à la surface } \sigma\text{)}. \end{array}\right.$$

Le cas de la perméabilité parfaite ($h = \infty$) est aussi examiné.

M. Lauricella montre ensuite comment on peut établir directement l'existence des valeurs exceptionnelles k', définies par le système (2). Il démontre que, si la fonction $f(x, y, z)$ vérifie sur la surface σ la condition

$$\frac{df}{dn} = hf$$

et si elle est finie et continue dans S ainsi que ses dérivées partielles des trois premiers ordres, elle est égale à la somme des solutions exceptionnelles $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ en nombre fini ou infini correspondant aux valeurs exceptionnelles successives $k_1, k_2, \ldots, k_n$, rangées par ordre de grandeur croissante.

La fonction $f(x, y, z)$ étant développée en série de *solutions exceptionnelles*, la solution du problème du refroidissement d'un corps solide ayant primitivement la température $f(x, y, z)$, et plongé dans un milieu qui a la température zéro aux points de la surface séparatrice, peut être obtenue aisément : l'auteur renvoie pour cela à son Mémoire sur l'intégration de l'équation de la chaleur (*Memorie della Società italiana delle Scienze,* serie III, tomo XII).

Levi (B.). — Le théorème de Desargues, le théorème de Pappus et l'existence d'une réciprocité ou d'une polarité (171-186).

Ce Mémoire se rattache aux travaux de M. Hilbert sur les fondements de la Géométrie. Le théorème de Pappus dont il s'agit ici n'est pas autre chose que le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit dans une conique appliqué au cas particulier d'une conique décomposée en deux droites.

L'auteur examine les dépendances qui existent entre le théorème de Desargues, le théorème de Pappus-Pascal et les autres hypothèses qu'on peut placer à la base de la géométrie projective, en particulier l'hypothèse de l'existence de la réciprocité ou de la polarité.

Levi (*E.-E.*). — Sur l'équation de la chaleur (187-264).

L'auteur se propose de construire, pour les équations aux dérivées partielles du second ordre du type parabolique, une théorie analogue à la théorie des équations du type elliptique et il prend, comme type d'équation parabolique, l'équation de la chaleur

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y),$$

qui admet pour caractéristiques les droites $y = \text{const.}$

Étant donnée une courbe ouverte s dont les extrémités A, B se trouvent sur une même caractéristique $y = \text{const.}$, et qui se trouve tout entière au-dessous de cette caractéristique, on sait qu'il ne peut pas exister deux solutions de l'équation (1) définies à l'intérieur du domaine S limité par s et par AB et prenant sur s une suite de valeurs données.

Après avoir rappelé la démonstration de ce théorème relatif à l'unicité de la solution et précisé les conditions sous lesquelles il est valable, M. E.-E. Levi se propose d'établir l'existence de la solution lorsqu'on se donne, sur la courbe ouverte s, une chaîne continue de valeurs pour la fonction inconnue. Il examine d'abord à cet effet le cas de l'équation homogène

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

et il résout le problème par deux méthodes différentes.

La première méthode, analogue à la méthode de Neumann dans la théorie des fonctions harmoniques, est basée sur l'emploi d'une expression qui joue, pour les fonctions vérifiant l'équation (2), le rôle que jouent les potentiels de double couche dans la théorie des fonctions harmoniques. Le problème est alors ramené à la résolution d'une équation intégrale; mais, contrairement à ce qui a lieu pour le problème de Dirichlet, le déterminant de l'équation intégrale n'est jamais nul, de sorte qu'il n'y a pas ici de valeurs exceptionnelles ni de fonctions exceptionnelles : la solution est une fonction entière du paramètre λ qu'on introduit dans l'équation intégrale.

Dans toute la théorie interviennent les fonctions

$$h_{\alpha,\beta}(x, y; x', y') = \frac{(x' - x)^{\alpha}}{(y - y')^{\beta}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4(y-y')}} \qquad (y > y')$$

et plus particulièrement la fonction $h_{0,\frac{1}{2}}$: c'est cette fonction qui s'introduit dans l'intégrale analogue à un potentiel de double couche.

La deuxième méthode est basée sur le principe des images sous la forme généralisée donnée par M. Volterra. Ce principe permet de résoudre le problème dans le cas d'un contour polygonal : l'auteur montre comment on passe de la

au cas général d'un contour curviligne considéré comme limite d'un contour polygonal.

Le théorème d'existence pour l'équation (1) se déduit de la solution ainsi obtenue pour l'équation (2). L'auteur démontre à cet effet que, sous certaines hypothèses relatives à la fonction $f(x, y)$, l'intégrale

$$z(x', y') = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\int h_{0,\frac{1}{2}}(x, y; x', y') f(x, y)\, dx\, dy,$$

étendue au domaine limité par la caractéristique $y = y'$ et comprenant la portion du domaine S située au-dessous de cette caractéristique, vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} - \frac{\partial z}{\partial y'} = f(x', y').$$

De cette solution particulière de l'équation (1) et du théorème d'existence relatif à l'équation (2) on déduit le théorème d'existence pour l'équation (1).

L'auteur démontre que les solutions de l'équation (1) sont analytiques en x, si l'on suppose la fonction $f(x, y)$ elle-même analytique en x.

Tous ces résultats sont étendus ensuite à l'équation plus générale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y).$$

Nicoletti (*O.*). — Sur la réduction à une forme canonique d'une substitution linéaire homogène et d'un faisceau de formes bilinéaires (265-325).

Étant donnés les deux faisceaux de formes bilinéaires

$$\mathrm{A}(u, v) - \omega \mathrm{B}(u, v) = \sum_{1}^{n}{}_{ik} (a_{ik} - \omega b_{ik}) u_i v_k,$$

$$\mathrm{A}'(u', v') - \omega \mathrm{B}'(u', v') = \sum_{1}^{n}{}_{ik} (a'_{ik} - \omega b'_{ik}) u'_i v'_k,$$

on sait que ces deux faisceaux sont dits *équivalents* si le second peut être déduit du premier par deux transformations linéaires reliant, l'une les variables u et u', l'autre les variables v, v'. Weierstrass a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que les deux faisceaux soient équivalents est que les déterminants $\mathrm{D}(\omega)$, $\mathrm{D}'(\omega)$ des deux faisceaux aient les mêmes *diviseurs élémentaires*. Un faisceau peut être transformé en un faisceau équivalent *réduit* par des calculs rationnels, ainsi que l'ont démontré Frobenius et divers autres auteurs.

M. Nicoletti donne une nouvelle démonstration de cette dernière proposition, en établissant une méthode nouvelle de réduction qui n'exige que des calculs rationnels; il se limite au cas où $\mathrm{D}(\omega)$ n'est pas identiquement nul. Il reprend la théorie de Weierstrass, mais en supposant que les coefficients des formes A, B

appartiennent à un *domaine de rationalité* R quelconque. La décomposition de D(ω) en ses diviseurs élémentaires dans le domaine R conduit à un système de congruences dont les modules sont ces diviseurs élémentaires; certaines identités de la théorie des déterminants permettent d'obtenir toutes les solutions de ces congruences et, de chacune de ces solutions, on déduit une transformation linéaire qui réduit le faisceau à une forme dépendant uniquement des diviseurs élémentaires de D(ω), forme qu'on peut par suite considérer comme une forme *canonique*. On obtient en même temps la transformation la plus générale à coefficients rationnels dans le domaine R qui transforme l'un en l'autre deux faisceaux équivalents.

Le problème de la réduction à une forme canonique d'une substitution linéaire et homogène résulte comme cas particulier du problème de la réduction d'un faisceau de formes bilinéaires. Mais ce problème étant plus simple, M. Nicoletti le traite tout d'abord directement dans un premier Chapitre et il ne traite qu'ensuite le cas des faisceaux de formes bilinéaires.

Lovett (*E.-O.*). — Sur une classe de solutions périodiques dans le problème des quatre corps (327-333).

Extension à un cas particulier du problème des quatre corps des résultats obtenus pour le problème des trois corps par M. Pavanini dans un Mémoire inséré au Tome XIII des *Annali di Matematica*. Trois des corps, de masses finies et peu différentes, sont supposés situés aux sommets d'un triangle équilatéral; le quatrième corps a une masse négligeable. L'étude de ce système est analogue à l'étude faite par M. Pavanini pour le problème des trois corps et les résultats obtenus sont de même nature.

S. Lattès.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

Tomo XV, 1901 (¹) (1re Partie : *Memorie e Communicazioni*).

Calapso (*P.*). — Sur les déformations du paraboloïde de révolution (1-32).

L'auteur fait la recherche directe de toutes les surfaces S applicables sur le paraboloïde de révolution. Il emploie la méthode de Weingarten, ce qui le conduit à intégrer une équation de Monge-Ampère; puis il étudie les surfaces intégrales de cette équation par rapport à leurs caractéristiques et en déduit la représentation des surfaces S par rapport à leurs asymptotiques. Il retrouve ensuite les formules de M. Darboux et termine en étudiant des hélicoïdes, des surfaces de révolution et une surface algébrique, d'ordre 12 et de classe 8.

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XL$_2$, p. [illegible].

Severi (*F.*). — A propos des points doubles impropres d'une surface générale de l'espace à quatre dimensions et de ses points triples apparents (33-51).

Soit S_n l'espace linéaire à n dimensions; appelons *surface générale* de S_4 toute surface irréductible F, de S_4, dont la projection sur l'espace S_3 ne possède que des singularités ordinaires (ligne double avec un nombre fini de points triples); F aura un nombre fini d de points doubles. Ces points jouissent de la propriété suivante : « Toute section de F par un S_3 contenant l'un d'entre eux est du même genre qu'une section quelconque de F »; aussi M. Severi les appelle-t-il *points doubles impropres*. Après avoir calculé d en fonction des caractères projectifs de la surface, l'auteur montre que les points doubles impropres sont biplanaires; ils seront dits de *deuxième* ou de *première espèce*, suivant que les deux plans tangents à F en ces points font partie ou non d'un S_3. Si F est la projection d'une surface du même ordre Φ, de S_5, d exprime aussi le nombre des points doubles apparents de Φ; l'auteur examine alors quelles sont les surfaces de S_5 pourvues de 0 ou 1 point double apparent. Il étudie ensuite un problème analogue : rechercher les surfaces de S_4 pourvues de 0 ou 1 point triple apparent, ce qui l'amène à compléter les résultats de M. Ascione. Enfin, il termine en recherchant à quelles conditions les surfaces de S_4 peuvent être normales.

Paci (*P.*). — Sur la fonction potentielle d'une couche superficielle sphérique (52-55).

L'auteur résout le problème de Dirichlet pour la sphère sans recourir à aucun artifice géométrique; il s'appuie sur le développement du potentiel en séries de Dirichlet, ainsi que sur le théorème de Gauss. Il termine en indiquant une identité qui fournirait une autre méthode pour résoudre le problème.

Bonola (*R.*). — Détermination, par voie géométrique, des trois types d'espace : hyperbolique, elliptique, parabolique (56-65).

L'auteur se propose de retrouver, par une méthode géométrique et élémentaire, les résultats de Helmholtz et Lie sur les fondements de la Géométrie. Il considère comme acquis les concepts de droite et de plan; puis, en s'appuyant sur l'intuition spatiale, il énonce un postulat du mouvement dont la portée est restreinte à la région R de l'espace accessible aux vérifications expérimentales; il trouve ainsi que le groupe des déplacements est formé d'homographies. Parmi celles-ci, certaines d'entre elles, les rotations, l'amènent à définir une polarité absolue de l'espace. Et, après avoir prolongé R jusqu'à l'espace métrique général, l'auteur étudie les points doubles de l'involution associée à la polarité absolue : les trois types d'espace en résultent immédiatement.

De Donder (*Th.*).— Étude sur les invariants intégraux (66-131).

Cette étude a un double but : tout d'abord, l'exposé systématique des travaux

de MM. H. Poincaré et G. Kœnigs sur la théorie des invariants intégraux ; et, en outre, la publication d'un certain nombre de résultats nouveaux.

M. de Donder commence par rappeler la définition des invariants; observons qu'il écrit les équations différentielles auxquelles sont attachés ces invariants sous la forme

$$(1) \qquad \frac{\delta x_1}{X_1} = \frac{\delta x_2}{X_2} = \ldots = \frac{\delta x_n}{X_n} = \delta t;$$

comme il l'indique bientôt, le symbole δ sert à mieux marquer le rapport étroit entre cette théorie et le calcul des variations. L'auteur recherche ensuite à quelles conditions l'expression

$$I_1 = \int \sum_{i=1}^{n} M_i dx_i$$

est un invariant intégral de (1) ; et, des conditions obtenues

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_k} X_k + \frac{\partial M_i}{\partial t} + M_k \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

il fait différentes applications, dont quelques-unes sont classiques. Appelons $x_i = \theta_i(\lambda)$ les équations de la courbe à laquelle doit être étendu I_1 ; les $\frac{\partial x_i}{\partial \lambda}$ satisfont à la formule

$$\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \lambda} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \lambda}.$$

Or, supposons qu'il existe des fonctions ξ_i des x et de t qui vérifient l'équation analogue

$$\frac{\delta \xi_i}{\delta t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \xi_k ;$$

pour exprimer ce fait, l'auteur introduit la notation nouvelle

$$\frac{\partial x_i}{\partial \lambda} <> \xi_i,$$

et il ajoute que ξ_i est une solution aux variations du premier ordre; cela étant, le procédé même qui a fourni (7) montre que la variation de $\Sigma M_i \xi_i$ sera identiquement nulle si les M_i satisfont à (7).

Puis, M. de Donder aborde les invariants d'ordres n et $n-1$; il écrit ces derniers sous la forme

$$I_{n-1} = \int \Sigma M_i dx_{i+1} \ldots dx_n dx_1 \ldots dx_{i-1},$$

où les différentielles doivent être rangées dans l'ordre indiqué; puis il obtient la formule

$$\sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^i \frac{\delta M_i}{\delta t} + (-1)^i \frac{\partial M_i}{\partial x_k} + (-1)^k \frac{\partial X}{\partial x_k} \right] = 0.$$

qui exprime que I_{n-1} est un invariant intégral, et qui diffère de celle de M. Kœnigs par la présence du facteur $(-1)^i$.

M. de Donder montre ensuite, d'après H. Poincaré, comment des invariants I_p et I_q on peut déduire un invariant I_{p+q}; et il ajoute les remarques suivantes : connaissant p intégrales distinctes de (1) et I_{n-p}, on pourra trouver un multiplicateur; connaissant q solutions aux variations du premier ordre distinctes et I_p, on en déduira I_{p-q}. On se trouve ainsi conduit aux invariants d'ordre p quelconque, dont l'auteur apprend à simplifier les formules par des notations appropriées. Il envisage ensuite les équations aux variations, et, à leur sujet, énonce divers théorèmes dont je citerai le suivant : « Pour que les deux équations

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\theta}{\partial x_k} X_k + \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\theta}{\partial x_k} \xi_k = 0$$

forment un système jacobien, il faut et il suffit que (ξ_k) soit une solution aux variations des équations (1). »

Puis, M. de Donder introduit une notion nouvelle, celle de *covariant intégral;* par définition, si la $(q+1)^{\text{ième}}$ variation d'un élément quelconque d'une intégrale étendue à une variété d'ordre p est identiquement nulle, cette intégrale est un covariant intégral d'ordre p et de degré q. Beaucoup de théorèmes sur les invariants s'étendent aux covariants. Enfin, le Mémoire se termine par une application à la théorie des tourbillons.

Picard (*E.*). — L'œuvre scientifique de Charles Hermite (132-155).

Leçon faite à la Faculté des Sciences de Paris, le samedi 2 mars 1901; extrait des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XVIII, 1901, p. 9-34.

Bagnera (*G.*). — Les groupes finis réels de substitutions linéaires quaternaires (161-309).

Dans ses recherches sur les groupes finis de collinéations de l'espace S_3, M. Bagnera a été amené à se poser le problème suivant, qui fait l'objet du Mémoire actuel : « Rechercher tous les groupes finis réels de substitutions linéaires quaternaires. » Or, cette question se rattache intimement à la recherche des groupes de substitutions orthogonales, et ce problème avait été précédemment résolu par M. E. Goursat. Néanmoins, l'auteur a préféré publier intégralement ses résultats, qu'il avait obtenus par une méthode différente, et qui, d'ailleurs, complètent sur quelques points de détail ceux de M. Goursat.

Soit G un groupe de substitutions à coefficients réels, de la forme

$$(1) \qquad z'_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_j \qquad (i = 1, 2, 3, 4);$$

il existe une forme quadratique définie, invariante par toutes les transforma-

tions de G; on peut toujours supposer que cette forme est

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

de sorte que les substitutions (1) sont orthogonales; de plus, leur déterminant sera ± 1. Cela étant, soient z_i et z_i^* deux systèmes de valeurs de z; posons

$$\xi_1 = z_2 z_3^* - z_3 z_2^*, \qquad \xi_2 = z_3 z_1^* - z_1 z_3^*, \qquad \xi_3 = z_1 z_2^* - z_2 z_1^*,$$
$$\eta_1 = z_1 z_4^* - z_4 z_1^*, \qquad \eta_2 = z_2 z_4^* - z_4 z_2^*, \qquad \eta_3 = z_3 z_4^* - z_4 z_3^*.$$

Quand les z et les z^* subissent une transformation de G, les ξ et les η subissent la transformation représentée par l'équation

$$(1') \qquad \xi'_1 = C_{23}^{23}\,\xi_1 + C_{23}^{31}\,\xi_2 + C_{23}^{12}\,\xi_3 + C_{23}^{14}\,\eta_1 + C_{23}^{24}\,\eta_2 + C_{23}^{34}\,\eta_3$$

et cinq autres analogues (on a posé $C_{ij}^{rs} = c_{ir}c_{js} - c_{is}c_{jr}$). Posons encore

$$x_i = \xi_i - \eta_i, \qquad y_i = \xi_i + \eta_i;$$

une transformation linéaire effectuée sur les C montre que la substitution (1') équivaut au produit de deux substitutions ternaires orthogonales, aux variables séparées x_i et y_i, et aux déterminants $+1$ (ou -1); soient

$$\left.\begin{array}{lll} (A) & x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_i, & y'_i = y_i \\ (B) & x'_i = x_i, & y'_i = \sum_{j=1}^{3} b_{ij} y_j \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

ces substitutions; réciproquement, si (A) et (B) sont connues, il est facile d'écrire explicitement les substitutions (A) et (B) de G qui leur correspondent, et l'on trouve que les substitutions (A), par exemple, constituent un groupe holoédriquement isomorphe au groupe des rotations autour d'un point de S_3 (ce qui ramène le problème à celui de M. Goursat).

Ceci posé, soient (A_i) et (B_i) toutes les substitutions des types (A) et (B); appelons U et V les groupes formés respectivement par les substitutions (A_i) et (B_i); U peut être le groupe identique, un groupe cyclique ou diédrique, ou enfin l'un des groupes tétraédrique, octaédrique ou icosaédrique. Et sur V, on peut faire, indépendamment, des hypothèses analogues. Ceci conduit M. Bagnera à répartir les groupes G (de module 1) en trois classes :

Première classe : Aucun des groupes U et V n'est celui d'un polyèdre régulier;

Deuxième classe : Un et un seul des groupes U et V est celui d'un polyèdre régulier;

Troisième classe : U et V sont des groupes de polyèdres réguliers.

L'auteur aborde alors l'étude détaillée de ces trois classes; et, chaque fois, il étudie les relations de similitude entre les groupes obtenus, ce qui l'amène, notamment, à résoudre le problème d'arithmétique suivant : « Trouver le nombre N des groupes de la première classe que l'on peut former en associant

deux groupes cycliques d'ordre m et n quand on ne considère pas deux groupes semblables comme distincts. »

Parmi les groupes de la troisième classe, l'auteur étudie d'abord ceux du double tétraèdre (dont l'un est lié aux systèmes desmiques), du double octaèdre et du double icosaèdre, puis ceux où les deux polyèdres sont de noms différents.

Avant de quitter les groupes de substitutions unimodulaires (au nombre de 33), M. Bagnera dit quelques mots de leur signification géométrique. A ce point de vue, on peut les caractériser comme étant des groupes de rotations (dans S_4) qui font revenir sur elle-même l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1;$$

l'auteur étudie donc la subdivision de cette variété en domaines fondamentaux, et lui applique différentes formules d'*Analysis Situs* dues à H. Poincaré. Si l'on considère un polyèdre régulier (de S_4) inscrit dans l'hypersphère, il est clair que tous les groupes de rotations (dans S_4) associés à ce polyèdre doivent faire partie des groupes G précédemment obtenus; c'est bien ce que l'on vérifie; mais, inversement, la considération de ces polyèdres réguliers, à elle seule, ne suffirait pas pour retrouver tous les résultats antérieurs.

Enfin, l'auteur étend par symétrie tous les groupes précédemment obtenus, ce qui lui fournit tous les groupes G de substitutions de module -1 (au nombre de 24). Le Mémoire se termine par des tableaux récapitulatifs donnant les symboles de définition de tous les groupes rencontrés.

Burali-Forti (*C.*). — La méthode de Grassmann en Géométrie projective (troisième Note) (310-320).

Cette Note est la suite de deux Notes antérieures insérées aux *Rendiconti* (t. X, p. 177-195, et t. XI, p. 64-82).

L'auteur expose, suivant les idées de Grassmann, la transformation par polaires réciproques (dans le plan), la théorie des coniques rapportées à leurs axes de symétrie, ainsi que l'étude de leurs invariants; cette méthode lui permet de retrouver rapidement des propositions classiques, dont la démonstration habituelle exige parfois de longs calculs.

Poincaré (*H.*). — Quelques remarques sur les groupes continus (321-368).

Ce Mémoire constitue la suite d'un travail précédent (¹) de M. H. Poincaré sur la théorie des groupes continus. Avant d'analyser le Mémoire actuel, il est indispensable de rappeler les résultats établis dans le premier Mémoire que nous appellerons *Mémoire de Cambridge*.

Suivant la remarque de M. H. Poincaré, la théorie des groupes continus de Sophus Lie repose sur trois théorèmes fondamentaux : le premier nous apprend

---

(¹) Memoirs presented to the Cambridge Philosophical Society on the occasion of the Jubilee of Sir George Gabriel Stokes... (Cambridge, *University Press*, n° IX, 1900, p. 220-255).

que dans tout groupe continu il y a des substitutions infinitésimales, et comment on peut engendrer le groupe au moyen des r opérateurs [1]

$$(1) \qquad X_i(f) = \Sigma X_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j};$$

ces opérateurs satisfont à des relations (dites *de structure*) de la forme

$$(2) \qquad (X_i X_k) = X_i X_k - X_k X_i = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s,$$

où les c_{iks} sont des constantes. Inversement, il résulte du second théorème, que si l'on se donne r opérateurs X_i liés par des relations (2), ces opérateurs engendrent un groupe continu. Enfin, le troisième théorème montre que, si l'on se donne arbitrairement des coefficients c_{iks} satisfaisant aux relations

$$c_{iks} + c_{kis} = 0$$

et aux identités de Jacobi, on peut déterminer un groupe continu admettant les c_{iks} comme coefficients des relations de structure.

C'est surtout à la démonstration du troisième théorème qu'était consacré le Mémoire de Cambridge; la méthode employée par M. H. Poincaré réside essentiellement dans l'emploi systématique de la notation symbolique que voici. Soit

$$T = t_1 X_1 + \ldots + t_r X_r,$$

où les t sont des constantes, une transformation infinitésimale quelconque du groupe; elle engendre un groupe continu de transformations finies, à un paramètre; l'une d'entre elles change f en

$$f + \frac{T(f)}{1!} + \frac{T^{(2)}(f)}{2!} + \ldots + \frac{T^{(n)}(f)}{n!} + \ldots;$$

on peut donc représenter cette transformation par e^T; mais il ne faudra pas confondre $e^T e^U$ avec $e^U e^T$ ni avec e^{T+U}; aussi bien, les développements respectifs de ces trois transformations commencent par les expressions

$$1 + T + U + \frac{T^2 + 2TU + U^2}{2} + \ldots,$$

$$1 + U + T + \frac{U^2 + 2UT + T^2}{2} + \ldots,$$

$$1 + T + U + \frac{T^2 + TU + UT + U^2}{2} + \ldots;$$

ils ne peuvent donc coïncider que pour $(TU) = 0$.

Cela étant, posons encore

$$V = v_1 X_1 + \ldots + v_r X_r.$$

---

[1] Le numérotage des formules ne correspond pas à celui du Mémoire actuel.

les v étant des constantes, et

$$\theta(T) \equiv (VT) = \Sigma b_{ik} t_i X_k,$$

où

(3) $$b_{ik} = \sum_{j=1}^{r} c_{jik} v_j.$$

L'opération $\theta(T)$ peut être considérée comme une substitution linéaire effectuée sur T, ce qui justifie la signification des symboles

$$\theta^2(T) = \theta[\theta(T)], \quad \ldots, \quad \theta^m(T) = \theta[\theta^{m-1}(T)].$$

Soit alors

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k x^k$$

une série procédant suivant les puissances de x, convergente pour $|x|$ assez petit; par définition, on posera

$$\varphi(\theta)(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \theta^k(T).$$

Considérons enfin l'équation

$$F(\xi) \equiv \begin{vmatrix} b_{11}-\xi & b_{12} & \ldots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22}-\xi & \ldots & b_{2r} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rr}-\xi \end{vmatrix} = 0,$$

dite *équation de Killing*, et dont les racines seront appelées *racines de Killing;* soit P_{ij} (ou P_{ii}) le mineur, pris avec le signe habituel, de b_{ij} (ou $b_{ii}-\xi$) dans F; une formule fondamentale du Mémoire de Cambridge montre que

$$\varphi(\theta)(T) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\varphi(\xi)\Sigma t_j P_{ij} X_i}{F(\xi)} d\xi,$$

l'intégrale étant prise dans le plan ξ, le long d'un cercle de rayon assez petit pour que $\varphi(\xi)$ soit holomorphe à son intérieur (et sur lui), et assez grand pour que toutes les racines de Killing lui soient intérieures.

En particulier, trois cas de cette formule sont d'une importance capitale dans le Mémoire actuel. Posons

$$e^{-V} e^{T} e^{V} = e^{T'};$$

les coefficients t'_k de T' seront donnés par

(4) $$t'_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int e^{-\xi} \frac{\Sigma t_j P_{ij}}{F(\xi)} d\xi;$$

par définition, les substitutions qui changent les t en t' forme le *groupe adjoint* de G.

Puis, supposons les t_i infiniment petits, et posons

$$e^{\mathrm{v}} e^{\mathrm{T}} = e^{\mathrm{v}+d\mathrm{v}};$$

il viendra

(5) $$t_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} \frac{\Sigma P_{ij}\, dv_j}{F(\xi)}\, d\xi,$$

(6) $$dv_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi}{1-e^{-\xi}} \frac{\Sigma P_{ij}\, t_j}{F(\xi)}\, d\xi;$$

ces deux transformations linéaires, inverses l'une de l'autre, définissent le *groupe paramétrique* de G; les opérateurs du groupe paramétrique peuvent s'écrire

(7) $$X_i(f) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi\, d\xi}{(1-e^{-\xi})F(\xi)} \Sigma P_{ji} \frac{\partial f}{\partial v_j}$$

[dans les formules (4) à (7) on définirait aisément les contours d'intégration].

Arrivons maintenant au second Mémoire de M. H. Poincaré. Après avoir rappelé les résultats précédents dans le paragraphe I et au début du paragraphe II, l'auteur s'attache d'abord à la formule (4) qui lui permet de retrouver aisément un théorème de Killing; puis il aborde le problème inverse. Soit $t'_j = \Sigma l_{ij} t_i$; peut-on calculer les v en fonction des l? En vertu de (3), il suffira de calculer les b; or posons

$$\Phi(e^{-\xi}) = \begin{vmatrix} l_{11}-e^{-\xi} & l_{12} & \cdots & l_{1r} \\ l_{21} & l_{22}-e^{-\xi} & \cdots & l_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{r1} & l_{r2} & \cdots & l_{rr}-e^{-\xi} \end{vmatrix};$$

les racines de $\Phi = 0$ coïncident avec celles de Killing (augmentées de multiples de $2\pi\sqrt{-1}$), et si l'on appelle Q_{ij} (ou Q_{ii}) le mineur de Φ correspondant à l_{ij} (ou $l_{ii} - \xi$) on trouve

(8) $$b_{ji} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi e^{-\xi} Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})}\, d\xi,$$

le contour d'intégration enveloppant toutes les racines de $\Phi = 0$ proprement distinctes (c'est-à-dire ne différant pas d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$). Or (8) montre que les b ne sont pas des fonctions uniformes des l; en effet, il peut arriver que, les l variant, deux ou plusieurs racines de $\Phi = 0$ situées de part et d'autre du contour viennent à se confondre, ou encore que l'une des racines devienne infinie. Dans le premier cas, on dira que la substitution du groupe adjoint est *singulière*, les b seront alors infinis ou indéterminés, la distinction entre ces deux cas relevant de la théorie des diviseurs élémentaires; et l'auteur termine en donnant une interprétation géométrique des deux cas possibles.

Dans le paragraphe III, M. H. Poincaré étudie le groupe paramétrique; il montre la portée des formules (5) et (6), qui, appliquées, par exemple, au groupe des rotations autour d'un point, permettent de retrouver des formules établies, par un long détour, au moyen de la théorie des quaternions. Puis l'auteur aborde les relations du groupe adjoint et du groupe paramétrique; appelons e^{v},

e^{T}, e^{U} trois substitutions de G (les t et les u sont infiniment petits); posons

$$e^{-\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}} e^{\mathrm{U}} = e^{\mathrm{V}'}$$

et soit U_0 la transformation du groupe adjoint qui change les v en v'; on a

$$(\mathrm{TU}) = (\mathrm{TU}_0),$$

où T et U sont donnés par (7). Après s'être arrêté sur cette formule, l'auteur aborde le cas des groupes G qui contiennent des transformations X″ permutables à toutes celles du groupe. Si l'on définit les coefficients v par la formule $e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{W}} = e^{\mathrm{V}}$, on peut établir que les v sont toujours holomorphes par rapport aux u et aux w, à moins que la substitution du groupe adjoint, correspondant à e^{V}, ne soit singulière; et ce résultat est valable qu'il y ait ou non des transformations X″.

Le paragraphe IV est consacré aux groupes de rang 0; dans ce cas, toutes les racines de Killing sont nulles. Les formules (5) et (6) ont pour coefficients des polynomes par rapport aux v; les déterminants de ces coefficients sont égaux à 1. Appelons W_{ij} le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial v_j}$ dans (7), et W_{ij}^q l'ensemble des termes de W_{ij}, homogènes et de degré q. Soit m le plus grand degré de tous ces polynomes; l'auteur prouve que les opérateurs

$$X_i^m = \sum W_{ik}^m \frac{\partial f}{\partial v_k}$$

engendrent un groupe G^m de transformations permutables entre elles et à celles du groupe adjoint à G; ce groupe est intransitif et le déterminant des W_{ik}^m est nul. Supposons qu'il en soit de même de tous les mineurs jusqu'à l'ordre h (exclu); les rapports des mineurs d'ordre h sont des invariants de G^m; ces invariants peuvent aussi être définis par les relations différentielles

$$\sum W_{ij}^q \, dv_i = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

où q est un entier $< m$, qu'on peut prendre égal à 1. Leurs intégrales sont des polynomes par rapport aux v; il n'y a d'ailleurs que r invariants distincts. Enfin, les W satisfont aux relations

$$\sum_k W_{ki}^q W_{jk}^p = \mathrm{C} W_{ji}^{p+q} \qquad (p + q \leqq m),$$

$$\sum_k W_{ki}^q W_{jk}^p = 0 \qquad (p + q > m).$$

Dans le paragraphe V, M. H. Poincaré revient sur le groupe paramétrique; reprenons la formule (8); appelons A la limite de $\frac{e^{-\xi} Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})}$ pour $\xi = -\infty$ et posons

$$e^{-\xi}\left[\frac{Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})} - \frac{\mathrm{A}}{e^{-\xi} - 1}\right] = \theta(\xi);$$

cela étant, (8) prendra la forme remarquable

$$b_{ji} = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\xi)\, d\xi.$$

Définissons maintenant les v par l'équation $e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{W}} = e^{\mathrm{V}}$; ils ne cesseront d'être uniformes par rapport aux u et aux v que s'il en de même des b. Supposons alors que les u et les w décrivent des contours fermés qui les ramènent à leurs positions initiales, mais changent e^{V} en e^{V_0}; M. H. Poincaré appelle la transformations $e^{\mathrm{V}} e^{-\mathrm{V}_0}$ une *transformation spéciale;* la substitution correspondante du groupe adjoint est l'unité; par suite, toute transformation spéciale est permutable à toute transformation du groupe. Il y a d'ailleurs des groupes qui ne contiennent aucune transformation spéciale : par exemple, les groupes de rang o. Enfin, la transformation $e^{\mathrm{V}} e^{-\mathrm{V}_0}$ peut se réduire à l'unité sans que V et V_0 soient identiques : M. H. Poincaré s'arrête un moment à ce sujet ainsi que sur l'échange des racines de Killing correspondant aux transformations spéciales; ces deux points mériteraient de nouvelles recherches.

Le paragraphe VI traite des équations différentielles du groupe; si l'on pose $w_i = \varepsilon t_i$ (où ε est infiniment petit), la relation $e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{W}} = e^{\mathrm{V}}$ donnera

$$e^{\mathrm{U}} e^{(\varepsilon + d\varepsilon)\mathrm{T}_i} = e^{\mathrm{V} + d\mathrm{V}},$$

puis

$$\frac{dv_i}{d\varepsilon} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi}{1 - \varepsilon^{-\xi}} \, \frac{\Sigma t_j \mathrm{P}_{ij}}{\mathrm{F}(\xi)}\, d\xi.$$

Considérons un point singulier de ce système, tel que les racines de Killing restent distinctes, mais que q d'entre elles soient des multiples d'une même quantité qui, au point singulier, devient un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$; M. H. Poincaré démontre alors que les v sont, en général, des fonctions algébroïdes de ε dans le voisinage de la singularité.

Le Mémoire se termine par de rapides indications sur une série de problèmes à résoudre; ces problèmes se posent lorsqu'on identifie les expressions analytiques l'une même quantité susceptible d'être calculée par deux voies distinctes.

René Garnier.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XL.

147

TABLES

E

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XL; 1916. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. T. VII, 1895 (80-91).

Annali di Matematica pura ed applicata. Serie III, T. VIII, 1903 (40-47); T. IX, 1904 (47-54); T. X, 1904 (54-61); T. XI, 1905 (91-98); T. XII, 1906 (98-104); T. XIII, 1907 (121-135).

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. LXIII, 1903-1904 (5-7).

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels. T. 160, 1er semestre 1915 (70-76); T. 161, 2e semestre 1915 (76-80).

Journal für die reine und angewandte Mathematik. T. CXLIV, 1914 (19-40).

Memorie della reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, 1833-1914 (8-19).

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. XIII, 1899 (62-70); T. X, 1896 (104-112); T. XIV, 1900 (112-121); T. XV, 1901 (135-145).

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

FIN DES TABLES DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XL.

56325 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.